Sur des problèmes elliptiques avec des conditions aux limites non locales à coefficients opérateurs dans le cadre holdérien

Ahmed Medeghri

Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées, Université de Mostaganem

H. Hammou, R. Labbas, S. Maingot, A. Medeghri : *On Some Elliptic Problems with Nonlocal Boundary Coefficient-operator Conditions in the Framework of Hölderian Spaces*, EJQTDE,2013 No. 36, p.1-32.

Motivation

- 1. En DIM1, un exemple d'équation d'évolution non linéaire à conditions non locales est :

Motivation

- 1. En DIM1, un exemple d'équation d'évolution non linéaire à conditions non locales est :

Motivation

- 1. En DIM1, un exemple d'équation d'évolution non linéaire à conditions non locales est :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + f\left(u(x,t)\right), (x,t) \in (0,1) \times (0,T) \\ u(x,0) = v(x)\,,\ x \in (0,1) \\ u(0,t) = \int_0^1 \phi(\xi,t)\, u(x,t)\, dx + g_1(t)\,,\ t \in (0,T) \\ u(1,t) = \int_0^1 \psi(x,t)\, u(x,t)\, dx + g_2(t)\,,\ t \in (0,T)\,. \end{cases}$$

(Voir pour le cas linéaire, J. Martin-Vaquero, J. Vigo-Aguiar) où ϕ, ψ sont des poids donnés.

Motivation

- 1. En DIM1, un exemple d'équation d'évolution non linéaire à conditions non locales est :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + f\left(u(x,t)\right), (x,t) \in (0,1) \times (0,T) \\ u(x,0) = v(x),\ x \in (0,1) \\ u(0,t) = \int_0^1 \phi(\xi,t)\, u(x,t)\, dx + g_1(t),\ t \in (0,T) \\ u(1,t) = \int_0^1 \psi(x,t)\, u(x,t)\, dx + g_2(t),\ t \in (0,T). \end{cases}$$

  (Voir pour le cas linéaire, J. Martin-Vaquero, J. Vigo-Aguiar) où ϕ, ψ sont des poids donnés.

- Le problème statique linéarisé qu'on doit étudier (sans le temps) est un problème aux limites non locales de type

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \pm \lambda u = F(x) \\ u(0) - \int_0^1 \phi(x)\, u(x)\, dx = 0, \\ u(1) - \int_0^1 \psi(x)\, u(x)\, dx = 0. \end{cases}$$

- 2. En DIM 2 (voir travaux de Pavel Gurevich, entre autres), par exemple sur l'ouvert cylindrique $\Omega =]0,1[\times]0,1[$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,t) = \Delta_{x,y}u(x,y,t) + f(u(x,y,t)), (x,y,t) \in \Omega \times (0,T) \\ u(x,y,0) = v(x,y), \ (x,y) \in \Omega \\ u(0,y,t) = u_0(y,t), \\ u(1,y,t) + \int_0^y \phi(\xi,t) \frac{\partial u}{\partial x}(0,\xi,t)\, d\xi = u_{1,0}(y,t) \\ u(x,0,t) = u(x,1,t) = 0 \end{cases}$$

en statique, le problème linéarisé à étudier est de la forme :

- 2. En DIM 2 (voir travaux de Pavel Gurevich, entre autres), par exemple sur l'ouvert cylindrique $\Omega =]0,1[\times]0,1[$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,t) = \Delta_{x,y}u(x,y,t) + f\left(u(x,y,t)\right), (x,y,t) \in \Omega \times (0,T) \\ u\left(x,y,0\right) = v\left(x,y\right), \ \ (x,y) \in \Omega \\ u\left(0,y,t\right) = u_0\left(y,t\right), \\ u\left(1,y,t\right) + \int_0^y \phi\left(\xi,t\right) \frac{\partial u}{\partial x}\left(0,\xi,t\right) d\xi = u_{1,0}\left(y,t\right) \\ u(x,0,t) = u(x,1,t) = 0 \end{cases}$$

en statique, le problème linéarisé à étudier est de la forme :

- 2. En DIM 2 (voir travaux de Pavel Gurevich, entre autres), par exemple sur l'ouvert cylindrique $\Omega =]0,1[\times]0,1[$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,t) = \Delta_{x,y} u(x,y,t) + f(u(x,y,t)), (x,y,t) \in \Omega \times (0,T) \\ u(x,y,0) = v(x,y), \ (x,y) \in \Omega \\ u(0,y,t) = u_0(y,t), \\ u(1,y,t) + \int_0^y \phi(\xi,t) \frac{\partial u}{\partial x}(0,\xi,t)\, d\xi = u_{1,0}(y,t) \\ u(x,0,t) = u(x,1,t) = 0 \end{cases}$$

en statique, le problème linéarisé à étudier est de la forme :

$$(P) \begin{cases} \Delta_{x,y} u(x,y) \pm \lambda u(x,y) = F(x,y,), (x,y) \in \Omega \\ u(0,y) = u_0(y), \\ u(1,y) + \int_0^y \phi(\xi) \frac{\partial u}{\partial x}(0,\xi)\, d\xi = u_{1,0}(y) \\ u(x,0) = u(x,1) = 0 \end{cases}$$

3. Il est classique de chercher des fonctions harmoniques lorsqu'on se donne des conditions de type Dirichlet, Neumann, ou Robin, pour peu que l'ouvert soit régulier mais pas lorsqu'on a des conditions non locales.

3. Il est classique de chercher des fonctions harmoniques lorsqu'on se donne des conditions de type Dirichlet, Neumann, ou Robin, pour peu que l'ouvert soit régulier mais pas lorsqu'on a des conditions non locales.

- Si on cache la variable y,et si par rapport à cette variable, on se place dans $L^2(0,1)$, le problème (P), sécrit

$$(P)\begin{cases} u_{xx}(x,.)+Au(x,.)=F\left(x,.\right),x\in]0,1[\\ u\left(0,.\right)=u_0,\\ u\left(1,.\right)+H(u_x(0,.))(.)=u_{1,0}\end{cases}$$

où

$$\begin{cases} D(A)=H^2(0,1)\cap H_0^1(0,1)\\ \left(A\varphi\right)\left(y\right)=\varphi''(y)\pm\lambda\varphi\end{cases}$$

et

$$H:\varphi\mapsto H(\varphi)=\Psi \quad \text{avec} \quad \Psi(y)=\int_0^y\phi\left(\xi\right)\varphi(\xi)d\xi$$

D'où l'écriture opérationnelle de (P)

$$(P)\begin{cases} u''(x)+Au(x)=F\left(x\right),x\in]0,1[\\ u\left(0\right)=u_0,\\ u\left(1\right)+Hu'(0)=u_{1,0}\end{cases}$$

3. Il est classique de chercher des fonctions harmoniques lorsqu'on se donne des conditions de type Dirichlet, Neumann, ou Robin, pour peu que l'ouvert soit régulier mais pas lorsqu'on a des conditions non locales.

- Si on cache la variable y,et si par rapport à cette variable, on se place dans $L^2(0,1)$, le problème (P), sécrit

$$(P)\begin{cases} u_{xx}(x,.) + Au(x,.) = F\,(x,.)\,, x \in]0,1[\\ u\,(0,.) = u_0, \\ u\,(1,.) + H(u_x(0,.))(.) = u_{1,0} \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} D(A) = H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1) \\ (A\varphi)\,(y) = \varphi''(y) \pm \lambda\varphi \end{cases}$$

et

$$H : \varphi \mapsto H(\varphi) = \Psi \quad \text{avec} \quad \Psi(y) = \int_0^y \phi\,(\xi)\,\varphi(\xi)d\xi$$

D'où l'écriture opérationnelle de (P)

$$(P)\begin{cases} u''(x) + Au(x) = F\,(x)\,, x \in]0,1[\\ u\,(0) = u_0, \\ u\,(1) + Hu'(0) = u_{1,0} \end{cases}$$

3. Il est classique de chercher des fonctions harmoniques lorsqu'on se donne des conditions de type Dirichlet, Neumann, ou Robin, pour peu que l'ouvert soit régulier mais pas lorsqu'on a des conditions non locales.

