Permanence et extinction pour un modèle proie-prédateur avec terme de diffusion

(in french)

Permanence et extinction pour un modèle proie-prédateur avec terme de diffusion

M. A. Aziz-Alaoui* et M. O. Daher*

Résumé. Un modèle proie-prédateur à deux espèces, incorporant une réponse fonctionnelle de type Holling-Tanner, avec termes de diffusion et des conditions aux bords générales, est étudié. Nous rappelons d'abord quelques notions sur les problèmes paraboliques-périodiques, puis introduisons des critères pour la permanence (persistance uniforme et dissipativité) et l'extinction du prédateur.

Mots clés. Predator-prey, Holling-Tanner, Leslie-Gower, Permanence, stability

1. Introduction et Présentation du Modèle

Dans [2], le modèle temporel de l'interaction entre une proie X d'un prédateur Y a été étudié, voir aussi [1] :

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dT} &= (r_1 - b_1 X - \dfrac{a_1 Y}{X+k_1})X \\ \dfrac{dY}{dT} &= (r_2 - \dfrac{a_2 Y}{X+k_2})Y, \end{cases} \tag{1.1}$$

avec $X(0) \geqslant 0$ et $Y(0) \geqslant 0$, où X et Y représentent les densités des populations au temps T ; r_1, a_1, b_1, k_1, r_2, a_2 et k_2 sont les paramètres du modèle et ne prennent que des valeurs strictement positives. Ces paramètres sont définis de la manière suivante : r_1 est le taux de croissance de la proie X, b_1 mesure la mortalité due à la compétition entre les individus de l'espèce X, a_1 est la valeur maximale que le taux de réduction par individu X peut atteindre, k_1 (respect. k_2) mesure la protection dont la proie X (resp. le prédateur Y) bénéficie grâce à l'environnement, r_2 décrit le taux de croissance de Y, et a_2 est la valeur maximale que le taux de réduction par individu Y peut atteindre. Sous les transformations : $t = r_1 T$, $x(t) = \frac{b_1}{r_1}X(T)$ et $y(t) = \frac{a_2 b_1}{r_1 r_2}Y(t)$, le système (1.1) s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{dx(s)}{dt} = x(1-x) - \dfrac{axy}{x+e_1} \\ \dfrac{dy(s)}{dt} = by(1 - \dfrac{y}{x+e_2}), \end{cases} \tag{1.2}$$

où $a = \frac{a_1 r_2}{a_2 r_1}$, $b = \frac{r_2}{r_1}$, $e_1 = \frac{b_1 k_1}{r_1}$ et $e_2 = \frac{b_1 k_2}{r_1}$. Ici $s \in \Omega \subset \mathbb{R}$ et $t \in (0, \infty)$. Dans la suite, nous prendrons en compte la dimension spatiale en

*,‡Laboratoire de Mathématiques Appliquées du Havre, Université du Havre.
aziz.alaoui@univ-lehavre.fr

supposant que la population des proies et celle des prédateurs, du systeme (1.2), peuvent mouvoir dans un ensemble Ω borné de $\mathbb{R}^n$. Afin de tenir compte du comportement spatial, nous ajoutons des termes de diffusion, avec des conditions aux bords générales. D'où le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x(s,t)}{\partial t} = d_1\nabla^2 x + x(1-x) - \dfrac{axy}{x+e_1} & \text{dans} \quad \Omega\times(0,\infty) \\ \dfrac{\partial y(s,t)}{\partial t} = d_2\nabla^2 y + by(1-\dfrac{y}{x+e_2}) & \text{dans} \quad \Omega\times(0,\infty) \\ \beta x + (1-\beta)\dfrac{\partial x}{\partial n} = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega\times(0,\infty) \\ \gamma y + (1-\gamma)\dfrac{\partial y}{\partial n} = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega\times(0,\infty), \\ x(s,0) = x_0(s), \qquad y(s,0) = y_0(s), & s\in\Omega\subset\mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{1.3}$$

où x, y T-périodique, $d_1, d_2 > 0$ sont les paramètres de diffusion, $\beta,\gamma\in[0,1]$, ∇^2 est le laplacien. On note $\dfrac{\partial U}{\partial n} = \nabla U\cdot n$ la dérivée normale sur $\partial\Omega$. Enfin, les données initiales x_0, y_0 sont des fontions positives. La valeur β (resp. γ) représente l'équilibre entre la tendance de la proie (resp. du prédateur) à rester dans son domaine à l'approche de la frontière et sa tendance à disparaître au-delà de la frontière. De plus, nous supposons que les données dépendent périodiquement du temps t (variation journalière, mensuelle, saisonnière).