- Si on cache la variable y,et si par rapport à cette variable, on se place dans $L^2(0,1)$, le problème (P), sécrit

$$(P)\begin{cases} u_{xx}(x,.) + Au(x,.) = F(x,.), x \in]0,1[\\ u(0,.) = u_0, \\ u(1,.) + H(u_x(0,.))(.) = u_{1,0} \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} D(A) = H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1) \\ (A\varphi)(y) = \varphi''(y) \pm \lambda\varphi \end{cases}$$

et

$$H : \varphi \mapsto H(\varphi) = \Psi \quad \text{avec} \quad \Psi(y) = \int_0^y \phi(\xi)\, \varphi(\xi) d\xi$$

D'où l'écriture opérationnelle de (P)

$$(P)\begin{cases} u''(x) + Au(x) = F(x), x \in]0,1[\\ u(0) = u_0, \\ u(1) + Hu'(0) = u_{1,0} \end{cases}$$

La deuxième condition de ce problème est non locale à coefficient opérateur

Position du problème

Position du problème

Soit X un espace de Banach complexe. On considère dans X l'Eq. Diff. Opé. complète suivante :

$$u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \tag{1}$$

Position du problème

Soit X un espace de Banach complexe. On considère dans X l'Eq. Diff. Opé. complète suivante :

$$u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \tag{1}$$

avec les conditions aux limites abstraites non locales :

$$u(0) = u_0,\ Hu'(0) + u(1) = u_{1,0}, \tag{2}$$

Position du problème

Soit X un espace de Banach complexe. On considère dans X l'Eq. Diff. Opé. complète suivante :

$$u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \tag{1}$$

avec les conditions aux limites abstraites non locales :

$$u(0) = u_0, \; Hu'(0) + u(1) = u_{1,0}, \tag{2}$$

Où $u_0, u_{1,0}$ sont des éléments donnés de X et A, B, H sont des opérateurs linéaires fermés dans X.

Position du problème

Soit X un espace de Banach complexe. On considère dans X l'Eq. Diff. Opé. complète suivante :

$$u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \tag{1}$$

avec les conditions aux limites abstraites non locales :

$$u(0) = u_0,\ Hu'(0) + u(1) = u_{1,0}, \tag{2}$$

Où u_0, $u_{1,0}$ sont des éléments donnés de X et A, B, H sont des opérateurs linéaires fermés dans X.

Le problème (1)-(2) peut être étudié dans deux cadres différents

1er cas $f \in L^p(0,1;X), 1 < p < +\infty.$

2nd cas $f \in C^\theta([0,1];X), 0 < \theta < 1.$

quand $B = 0$

1er cas $f \in L^p(0,1;X), 1 < p < +\infty.$

2nd cas $f \in C^\theta([0,1];X), 0 < \theta < 1.$

quand $B = 0$

- Le cas $H = 0$, (conditions de Dirichlet), a été étudié par :

R. Labbas : *Problèmes aux Limites pour une Equation Différentielle Abstraite de Type Elliptique*, Thèse d'état, Université de Nice, 1987.

1er cas $f \in L^p(0,1;X), 1 < p < +\infty.$
2nd cas $f \in C^\theta([0,1];X), 0 < \theta < 1.$

quand $B = 0$

- Le cas $H = 0$, (conditions de Dirichlet), a été étudié par :

R. Labbas : *Problèmes aux Limites pour une Equation Différentielle Abstraite de Type Elliptique*, Thèse d'état, Université de Nice, 1987.

1er cas $f \in L^p(0,1;X), 1 < p < +\infty.$

2nd cas $f \in C^\theta([0,1];X), 0 < \theta < 1.$

quand $B = 0$

- Le cas $H = 0$, (conditions de Dirichlet), a été étudié par :

R. Labbas : *Problèmes aux Limites pour une Equation Différentielle Abstraite de Type Elliptique*, Thèse d'état, Université de Nice, 1987.

- Le cas $H = \alpha I$, (cas particulier de notre problème) a été étudié par

R. Labbas and S. Maingot : *Singularities in Boundary Value Problems for an Abstract Second-order Differential Equation of Elliptic Type*, Applied Mathematics and Computation, 148 (2004), 645-663.

1er cas $f \in L^p(0,1;X), 1 < p < +\infty.$
2nd cas $f \in C^\theta([0,1];X), 0 < \theta < 1.$

quand $B = 0$

- Le cas $H = 0$, (conditions de Dirichlet), a été étudié par :

R. Labbas : *Problèmes aux Limites pour une Equation Différentielle Abstraite de Type Elliptique*, Thèse d'état, Université de Nice, 1987.

- Le cas $H = \alpha I$, (cas particulier de notre problème) a été étudié par

R. Labbas and S. Maingot : *Singularities in Boundary Value Problems for an Abstract Second-order Differential Equation of Elliptic Type*, Applied Mathematics and Computation, 148 (2004), 645-663.

- Ces auteurs ont utilisé une méthode directe basée sur les techniques des intégrales de Dunford pour établir une formule de représentation de la solution.

Dans cet exposé, on suppose que $f \in C^{\theta}([0,1];X)$, $0 < \theta < 1$ et on étudie l'équation

$$u''(x) + Au(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \tag{3}$$

Dans cet exposé, on suppose que $f \in C^{\theta}([0,1];X)$, $0 < \theta < 1$ et on étudie l'équation

$$u''(x) + Au(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \tag{3}$$

avec les conditions aux limites

$$u(0) = u_0,\ Hu'(0) + u(1) = u_{1,0}, \tag{4}$$

Dans cet exposé, on suppose que $f \in C^\theta([0,1];X)$, $0 < \theta < 1$ et on étudie l'équation

$$u''(x) + Au(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \tag{3}$$

avec les conditions aux limites

$$u(0) = u_0,\ Hu'(0) + u(1) = u_{1,0}, \tag{4}$$

Dans cet exposé, on suppose que $f \in C^{\theta}([0,1];X)$, $0 < \theta < 1$ et on étudie l'équation

$$u''(x) + Au(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \tag{3}$$

avec les conditions aux limites

$$u(0) = u_0,\ Hu'(0) + u(1) = u_{1,0}, \tag{4}$$

- Une formule de représentation du problème est trouvée en utilisant les semi-groupes analytiques, les puissances fractionnaires d'opérateurs ainsi que la méthode de réduction de l'ordre de Krein.

Dans cet exposé, on suppose que $f \in C^{\theta}([0,1];X)$, $0 < \theta < 1$ et on étudie l'équation

$$u''(x) + Au(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \tag{3}$$

avec les conditions aux limites

$$u(0) = u_0,\ Hu'(0) + u(1) = u_{1,0}, \tag{4}$$

- Une formule de représentation du problème est trouvée en utilisant les semi-groupes analytiques, les puissances fractionnaires d'opérateurs ainsi que la méthode de réduction de l'ordre de Krein.

Dans cet exposé, on suppose que $f \in C^{\theta}([0,1];X)$, $0 < \theta < 1$ et on étudie l'équation

$$u''(x) + Au(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \tag{3}$$

avec les conditions aux limites

$$u(0) = u_0,\ Hu'(0) + u(1) = u_{1,0}, \tag{4}$$

- Une formule de représentation du problème est trouvée en utilisant les semi-groupes analytiques, les puissances fractionnaires d'opérateurs ainsi que la méthode de réduction de l'ordre de Krein.
- Les techniques utilisées sont inspirées des travaux de Cheg-Fav-Lab-Maing-Med et Fav-Lab-Maing-Tanab-Yag.