Si $\beta=\gamma=0$, nous retrouvons les conditions aux bords de Neumann qui signifient que les espèces ne sortent pas de leur lieu de localisation (complètement sécurisé ou isolé) et ne traversent pas la frontière. Dans ce cas il n'y a aucune diffusion le long des frontières, et toute solution du système sans diffusion est solution du système avec diffusion.

Si $\beta=\gamma=1$, ce sont les conditions aux bords de Dirichlet qui signifient que la région Ω est entourée d'un environnement totalement hostile pour les espèces.

Ce modèle, avec conditions aux bords de Neumann, a été abordé, par exemple, pour l'étude de la dynamique asymptotique et celle de la stabilité globale du point d'équilibre positive dans [3], et pour la question des bifurcations de Hopf et de Turing et de la formation de patterns dans [4]. D'autres auteurs ont aussi abordé ce modèle.

2. Résultats Généraux

Considérons le problème parabolique-périodique aux valeurs propres suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u + A(t)u = \lambda m(s,t)u & \text{dans} \quad \Omega \\ \beta\Phi + (1-\beta)\dfrac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

où $m\in\left\{w\in C^{\theta,\frac{\theta}{2}}(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}) : w \ T\text{-périodique en } t,\ \theta>1\right\}$, et

$A(t)u = -\sum_{i,k=1}^{2} a_{jk}(s,t)\partial_j\partial_k u + \sum_{j=1}^{2} a_j(s,t)\partial_j u + a_0(s,t)u$, $a_0\geqslant 0$ sur $\overline{\Omega}\times\mathbb{R}$.

Posons :

$$P(m) = \int_0^T \max_{s\in\overline{\Omega}} m(s,t)dt \qquad \text{et} \qquad N(m) = \int_0^T \min_{s\in\overline{\Omega}} m(s,t)dt.$$

Nous rappelons qu'une valeur propre principale est une valeur propre associée à une fonction propre positive. Le théorème suivant nous permet d'établir l'existence et l'unicité de la valeur propre principale de (2.1).

Théorème 2.1. ([8])
Le problème (2.1) a une valeur propre principale positive $\lambda_1(m)$ si et seulement si $P(m)>0$. Si $P(m)>0$ alors $\lambda_1(m)$ est l'unique valeur propre positive ayant une fonction propre positive.

A l'aide du lemme suivant, nous montrerons l'existence et l'unicité des valeurs propres principales du problème parabolique-périodique (1.3) d'une part et d'autre part l'unicité et la globale attractivité du point d'équilibre positif.

Lemme 2.2. ([7])
Si $m(s)$ est continue et positive sur un sous-ensemble ouvert de Ω, alors le problème aux valeurs propres :

$$\begin{cases} \nabla^2\Phi + \lambda m(s)\Phi = 0 & \text{dans} \quad \Omega \\ \beta\Phi + (1-\beta)\dfrac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{2.2}$$

admet une unique valeur propre principale positive $\lambda_1^+(m,\beta)$ qui admet une fonction propre positive. Le problème aux valeurs propres :

$$\begin{cases} d\nabla^2\Psi + m(s)\Psi = \sigma\Psi & \text{dans } \Omega \\ \beta\Psi + (1-\beta)\dfrac{\partial\Psi}{\partial n} = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{2.3}$$

admet une unique valeur propre principale $\sigma_1(d,m,\beta)$ qui admet une fonction propre positive. Et on a $\sigma_1(d,m,\beta)>0 \Leftrightarrow d\lambda_1^+(m,\beta)<1$.

Preuve. L'existence et l'unicité de la valeur propre principale sont établies par le Théorème 2.1. En ce qui concerne l'équivalence, on a :

$$d\nabla^2\Psi + m(s)\Psi = \sigma_1\Psi \Leftrightarrow d\nabla^2\Psi + (m(s)-\sigma_1)\Psi = 0$$
$$\Leftrightarrow \nabla^2\Psi + \frac{1}{d}(m(s)-\sigma_1)\Psi = 0$$

(puisque $d>0$) ; d'où $\lambda_1^+ m(s) = \frac{1}{d}(m(s)-\sigma_1) \Leftrightarrow (1-d\lambda_1^+)m(s) = \sigma_1$ et donc $\sigma_1>0 \Leftrightarrow d\lambda_1^+<1$, puisque $m(s)$ est positive.