Dans cet exposé, on suppose que $f \in C^{\theta}([0,1];X)$, $0 < \theta < 1$ et on étudie l'équation

$$u''(x) + Au(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \tag{3}$$

avec les conditions aux limites

$$u(0) = u_0,\ Hu'(0) + u(1) = u_{1,0}, \tag{4}$$

- Une formule de représentation du problème est trouvée en utilisant les semi-groupes analytiques, les puissances fractionnaires d'opérateurs ainsi que la méthode de réduction de l'ordre de Krein.
- Les techniques utilisées sont inspirées des travaux de Cheg-Fav-Lab-Maing-Med et Fav-Lab-Maing-Tanab-Yag.

Dans cet exposé, on suppose que $f \in C^{\theta}([0,1];X)$, $0 < \theta < 1$ et on étudie l'équation

$$u''(x) + Au(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \tag{3}$$

avec les conditions aux limites

$$u(0) = u_0, \; Hu'(0) + u(1) = u_{1,0}, \tag{4}$$

- Une formule de représentation du problème est trouvée en utilisant les semi-groupes analytiques, les puissances fractionnaires d'opérateurs ainsi que la méthode de réduction de l'ordre de Krein.
- Les techniques utilisées sont inspirées des travaux de Cheg-Fav-Lab-Maing-Med et Fav-Lab-Maing-Tanab-Yag.
- Notre but est de donner des conditions nécessaires et suffisantes pour obtenir une unique solution u du Problème (3)-(4) satisfaisant la régularité maximale.

Hypothèses

Sur les deux opérateurs A et H

$$[0,+\infty[\subset \rho\left(A\right) \text{ et } \sup_{\lambda\geqslant 0}\left\|\lambda\left(A-\lambda I\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)}<+\infty, \tag{5}$$

$$D\left(Q\right)\subset D\left(H\right), \tag{6}$$

$$\forall\zeta\in D(H): A^{-1}H\zeta = HA^{-1}\zeta, \tag{7}$$

$$0\in\rho\left(\Lambda\right), \tag{8}$$

où

$$\Lambda=-2HQe^{Q}+I-e^{2Q},$$

qui est bien défini sur X et appartient à $\mathcal{L}(X)$ d'après *(5)-(6)*. On voit que cet opérateur Λ est dans un certain sens le «déterminant» du problème (3)-(4)

Remarque

1. Sous les hypthèses *(5)*∼*(7)* on a, pour tout $\zeta \in D(H), \lambda \in \rho(A), \mu \in \rho(Q)$ et $x \geqslant 0$
$$\begin{cases} (\lambda I - A)^{-1} H\zeta = H(\lambda I - A)^{-1}\zeta \\ (\mu I - Q)^{-1} H\zeta = H(\mu I - Q)^{-1}\zeta \\ He^{xQ}\xi = e^{xQ}H\xi. \end{cases}$$

2. Sous l'hypothèse *(5)*, il existe $\varepsilon_A > 0$, $\beta_A \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ *tel que* $\rho(A)$ contient un domaine sectoriel
$$S_{\varepsilon_A,\beta_A} = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg(z)| < \beta_A\} \cup B(0, \varepsilon_A),$$
vérifie
$$\exists M_{\beta_A} > 0 : \forall z \in S_{\varepsilon_A,\beta_A}, \ \left\| (A - zI)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{M_{\beta_A}}{1 + |z|}.$$
de plus
$$\rho(-A) \supset \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg(z)| > \pi - \beta_A\}.$$

Nous chercherons 3 types de solutions :

- une solution semi-classique du problème (3)-(4) est une fonction u telle que
$$u \in C\left([0,1]\,;X\right) \cap C^{2}\left([0,1[;X\right) \cap C\left([0,1[;D(A)\right),$$
et qui satisfait (3)-(4) ; de plus nous disons que cette solution semi-classique satisfait la propriété de régularité maximale si
$$\begin{cases} u \in C^{\theta}\left([0,1]\,;X\right) \text{ et} \\ u'', Au \in C^{\theta}\left([0,1-\varepsilon];X\right) \text{ pour tout } \varepsilon \in]0,1[. \end{cases} \tag{9}$$

Nous chercherons 3 types de solutions :

- une solution semi-classique du problème (3)-(4) est une fonction u telle que
$$u \in C\left([0,1]\,;X\right) \cap C^{2}\left([0,1[;X\right) \cap C\left([0,1[;D(A)\right),$$
et qui satisfait (3)-(4) ; de plus nous disons que cette solution semi-classique satisfait la propriété de régularité maximale si
$$\left\{ \begin{array}{l} u \in C^{\theta}\left([0,1]\,;X\right) \text{ et} \\ u'', Au \in C^{\theta}\left([0,1-\varepsilon];X\right) \text{ pour tout } \varepsilon \in]0,1[. \end{array} \right. \tag{9}$$
- une solution semi-stricte du problème (3)-(4)est une solution semi-classique du problème (3)-(4), de plus elle vérifie $u \in C^{1}\left([0,1]\,,X\right) \cap C\left([0,1]\,,D(Q)\right)$. Nous dirons que cette solution semi-stricte vérifie la propriété de régularité maximale si elle satisfait (9) :
$$u', Qu \in C^{\theta}\left([0,1]\,,X\right). \tag{10}$$

une solution stricte u du problème (3)-(4) est une fonction u telle que

$$C^2\left([0,1];X\right) \cap C\left([0,1];D(A)\right),$$

et qui vérifie (3)-(4) cette solution stricte satisfait la propriété de régularité maximale si

$$u'', Au \in C^{\theta}\left([0,1]\,;X\right). \tag{11}$$

Quelques résultats

Proposition

Soit L un opérateur générateur d'un semi-groupe analytique généralisé. $\left(e^{xL}\right)_{x\geq 0}$.

1. *Soit* $\varphi \in X$. *Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes*
   (a) $e^{\cdot L}\varphi \in C\left([0,1];X\right)$.
   (b) $\varphi \in \overline{D\left(L\right)}$.
2. *Soit* $\theta \in \left]0,1\right[, g \in C^{\theta}\left([0,1];X\right), \varphi \in X$. *Posons*

$$S(x) = e^{xL}\varphi + \int_0^x e^{(x-s)L} g\left(s\right) ds, \;\; x \in \left[0,1\right].$$

Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes

1. *(a)* $S \in C^1\left([0,1];X\right) \cap C\left([0,1];D\left(L\right)\right)$.
   (b) $\varphi \in D\left(L\right)$ *et* $g\left(0\right) + L\varphi \in \overline{D\left(L\right)}$.

Quelques résultats

On rappelle que pour un opérateur P dans X qui vérifie $\rho(P) \supset]0,+\infty[$ et

$$\exists C > 0, \forall \lambda > 0, \ \left\| (P - \lambda I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{C}{\lambda},$$

nous définissons l'espace d'interpolation $D_P(\theta, +\infty)$ par

$$D_P(\theta, +\infty) = \left\{ x \in X : \sup_{t>0} \left\| t^{\theta} P (P - tI)^{-1} x \right\| < +\infty \right\}.$$

Quelques résultats

Proposition

Soient $\theta \in \left]0,1\right[$ *et* L *un opérateur générateur d'un semi-groupe analytique généralisé.* $\left(e^{xL}\right)_{x\geq 0}$

1. *Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes*
   (a) $e^{\cdot L}\varphi \in C^{\theta}\left([0,1]\,;X\right).$ *(b)* $\varphi \in D_L\left(\theta,+\infty\right).$
2. *Soit* $g \in C\left([0,1]\,;X\right)$ *et* $\varphi \in X$*. Posons*

$$S(x) = e^{xL}\varphi + \int_0^x e^{(x-s)L} g\left(s\right) ds, \;\; x \in [0,1]\,.$$

   Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes
   (a) $S \in C^{1,\theta}\left([0,1]\,;X\right) \cap C^{\theta}\left([0,1]\,;D\left(L\right)\right).$
   (b) $g \in C^{\theta}\left([0,1]\,;X\right),\ \varphi \in D\left(L\right)$ *et* $g\left(0\right) + L\varphi \in D_L\left(\theta,+\infty\right).$
3. *Soit* $g \in C^{\theta}\left([0,1]\,;X\right)$*. Alors* $L\int_0^1 e^{sL}\left(g\left(s\right) - g\left(0\right)\right) ds \in D_L\left(\theta,+\infty\right).$

Pour ces deux propositions voir

E. Sinestrari : *On the Abstract Cauchy Problem of Parabolic Type in Spaces of Continuous Fonctions* , J. Math. Anal. App. 66 (1985) 16-66.

Pour ces deux propositions voir

E. Sinestrari : *On the Abstract Cauchy Problem of Parabolic Type in Spaces of Continuous Fonctions* , J. Math. Anal. App. 66 (1985) 16-66.

Notation Soient g et h deux fonctions définies sur $[0,1]$ à valeurs dans X et $\theta \in \,]0,1[$.

Nous écrivons

$$g \simeq_\theta h$$

si

$$g - h \in C^\theta\left([0,1]\,; X\right).$$

En utilisant la Proposition 2 on obtient

Proposition

Soit $g \in C^\theta\left([0,1]\,; X\right)$, $\varphi \in D\left(L\right)$ *et posons*

$$S\left(x\right) = e^{xL}\varphi + \int_0^x e^{(x-s)L} g\left(s\right) ds,\ x \in [0,1]\,;$$

alors

$$LS\left(\cdot\right) \simeq_\theta e^{\cdot L}\left(L\varphi + g\left(0\right)\right).$$

Représentation de la solution

On suppose (5)$\sim$(8) et que u est une solution semi-classique du problème (3)-(4). Puisque

$$u \in C\left([0,1[; D(A)\right)$$

on a

$$u_0 = u(0) \in D(A).$$

Dans la suite nous supposons que $u_{1,0} \in D(A)$.

Lemme 1.

On a

$$u(x) = e^{xQ}\xi_0 + e^{(1-x)Q}\xi_1 + I_x + J_x, \quad x \in [0,1],$$

où $\xi_0, \xi_1 \in X$ et

$$I_x = \frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^x e^{(x-s)Q} f(s)\,ds \text{ et } J_x = \frac{1}{2}Q^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)Q} f(s)\,ds. \tag{12}$$

Représentation de la solution

Pour simplifier la représentation on montre d'abord le lemme suivant.

Lemme 1.

1. *Il existe* $W \in \mathcal{L}(X)$ *tel que* $WQ^{-1} = Q^{-1}W$ *et* $\Lambda^{-1} = I - W$ *avec*

$$W(X) \subset \bigcap_{k=1}^{+\infty} D\left(Q^k\right).$$

2. *On a*

$$\begin{cases} J_0 = \dfrac{1}{2}Q^{-1}\displaystyle\int_0^1 e^{sQ}\left(f(s) - f(0)\right)ds + \dfrac{1}{2}Q^{-2}e^{Q}f(0) - \dfrac{1}{2}Q^{-2}f(0) \\ I_1 = \dfrac{1}{2}Q^{-1}\displaystyle\int_0^1 e^{sQ}\left(f(1-s) - f(1)\right)ds + \dfrac{1}{2}Q^{-2}e^{Q}f(1) - \dfrac{1}{2}Q^{-2}f(1). \end{cases}$$

(voir Propositions 2 et 3).

La représentation de la solution est

$$u = u_R + v + w, \tag{13}$$

avec la partie régulière u_R sur $[0, 1]$ donnée par

$$\begin{aligned} u_R(x) &= e^{xQ}e^{Q}\varphi_0 + e^{(1-x)Q}e^{Q}\varphi_1 - \frac{1}{2}e^{xQ}e^{Q}Q^{-2}f(0) \\ &\quad -\frac{1}{2}e^{(1-x)Q}e^{Q}\Lambda^{-1}Q^{-2}f(1) \\ &\quad -e^{(1-x)Q}W\left(u_{1,0} - HQu_0 + 2HQJ_0 - I_1\right) \\ &\quad -\frac{1}{2}e^{(1-x)Q}e^{Q}Q^{-2}f(1) + e^{(1-x)Q}e^{Q}HQ^{-1}f(0), \end{aligned} \tag{14}$$

les termes qui donnent le comportement près de 0

$$\begin{aligned} v(x) &= S\left(x, u_0 + \frac{1}{2}Q^{-2}f(0), \frac{1}{2}Q^{-1}f\right) \\ &\quad -\frac{1}{2}e^{xQ}Q^{-1}\int_0^1 e^{sQ}\left(f(s) - f(0)\right)ds, \end{aligned} \tag{15}$$

et celui au sujet du comportement non local dans 0 et 1

$$
\begin{aligned}
& w(x) \\
= \quad & S\left(1-x, \Psi, \frac{1}{2}Q^{-1}f\left(1-.\right)\right) \\
& +e^{(1-x)Q}H\int_0^1 e^{sQ}\left(f\left(s\right)-f\left(0\right)\right)ds \\
& -\frac{1}{2}e^{(1-x)Q}Q^{-1}\int_0^1 e^{sQ}\left(f\left(1-s\right)-f\left(1\right)\right)ds,
\end{aligned} \tag{16}
$$

où $\Psi = -HQu_0 - HQ^{-1}f\left(0\right) + u_{1,0} + \frac{1}{2}Q^{-2}f\left(1\right).$

Lemmes techniques

Lemme 1.

On suppose (5)∼(8). Soit $f \in C^{\theta}\left([0,1], X\right)$ *et* $u_0 \in D\left(A\right)$. *Alors*

1. $u_R, Au_R \in C^{\infty}\left([0,1], X\right).$
2. $v \in C^2\left(]0,1], X\right) \cap C\left(]0,1], D\left(A\right)\right).$
3. $Av \simeq_{\theta} e^{\cdot Q}\left[Au_0 - f\left(0\right)\right]$ *et donc*

$$\begin{cases} Av \in C\left([0,1]; X\right) \Leftrightarrow Au_0 - f\left(0\right) \in \overline{D\left(A\right)} \\ Av \in C^{\theta}\left([0,1]; X\right) \Leftrightarrow Au_0 - f\left(0\right) \in D_A\left(\theta/2, +\infty\right). \end{cases}$$

Lemme 1.