Théorème 2.3.
L'équation logistique

$$\begin{cases} \partial_t u = d\nabla^2 u + mu - bu^2 & \text{dans} \quad \Omega\times(0,\infty) \\ \alpha v + (1-\alpha)\dfrac{\partial v}{\partial\eta} = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega\times(0,\infty) \end{cases} \tag{2.4}$$

a un unique point d'équilibre positif $\overline{u}$ qui est globalement attractif pour les solutions positives, si et seulement si $\sigma_1(d,m,\alpha) > 0$. Si $\sigma_1(d,m,\alpha) \leqslant 0$, alors toute solution positive de (2.4) tend vers zéro lorsque $t \to \infty$.

Pour avoir des résultats sur la permanence, nous avons besoin d'interpréter le modèle (1.3) comme un système semi-dynamique dans un espace approprié. Posons :

$$E_\beta = \left\{x \in C^1(\overline{\Omega}) : \beta x + (1-\beta)\frac{\partial x}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\right\}$$

$$E_\beta^+ = \begin{cases} \left\{x \in E_\beta ; x > 0 \text{ dans } \overline{\Omega}\right\}, & \text{si } \beta < 1 \\ \left\{x \in E_\beta ; x > 0 \text{ dans } \overline{\Omega} \text{ et } \dfrac{\partial x}{\partial n} < 0 \text{ sur } \partial\Omega\right\}, & \text{si } \beta = 1 \end{cases}$$

$$F_0 = E_\beta^+ \times E_\gamma^+, F = F_0 \cup \partial F_0 \subseteq [C^1(\overline{\Omega})]^2.$$

3. Permanence et Extinction du Prédateur

Nous définirons les conditions sous lesquelles la coexistence entre la proie x et le prédateur y est possible, et nous étudierons l'extinction du prédateur. Pour les systèmes semi-dynamiques, on définit la persistance et la permanence de la même manière que dans les systèmes dynamiques.

Définition 3.1.

(i) Un système dynamique ou semi-dynamique est dit dissipatif s'il existe un ensemble borné $E_0 \subseteq \Omega$ tel que, pour toute trajectoire $y(t)$, $y(t) \in E_0$ pour tout t suffisament grand.

(ii) Un système est dit uniformément persistant s'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $U = (x_1(t), ..., x_n(t))^t \in \Omega$, on ait : $\liminf x_i(t) \geqslant \delta$ lorsque $t \to +\infty$.

(iii) Un système est dit permanent s'il est dissipatif et uniformément persistant.

Pour alléger l'écriture, nous allons écrire les deux premières équations de (1.3) sous la forme

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t} = d_1\nabla^2 x + x f_1(s,x,y) \\ \dfrac{\partial y}{\partial t} = d_2\nabla^2 y + y f_2(s,x,y) \end{cases}$$

où
$$f_1(s,x,y) = 1 - x - \frac{ay}{x+e_1} \quad \text{et} \quad f_2(s,x,y) = b - \frac{by}{x+e_2}.$$

A partir du système (1.3), il existe deux fonctions lipschitziennes $F_1(x)$ et $F_2(y,M)$, $M>0$, telles que pour tout $x \geqslant 0$

$$\sup\{f_1(s,x,y) : s \in \overline{\Omega}, y \geqslant 0\} \leqslant F_1(x) \tag{3.1}$$

et

$$F_1(x) < 0 \qquad \text{si } x > 1; \tag{3.2}$$

$$\sup\{f_2(s,x,y) : s \in \overline{\Omega}, 0 \leqslant x \leqslant M\} \leqslant F_2(y,M) \tag{3.3}$$

pour tout $y \geqslant 0$, et il existe une constante $M_2(M)$ $(= M + e_2)$ telle que,

$$F_2(y,M) < 0 \qquad \text{si } y > M_2(M) \tag{3.4}$$

données par,
$$F_1(x) = 1 - x \quad \text{et} \quad F_2(y,M) = b - \frac{by}{M+e_2}.$$

Sous ces conditions, l'existence des solutions strictement positives de (1.3) pour tout $t > 0$ est assurée.