On suppose (5)∼(8). Soit $f \in C^{\theta}\left([0,1],X\right)$ *et* $u_0, u_{10} \in D\left(A\right)$. *Alors*

1. $w \in C^2\left([0,1[,X\right) \cap C\left([0,1[,D\left(A\right)\right).$
2. $w \simeq_{\theta} e^{(1-\cdot)Q} HQ^{-1}\left(Au_0 - f\left(0\right)\right)$ *et donc*

$$\begin{cases} w \in C\left([0,1],X\right) \Leftrightarrow HQ^{-1}\left[Au_0 - f\left(0\right)\right] \in \overline{D\left(A\right)} \\ w \in C^{\theta}\left([0,1],X\right) \Leftrightarrow HQ^{-1}\left[Au_0 - f\left(0\right)\right] \in D_A\left(\theta/2,+\infty\right). \end{cases}$$

3. $w\left([0,1]\right) \subset D(Q) \Longleftrightarrow HQ^{-1}\left[Au_0 - f\left(0\right) + \mathfrak{I}_f\right] \in D(Q).$
4. *En supposant* $HQ^{-1}\left[Au_0 - f\left(0\right) + \mathfrak{I}_f\right] \in D(Q)$ *on obtient*

$$Qw \simeq_{\theta} e^{(1-\cdot)Q} QHQ^{-1}\left[Au_0 - f\left(0\right) + \mathfrak{I}_f\right],$$

et donc

$$\begin{cases} w', Qw \in C\left([0,1],X\right) \Leftrightarrow QHQ^{-1}\left[Au_0 - f\left(0\right) + \mathfrak{I}_f\right] \in \overline{D\left(A\right)} \\ w', Qw \in C^{\theta}\left([0,1],X\right) \Leftrightarrow QHQ^{-1}\left[Au_0 - f\left(0\right) + \mathfrak{I}_f\right] \in D_A\left(\theta/2,+\infty\right). \end{cases}$$

Lemme 2.

5. $w\left([0,1]\right) \subset D(Q^2) \Longleftrightarrow HQ^{-1}\left[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f\right] \in D(Q^2).$
6. *En supposant* $HQ^{-1}\left[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f\right] \in D(Q^2)$ *on obtient*

$$Q^2 w \simeq_\theta e^{(1-\cdot)Q}\left(Q^2 HQ^{-1}\left[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f\right] - \left[Au_{1,0} - f(1)\right]\right),$$

et donc

$$\begin{cases} Aw \in C\left([0,1], X\right) \text{ si et seulement si} \\ Q^2 HQ^{-1}\left[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f\right] - \left[Au_{1,0} - f(1)\right] \in \overline{D(A)} \\ \\ Aw \in C^\theta\left([0,1], X\right) \text{ si et seulement si} \\ Q^2 HQ^{-1}\left[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f\right] - \left[Au_{1,0} - f(1)\right] \in D_A(\theta/2, +\infty). \end{cases}$$

Lemme 1.

Supposons (5)∼(8). Soit $f \in C^{\theta}([0,1], X)$ *et* $u_0, u_{1,0} \in D(A)$.

1. *Si* $H \in \mathcal{L}(X)$ *alors* $Qw \simeq_{\theta} e^{(1-\cdot)Q} H [Au_0 - f(0)]$.
2. *Si* $H \in \mathcal{L}(X)$ *avec* $H(X) \subset D(Q)$ *alors* $QH \in \mathcal{L}(X)$ *et*

$$Q^2 w \simeq_{\theta} e^{(1-\cdot)Q} (QH [Au_0 - f(0)] - [Au_{1,0} - f(1)]).$$

Ces deux derniers cas correspondent, par exemple, aux opérateurs $H = \alpha I$ et $H = -\alpha Q^{-1}$ ($\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \operatorname{Re} \alpha \geq 0$) qui seront étudiés par la suite.

Lemme 1.

On suppose (5)∼(8) et soit $u_0, u_{1,0} \in D(A)$.

1. *Si* $f \in C^{\theta}([0,1], D(Q))$ *alors*

$$w([0,1]) \subset D(Q) \Longleftrightarrow HQ^{-1}Au_0 \in D(Q),$$

et si $HQ^{-1}Au_0 \in D(Q)$ *on a* $Qw \simeq_{\theta} e^{(1-\cdot)Q} QHQ^{-1} [Au_0 - f(0)]$.

Lemme 2.

2. *Si* $f \in C^{\theta}\left([0,1], D(Q^2)\right)$ *alors*

$$w\left([0,1]\right) \subset D(Q^2) \Longleftrightarrow HQ^{-1}Au_0 \in D(Q^2),$$

et si $HQ^{-1}Au_0 \in D(Q^2)$ *on a*

$$Q^2 w \simeq_{\theta} e^{(1-\cdot)Q}\left(Q^2 HQ^{-1}\left[Au_0 - f(0)\right] - \left[Au_{1,0} - f(1)\right]\right).$$

Par des arguments similaires, nous pouvons prouver le lemme suivant.

Lemme 1.

On suppose (5)∼(8) et $u_0, u_{10} \in D(A)$. *Si* $H \in \mathcal{L}(X)$ *et* $f \in C^{\theta}\left([0,1], D(Q)\right)$ *alors*

$$w\left([0,1]\right) \subset D(Q^2) \Longleftrightarrow HAu_0 \in D(Q),$$

et si $HAu_0 \in D(Q)$ *on a*

$$Q^2 w \simeq_{\theta} e^{(1-\cdot)Q}\left(QH\left[Au_0 - f(0)\right] - \left[Au_{1,0} - f(1)\right]\right).$$

Résultats principaux

Théorème 1.

On suppose(5)∼(8), supposons que $u_0, u_{1,0} \in D(A)$ *et* $f \in C^{\theta}([0,1], X)$ *avec* $\theta \in]0,1[$. *Alors :*

1. *Il existe une solution semi-classique u du problème (3)-(4) si et seulement si* $Au_0 - f(0) \in \overline{D(A)}$,
2. *il existe une solution semi-classique u du problème (3)-(4) ayant la propriété de régularité maximale (9) si et seulement si* $Au_0 - f(0) \in D_A(\theta/2, +\infty)$,
3. *il existe une solution semi-stricte u du problème (3)-(4) si et seulement si*
$$\begin{cases} Au_0 - f(0) \in \overline{D(A)}, \;\; HQ^{-1}\left[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f\right] \in D(Q) \\ \text{et } \; QHQ^{-1}\left[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f\right] \in \overline{D(A)}, \end{cases}$$
4. *il existe une solution semi-stricte u du problème (3)-(4) ayant la propriété de régularité maximale (9)-(10) si et seulement si*
$$\begin{cases} Au_0 - f(0) \in D_A(\theta/2, +\infty), \;\; HQ^{-1}\left[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f\right] \in D(Q) \\ \text{et } \; QHQ^{-1}\left[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f\right] \in D_A(\theta/2, +\infty), \end{cases}$$

Lemme 2.

5. *il existe une solution stricte u du problème (3)-(4) ssi*

$$\begin{cases} Au_0 - f(0) \in \overline{D(A)}, \\ HQ^{-1}\left[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f\right] \in D(A) \text{ et} \\ Q^2HQ^{-1}\left[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f\right] - \left[Au_{1,0} - f(1)\right] \in \overline{D(A)}. \end{cases}$$

6. *il existe une solution stricte u du problème (3)-(4) ayant la propriété de régularité maximale (11) si et seulement si*

$$\begin{cases} Au_0 - f(0) \in D_A(\theta/2, +\infty) \\ HQ^{-1}\left[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f\right] \in D(A) \text{ et} \\ Q^2HQ^{-1}\left[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f\right] - \left[Au_{1,0} - f(1)\right] \in D_A(\theta/2, +\infty). \end{cases}$$

De plus, dans les 6 cas u est unique et donnée par

$$u = u_R + v + w$$

où u_R, v, w sont définies dans (14),(15) et (16).

Nous étudions maintenant quelques situations où plus de régularité est

Corollaire

On suppose (5)∼(8). Soit $f \in C^{\theta}([0,1], X)$ *et* $u_0, u_{10} \in D(A)$*.*

1. *Supposons que* $H \in \mathcal{L}(X)$ *alors : il existe une solution semi-stricte u du problème (3)-(4) si et seulement si* $Au_0 - f(0) \in \overline{D(A)}$*.*

Dans le corollaire précédent, nous obtiendrons, pour chaque cas, la régularité

Corollaire

On suppose (5)∼(8). Soit $f \in C^{\theta}\left([0,1], X\right)$ *et* $u_0, u_{10} \in D\left(A\right)$.

1. *Supposons que* $H \in \mathcal{L}(X)$ *alors : il existe une solution semi-stricte u du problème (3)-(4) si et seulement si* $Au_0 - f\left(0\right) \in \overline{D\left(A\right)}$.
2. *Supposons que* $H \in \mathcal{L}(X)$ *avec* $H(X) \subset D(Q)$ *alors : il existe une solution stricte u du problème (3)-(4) si et seulement si* $Au_0 - f\left(0\right) \in \overline{D\left(A\right)}$ *et* $QH\left[Au_0 - f\left(0\right)\right] - \left[Au_{1,0} - f\left(1\right)\right] \in \overline{D\left(A\right)}$.

Dans le corollaire précédent, nous obtiendrons, pour chaque cas, la régularité

Corollaire

On suppose (5)∼(8). Soit $f \in C^{\theta}\left([0,1], X\right)$ *et* $u_0, u_{10} \in D\left(A\right)$.

1. *Supposons que* $H \in \mathcal{L}(X)$ *alors : il existe une solution semi-stricte u du problème (3)-(4) si et seulement si* $Au_0 - f\left(0\right) \in \overline{D\left(A\right)}$.
2. *Supposons que* $H \in \mathcal{L}(X)$ *avec* $H(X) \subset D(Q)$ *alors : il existe une solution stricte u du problème (3)-(4) si et seulement si* $Au_0 - f\left(0\right) \in \overline{D\left(A\right)}$ *et* $QH\left[Au_0 - f\left(0\right)\right] - \left[Au_{1,0} - f\left(1\right)\right] \in \overline{D\left(A\right)}$.
3. *Supposons que* $f \in C^{\theta}\left([0,1], D(Q)\right)$ *alors : il existe une solution semi-stricte u du problème (3)-(4) si et seulement si* $Au_0 \in D(QHQ^{-1}) \cap \overline{D\left(A\right)}$ *et* $QHQ^{-1}\left[Au_0 - f\left(0\right)\right] \in \overline{D\left(A\right)}$.

Dans le corollaire précédent, nous obtiendrons, pour chaque cas, la régularité

Corollaire

On suppose (5)∼(8). Soit $f \in C^{\theta}([0,1], X)$ *et* $u_0, u_{10} \in D(A)$.

1. *Supposons que* $H \in \mathcal{L}(X)$ *alors : il existe une solution semi-stricte u du problème (3)-(4) si et seulement si* $Au_0 - f(0) \in \overline{D(A)}$.
2. *Supposons que* $H \in \mathcal{L}(X)$ *avec* $H(X) \subset D(Q)$ *alors : il existe une solution stricte u du problème (3)-(4) si et seulement si* $Au_0 - f(0) \in \overline{D(A)}$ *et* $QH[Au_0 - f(0)] - [Au_{1,0} - f(1)] \in \overline{D(A)}$.
3. *Supposons que* $f \in C^{\theta}([0,1], D(Q))$ *alors : il existe une solution semi-stricte u du problème (3)-(4) si et seulement si* $Au_0 \in D(QHQ^{-1}) \cap \overline{D(A)}$ *et* $QHQ^{-1}[Au_0 - f(0)] \in \overline{D(A)}$.
4. *Supposons que* $f \in C^{\theta}([0,1], D(Q^2))$ *alors : il existe une solution stricte u du problème (3)-(4) si et seulement si* $Au_0 \in D(Q^2HQ^{-1}) \cap \overline{D(A)}$ *et* $Q^2HQ^{-1}[Au_0 - f(0)] - [Au_{1,0} - f(1)] \in \overline{D(A)}$.

Dans le corollaire précédent, nous obtiendrons, pour chaque cas, la régularité

Corollaire

On suppose (5)∼(8). Soit $f \in C^{\theta}\left([0,1], X\right)$ *et* $u_0, u_{10} \in D\left(A\right)$.

1. *Supposons que* $H \in \mathcal{L}(X)$ *alors : il existe une solution semi-stricte u du problème (3)-(4) si et seulement si* $Au_0 - f\left(0\right) \in \overline{D\left(A\right)}$.
2. *Supposons que* $H \in \mathcal{L}(X)$ *avec* $H(X) \subset D(Q)$ *alors : il existe une solution stricte u du problème (3)-(4) si et seulement si* $Au_0 - f\left(0\right) \in \overline{D\left(A\right)}$ *et* $QH\left[Au_0 - f\left(0\right)\right] - \left[Au_{1,0} - f\left(1\right)\right] \in \overline{D\left(A\right)}$.
3. *Supposons que* $f \in C^{\theta}\left([0,1], D(Q)\right)$ *alors : il existe une solution semi-stricte u du problème (3)-(4) si et seulement si* $Au_0 \in D(QHQ^{-1}) \cap \overline{D\left(A\right)}$ *et* $QHQ^{-1}\left[Au_0 - f\left(0\right)\right] \in \overline{D\left(A\right)}$.
4. *Supposons que* $f \in C^{\theta}\left([0,1], D(Q^2)\right)$ *alors : il existe une solution stricte u du problème (3)-(4) si et seulement si* $Au_0 \in D(Q^2HQ^{-1}) \cap \overline{D\left(A\right)}$ *et* $Q^2HQ^{-1}\left[Au_0 - f\left(0\right)\right] - \left[Au_{1,0} - f\left(1\right)\right] \in \overline{D\left(A\right)}$.
5. *Supposons que* $H \in \mathcal{L}(X)$ *et* $f \in C^{\theta}\left([0,1], D(Q)\right)$ *alors : il existe une solution stricte unique u du problème (3)-(4) si et seulement si* $Au_0 \in \overline{D\left(A\right)} \cap D(QH)$ *et* $\left[Au_{1,0} - f\left(1\right)\right] - QH\left[Au_0 - f\left(0\right)\right] \in \overline{D\left(A\right)}$.

Dans le corollaire précédent, nous obtiendrons, pour chaque cas, la régularité

Cas particuliers

Nous étudions d'abord le cas particulier $H = \alpha I$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\operatorname{Re} \alpha \geq 0$ donc on considère le problème

$$\begin{cases} u''(x) + Au(x) = f(x), & x \in]0,1[\\ u(0) = u_0 \\ \alpha u'(0) + u(1) = u_{1,0}. \end{cases} \tag{17}$$

La difficulté principale est l'hypothèse (8) et nous avons besoin de quelques résultats de calcul fonctionnel.
Ici, notre principale hypothèse sur A est

$$\begin{cases} A \text{ est un opérateur fermé dans } X,\ \sigma(A) \subset]-\infty, 0[\text{ et} \\ \text{pour tout } \theta \in]0,\pi[,\ \sup\limits_{\lambda \in S_\theta} \left\| \lambda (A - \lambda I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty, \end{cases} \tag{18}$$

où $S_\theta := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \theta\}$. Puisque $H = \alpha I$ alors

$$\Lambda = I - 2\alpha Q e^{Q} - e^{2Q},$$

nous devons étudier les fonctions F, G définies par

$$F(z) = 1 + G(z), \quad G(z) = 2\alpha z e^{-z} - e^{-2z}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

D'abord nous fixons $\varepsilon_0 > 0$ telque $B(0, 4\varepsilon_0^2) \subset \rho(A)$.

Lemme 1.

Posons $S = S_{\pi/4}$, on obtient :

1. *F, G sont des fonctions holomorphes sur un voisinage de $\overline{S}$.*
2. *$x > 0$ implique $|F(x)| > 0$.*
3. *$\lim\limits_{\operatorname{Re} z \to +\infty,\ z \in \overline{S}} 2\alpha z e^{-z} + e^{-2z} = 0$ et alors*
   a. *il existe $x_0 > 0$ tel que $z \in \overline{S}$ et $\operatorname{Re} z \geqslant x_0$ implique que $2 \geq |F(z)| \geq 1/2$.*
   b. *F est borné sur $\overline{S}$.*
4. *Il existe $\theta_0 \in]0, \pi/4[$ tel que $F(z)$ n'est pas nulle sur*

$$\Sigma_0 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq \varepsilon_0 \text{ et } |\arg(z)| \leq \theta_0\},$$

et $\min\limits_{z \in \Sigma_0} |F(z)| = r > 0$.