Lemme 3.2.
Si (x,y) est une solution de (1.3) pour $t \in (0,T]$, de condition initiale strictement positive, alors $0 \leqslant x \leqslant z$ sur $(0,T]$ où z vérifie :

$$\frac{dz}{dt} = zF_1(z), \; z(0) = z_0 \geqslant \sup\{x(s,0) : s \in \overline{\Omega}\}. \tag{3.5}$$

Si $M_1 > 1$ et (x,y) est une solution de (1.3) pour tout $t > 0$, alors $x \leqslant M_1$ pour t suffisamment grand, et si $x(s,0) \leqslant M_1$, alors $x \leqslant M_1$ pour tout $t > 0$. Si $M_3 > M_2(M_1)$, alors $y \leqslant M_3$ pour t suffisamment grand, et si $x(s,0) \leqslant M_1$ et $y(s,0) \leqslant M_3$, alors $y \leqslant M_3$ pour tout $t > 0$.

Preuve. Rappelons que nous considérons $x, y \geqslant 0$ sur $(0,T]$. L'inégalité (3.1) implique que

$$0 = \frac{\partial x}{\partial t} - d_1\nabla^2 x - x f_1(s,x,y) \geqslant \frac{\partial x}{\partial t} - d_1\nabla^2 x - xF_1(x).$$

Ainsi, x est une sous-solution et z une solution du problème :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - d_1\nabla^2 u - uF_1(u) = 0$$

On a $x \leqslant z$ sur Ω pour $t \in (0,T]$.

A partir de (3.2) et de la forme de (3.5), l'intervalle $[0,1]$ est invariant et est un attracteur global pour toutes les solutions strictement positives de (3.5). Toute solution z de (3.5) est une solution globale et $z < M_1$, pour t suffisamment grand. Si (x,y) est une solution globale de (1.3), alors $x \leqslant z < M_1$ pour t suffisamment grand. Si $x(s,0) \leqslant M_1$, on peut comparer x avec la solution de (3.5) avec $z(0) = M_1$ et donc $x \leqslant M_1$, pour tout $t > 0$.

Montrons maintenant la dernière partie de ce lemme. Si (x,y) est une solution de (1.3) sur $(0,T]$, alors, d'après ce qui précède, il existe une constante M telle que $x \leqslant M$. Et on peut comparer y avec la solution de

$$\frac{dz}{dt} = zF_2(z,M), \; z(0) = z_0 \geqslant \sup\{y(s,0) : s \in \overline{\Omega}\} \tag{3.6}$$

et on a $y(x,t) \leqslant z(t)$ sur $(0,T]$. Grâce à (3.4), toute solution strictement positive de (3.6) est globale en t, $\sup\{z(t) : 0 \leqslant t \leqslant T\}$ est fini, et donc y est bornée sur $(0,T]$. Puisque la solution de (1.3) est bornée sur tout intervalle fini en t, elle existe globalement. On a montré que $x \leqslant M_1$ pour t suffisamment grand. Soit t_0 tel que $x(s,t_0) \leqslant M_1$ pour tout s$\in \overline{\Omega}$, soit z une solution de (3.6) avec $M = M_1$ et $z(t_0) \geqslant \sup\{y(s,t_0) : s \in \overline{\Omega}\}$. On a encore $y \leqslant z$ pour $t > t_0$, et l'intervalle $[0, M_2(M_1)]$ est un attracteur global pour les solutions strictement positives de (3.6) avec $M = M_1$, donc si $M_3 > M_2(M_1)$ on a $y \leqslant M_3$ pour t suffisamment grand. Si $x(s,0) \leqslant M_1$, alors on a $x \leqslant M_1$ pour tout $t > 0$, et on peut comparer y avec la solution de (3.6) avec $z(0) = M_3$ et on conclut $y \leqslant z \leqslant M_3$ pour tout $t > 0$.

Les deux corollaires suivants, obtenus grâce au Théorème 2.3, seront utiles pour la preuve de la permanence du modèle et de l'extinction du prédateur :

Corollaire 3.3.
Le problème :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x(s,t)}{\partial t} = d_1 \nabla^2 x + (1-x)x & \text{dans} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ \beta x + (1-\beta)\dfrac{\partial x}{\partial n} = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \times (0,\infty) \end{cases} \tag{3.7}$$

possède un unique point d'équilibre positif $\overline{x}$ qui est globalement attractif pour les solutions positives, si et seulement si $d_1\lambda_1^+(1,\beta) < 1$ ($\Leftrightarrow \sigma_1(d_1,1,\beta) > 0$). Si $d_1\lambda_1^+(1,\beta) \geqslant 1$, alors toute solution positive de (3.7) tend vers zéro lorsque $t \to \infty$.