Lemme 1.

Sous 'l'hypothèse (18), l'opérateur $\Lambda = I - 2\alpha Q e^{Q} - e^{2Q}$ admet un inverse borné et $\Lambda^{-1} = I - \Psi(-Q)$.

Théorème 1.

Sous (18), on suppose que $u_0, u_{1,0} \in D(A)$ *et*

$$f \in C^{\theta}([0,1], X) \text{ avec } \theta \in]0,1[.$$

Alors :

1. *il existe une solution semi-stricte unique u du problème (17) si et seulement si* $Au_0 - f(0) \in \overline{D(A)}$,
2. *il existe une solution semi-stricte unique u du problème (17) ayant la régularité (9)-(10) si et seulement si* $Au_0 - f(0) \in D_A(\theta/2, +\infty)$,
3. *il existe une solution stricte unique u du problème (17) si et seulement si*

$$\begin{cases} Au_0 - f(0) \in \overline{D(A)}, \\ Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f \in D(Q) \text{ et} \\ \alpha Q\left[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f\right] - \left[Au_{1,0} - f(1)\right] \in \overline{D(A)}. \end{cases}$$

Remarque : Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\operatorname{Re} \alpha \geq 0$.

- Par les mêmes techniques nous pouvons considérer $H = -\alpha Q$ sous l'hypothèse (18), on étudie les fonctions $\widetilde{F}, \widetilde{G}$ definies par

$$\widetilde{F}(z) = 1 + \widetilde{G}(z), \;\; \widetilde{G}(z) = -2\alpha z^2 e^{-z} - e^{-2z}$$

et on peut montrer que $\Lambda = I + 2\alpha Q^2 e^Q - e^{2Q}$ admet un inverse borné

$$\Lambda^{-1} = I - \frac{\widetilde{G}}{1 + \widetilde{G}}(-Q),$$

alors (5)$\sim$(8) sont vérifiées et donc on peut appliquer Théorème 1.

Remarque : Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \operatorname{Re} \alpha \geq 0.$

- Par les mêmes techniques nous pouvons considérer $H = -\alpha Q$ sous l'hypothèse (18), on étudie les fonctions $\widetilde{F}, \widetilde{G}$ definies par
$$\widetilde{F}(z) = 1 + \widetilde{G}(z), \;\; \widetilde{G}(z) = -2\alpha z^2 e^{-z} - e^{-2z}$$
et on peut montrer que $\Lambda = I + 2\alpha Q^2 e^Q - e^{2Q}$ admet un inverse borné
$$\Lambda^{-1} = I - \frac{\widetilde{G}}{1+\widetilde{G}}(-Q),$$
alors (5)$\sim$(8) sont vérifiées et donc on peut appliquer Théorème 1.
- Noter que nous pouvons également résoudre le problème
$$\begin{cases} u''(x) + Au(x) = f(x), \;\; x \in [0,1[\\ u(0) = u_0 \\ -\alpha u'(0) + Qu(1) = u_{1,0}, \end{cases}$$
puisque on peut écrire la deuxième condition aux limites :
$$-\alpha Q^{-1} u'(0) + u(1) = Q^{-1} u_{1,0},$$
ici $H = -\alpha Q^{-1}$, $\Lambda = I + 2\alpha e^Q - e^{2Q} \in \mathcal{L}(X)$ et, en supposant (18), on peut appliquer le corollaire 5 assertion 2.

Problème avec un paramètre spectral

Afin de fournir des résultats pour H général satisfaisant (8), nous considérerons un certain nombre positif grand ω et le problème

$$\begin{cases} u''(x) + Au(x) - \omega u(x) = f(x), \quad x \in [0,1] \\ u(0) = u_0 \\ u(1) + Hu'(0) = u_{1,0}. \end{cases} \tag{19}$$

En fixant $\omega_0 \geq 0$ et en posant, pour $\omega \geq \omega_0$

$$A_\omega = A - \omega I,$$

alors le Problème (19) est le Probleme (**??**) avec A remplacé par A_ω.

Problème avec un paramètre spectral

Nos hypothèses principales sur les opérateurs sont

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{\omega_0} \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } X, \ [0,+\infty[\subset \rho\left(A_{\omega_0}\right) \text{ et} \\ \sup\limits_{\lambda \geqslant 0} \left\| \lambda \left(A_{\omega_0} - \lambda I\right)^{-1} \right\|_{L(X)} < +\infty, \end{array} \right. \tag{20}$$

$$\forall \zeta \in D(H) : A_{\omega_0}^{-1} H \zeta = H A_{\omega_0}^{-1} \zeta, \tag{21}$$

$$D\left(Q_{\omega_0}\right) \subset D\left(H\right). \tag{22}$$

Remarque :

1. L'hypothèse (20) implique que pour $\omega \geq \omega_0$

$$\begin{cases} A_\omega \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } X, \\ [\omega_0 - \omega, +\infty[\subset \rho(A_\omega) \text{ et} \\ \sup\limits_{\lambda \geqslant \omega_0 - \omega} \left\| (\lambda + \omega - \omega_0)(A_\omega - \lambda I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty. \end{cases} \tag{23}$$

mais

$$\sup_{\lambda \geqslant 0} \left\| \lambda (A_\omega - \lambda I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \sup_{\lambda \geqslant \omega_0 - \omega} \left\| (\lambda + \omega - \omega_0)(A_\omega - \lambda I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)},$$

ainsi, pour tout $\omega \geq \omega_0$, $Q_\omega = -(-A_\omega)^{\frac{1}{2}}$,est un générateur infnitésimal d'un semi-groupe analytique generalisé sur X. Notons que

$$c_0 = \sup_{\lambda \geqslant \omega_0 - \omega} \left\| (\lambda + \omega - \omega_0)(A_\omega - \lambda I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} = \sup_{\lambda \geqslant 0} \left\| \lambda (A_{\omega_0} - \lambda I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)},$$

et alors c_0 ne dépend pas de ω.

2. L'hypothèse (21) implique que $\omega \geq \omega_0$

$$\forall \lambda \geqslant \omega_0 - \omega, \forall \zeta \in D(H), \quad (\lambda I - A_\omega)^{-1} H\zeta = H(\lambda I - A_\omega)^{-1} \zeta,$$

Lemme 1.

On suppose (20) $\sim$ (22), alors il existe $\omega^* \geq \omega_0$ tel que, pour $\omega \geqslant \omega^*$, l'opérateur $\Lambda_\omega = -2HQ_\omega e^{Q_\omega} + I - e^{2Q_\omega}$ admet un inverse borné.

Théorème 1.

On suppose (20)$\sim$(22), supposons que $u_0, u_{1,0} \in D(A)$ et $f \in C^\theta([0,1], X)$ avec $\theta \in \left]0,1\right[$. Pour tout $\omega \geqslant \omega^*$

1. *il existe une solution semi-classique u_ω du problème (19) si et seulement si $Au_0 - f(0) \in \overline{D(A)}$,*
2. *il existe une solution semi-stricte u_ω du problème (19) si et seulement si*
$$\begin{cases} Au_0 - f(0) \in \overline{D(A)}, \quad HQ_\omega^{-1}\left[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f\right] \in D(Q) \text{ et} \\ Q_\omega HQ_\omega^{-1}\left[Au_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f\right] \in \overline{D(A)}, \end{cases}$$
3. *il existe une solution stricte u_ω du problème (19) si et seulement si*
$$\begin{cases} Au_0 - f(0) \in \overline{D(A)}, \quad HQ_\omega^{-1}\left[A_\omega u_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f\right] \in D(A) \text{ et} \\ Q_\omega^2 HQ_\omega^{-1}\left[A_\omega u_0 - f(0) + \mathfrak{I}_f\right] - \left[A_\omega u_{1,0} - f(1)\right] \in \overline{D(A)}. \end{cases}$$

De plus, dans les 3 cas u est unique et donnée par $u_\omega = u_{\omega,R} + v_\omega + w_\omega$ où $u_{\omega,R}, v_\omega, w_\omega$ sont définies dans (14),(15) et (16) et on remplace A, Q, Λ par

Remarque : Dans le théorème 3, nous obtiendrons, dans chaque cas, la régularité maximale de la solution u_ω si on remplace $\overline{D(A)}$ par $D_A(\theta/2, +\infty)$.

Cas Particulier du Problème (19)
On considère ici $H = \alpha (Q_{\omega_0})^\beta$ avec $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $\beta \in]-\infty, 1]$. Ainsi le problème (19) devient

$$\begin{cases} u''(x) + Au(x) - \omega u(x) = f(x), \quad x \in]0,1[\\ u(0) = u_0 \\ u(1) + \alpha (Q_{\omega_0})^\beta u'(0) = u_{1,0}. \end{cases} \tag{24}$$

Si on suppose (20) , (21) et (22) vérifiées on peut appliquer le théorème 3 (de plus $H \in \mathcal{L}(X)$ si $\beta \in]-1, 0]$ et $H \in \mathcal{L}(X)$ avec $H(X) \subset D(Q)$ pour $\beta \in]-\infty, -1]$. Dans ces cas nous pouvons appliquer le corollaire5). Par exemple si $\beta = 0$ nous obtenons le problème abstrait suivant

$$\begin{cases} u''(x) + Au(x) - \omega u(x) = f(x), \quad x \in]0,1[\\ u(0) = u_0 \\ u(1) + \alpha u'(0) = u_{1,0}, \end{cases} \tag{25}$$

- B. A. Aliev and S. Yakubov : Second Order Elliptic *Differential-Operator Equations with Unbounded Operator Boundary Conditions in UMD Banach Spaces*, Integr. Equ. Oper. Theory 69 (2011), 269-300.
- A. V. Balakrishnan : *Fractional Powers of Closed Operators and the Semigroups Generated by them*. Pacif. J. Math. 10 (1960), 419-437.
- A. V. Bitsadze and A. A Samarskii, *On Some Simple Generalizations of linear Elliptic Boundary value Problems,* Dokl. Akad. Nauk SSSR.,185 (1969), 739-740. ; English transl. : Soviet Math. Dokl., 10 (1969).
- T. Carleman : *Sur la Théorie des Equations Intégrales et ses Applications*, Verhandlungen des Internat. Math. Kongr. Zürich, 1 (1932), 132-151.
- M. Cheggag, A. Favini, R. Labbas, S. Maingot and A. Medeghri, *Sturm-Liouville Problems for an Abstract Differential Equation of Elliptic Type in UMD Spaces,* Differential and Integral Equations, 21, no. 9-10 (2008), 981-1000.
- M. Cheggag, A. Favini, R. Labbas, S. Maingot et A. Medeghri, *Complete Abstract Differential Equations of Elliptic Type with General Robin Boundary Conditions in UMD Spaces, DCDS-S*, 4, no. 3 (2011), 1-16.

- G. Da Prato : *Abstract Differential Equations, Maximal Regularity and Linearization*, Proceed. Symposia. Pura Math., 45 (1986), Part I, 359–370.
- G. Da Prato et P. Grisvard : *Sommes d'Opérateurs Linéaires et Equations Différentielles Opérationnelles*, J. Math. Pures Appl. IX Ser.54 (1975), 305-387.
- G. Dore et A. Venni : *On the closedness of the sum of two closed operators*, Mathematicsche Zeitschrift, 196 (1987), 124-136.
- G. Dore and S. Yakubov : *Semigroup Estimates and Noncoercive Boundary Value Problems, Semigroup Forum*, 60 (2000), 93-121.
- A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe and A. Yagi : *On the Solvability and the Maximal Regularity of Complete Abstract Differential Equations of Elliptic Type*, Funkcialaj Ekvacioj, 47(2004), 423-452.

- H. Triebel :*Interpolation theory, Function spaces, differential operators*, Amsterdam, North Holland 1978.
- S. G. Krein : *Linear Differential Equations in Banach Spaces*, Moscou, 1967.
- T. Kato. : *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York 1980.
- R. Labbas : *Problèmes aux Limites pour une Equation Différentielle Abstraite de Type Elliptique*, Thèse d'état, Université de Nice, 1987.
- R. Labbas and S. Maingot : *Singularities in Boundary Value Problems for an Abstract Second-order Differential Equation of Elliptic Type*, Applied Mathematics and Computation, 148 (2004), 645-663.
- J.L. Lions. : *Théorème de trace et d'interpolation I et II*. Annali S.N.S.di Pisa, 13, (1959), 389-403 et 14, (1960), 317-331.
- J.L. Lions et J. Peetre. : *Sur une classe d'espaces d'interpolation*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., 19 (1964), 5-68.
-
- A. Lunardi : *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*, Birkhäuser, Basel, 1995.

- A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe and A. Yagi : *Necessary and Sufficient Conditions in the Study of Maximal Regularity of Elliptic Differential Equations in Hölder Spaces*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, 22 (2008), 973-987.
- A. Favini, Y. Yakubov, *Irregular Boundary Value Problems for Second Order Elliptic Differential-Operator Equations in UMD Banach Spaces.*, Math. Ann. (2010), 348 : 601-632.
- A. Favini, Y. Yakubov, *Regular Boundary Value Problems for Second Ordinay Differential-Operator Equations of Higher Order in UMD Banach Spaces.*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, Vol. 4, N°3 (2011), 595-614.
- P. Grisvard. : *Spazi di tracce e applicazioni, Rendiconti di Matematica*, vol. 5, Serie VI, 1972.
- M. Haase : *The Functional Calculus for Sectorial Operators, Operator Theory : Advances and Applications, Vol. 169*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2006.
- H. Hammou, R. Labbas, S. Maingot, A. Medeghri : *On Some Elliptic Problems with Nonlocal Boundary Coefficient-operator Conditions in the Framework of Hölderian Spaces*, EJQTDE,2013 No. 36, p.1-32.

- C. Martinez and M. Sanz : *The Theory of Fractional Powers of Operators*, North Holland, Mathematics studies 187, 2001.
- E. Sinestrari : *On the Abstract Cauchy Problem of Parabolic Type in Spaces of Continuous Fonctions* , J. Math. Anal. App. 66 (1985) 16-66.
- A. L. Skubachevskii : *Nonclassical Boundary-value Problems. I*, Journal of Mathematical Sciences, Vol. 155, N°2 (2008),199-334.
- J. D. Tamarkin : *Some General Problems of the Theory of Ordinary Linear Differential Equations and Expansion of an Arbitrary Function in Series of Fundamental Functions*, Petrograd, 1917. Abridged English transl. ; Math. Z., 27, (1928), 1-54.
- S. Ya. Yakubov : *Noncoercive Boundary Value Problems for Elliptic Partial Differential and Differential-Operator Equations*, Results in Mathematics, vol. 28 (1995), 153-168.
- Y. Wang : *Solutions to Nonlinear Elliptic Equations with a Nonlocal Boundary Condition*, E. J. D. E. (2002), N°05, 1-16.

Merci de votre attention