Corollaire 3.4.
Le problème :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y(s,t)}{\partial t} = d_2 \nabla^2 y + (b - \dfrac{by}{M+e_2})y & \text{dans} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ \gamma y + (1-\gamma)\dfrac{\partial y}{\partial n} = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \times (0,\infty) \end{cases} \tag{3.8}$$

a un unique point d'équilibre positif $\overline{y}$ qui est globalement attractif pour les solutions positives, si et seulement si $d_2\lambda_1^+(b,\gamma) < 1$ ($\Leftrightarrow \sigma_1(d_2,b,\gamma) > 0$).
Si $d_2\lambda_1^+(b,\gamma) \geqslant 1$, alors toute solution positive de (3.8) tend vers zéro lorsque $t \to \infty$.

Pour établir la permanence nous utiliserons le Théorème suivant, en rappelant d'abord la définition d'ensemble acyclique ou isolé :

Définition 3.5.
L'ensemble ω-limit $\omega(\partial F_0)$ est dit isolé s'il possède un recouvrement $M = \cup_{k=1}^N M_k$ d'ensembles disjoints M_k qui sont isolés et invariants.
L'ensemble $\omega(\partial F_0)$ est dit acyclique s'il existe un recouvrement isolé $\cup_{k=1}^N M_k$ pour lequel aucun ensemble de $\{M_k\}$ n'est un cycle.

Théorème 3.6.
Supposons qu'un semi-flot sur F rende F_0 et ∂F_0 invariants, soit borné dans F pour $t > 0$ et qu'il soit dissipatif. Si de plus :

(i) $\omega(\partial F_0)$ est isolé et acyclique,

(ii) $W^s(M_k) \cap F_0 = \emptyset$ pour tout k, où $\cup_{k=1}^N M_k$ est le recouvrement isolé utilisé dans la définition d'acyclicité de ∂F_0.

Alors le semi-flot est permanent.

Théorème 3.7.
(a) Le système (1.3) génère un semi-flot dissipatif sur F pour lequel F_0 et ∂F_0 sont invariants pour t suffisamment grand.
(b) Si $d_1\lambda_1^+(1,\beta) \geqslant 1$($\Leftrightarrow \sigma_1(d_1,1,\beta) \leqslant 0$) , alors le système (1.3) n'est pas permanent.
(c) Si $d_1\lambda_1^+(1,\beta) < 1$($\Leftrightarrow \sigma_1(d_1,1,\beta) > 0$), alors le système est permanent si et seulement si $\sigma_1(d_2,b,\gamma) > 0$.

Preuve. a) Pour la dissipativité et le fait que F_0 et ∂F_0 soient invariants pour t suffisamment grand voir le lemme 3.2.

b) Supposons $d_1\lambda_1^+(1,\beta) \geqslant 1$. Soit (x,y) est une solution de (1.3) avec $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, alors x est une sous-solution du système (3.7). Donc si $\overline{x}$ est une solution de (3.7) avec $\overline{x}(s,0) = x(s,0)$, on a $0 \leqslant x \leqslant \overline{x}$ pour tout $t \geqslant 0$.

Cependant, à partir du corollaire 3.3 si $d_1\lambda_1^+(1,\beta) \geqslant 1$ alors $\overline{x} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$, donc $x \underset{t\to+\infty}{\to} 0$, et par conséquent le système (1.3) n'est pas permanent.

c) Supposons $d_1\lambda_1^+(1,\beta) < 1$.

i) Supposons que $\sigma_1(d_2,b,\gamma) > 0$ et montrons que le système (1.3) est permanent. Pour cela nous allons montrer que l'ensemble ω − limit, $\omega(\partial F_0)$, est isolé et acyclique. Toute solution de (1.3) dans ∂F_0 est de la forme $(x,0)$ ou $(0,y)$. Grâce aux corollaires 3.3 et 3.4, les solutions de la forme $(x,0)$ tendent vers $(\overline{x},0)$ lorsque $t \to +\infty$ et les solutions de la forme $(0,y)$ tendent vers $(0,\overline{y})$ lorsque $t \to +\infty$. Donc l'ensemble ω-limit de ∂F_0, $\omega(\partial F_0) = \{(\overline{x},0)\} \cup \{(0,\overline{y})\}$. Par ailleurs, puisque F_0 et ∂F_0 sont invariants pour t assez grand, les variétés stables de $(\overline{x},0)$ et les variétés stables de $(\overline{y},0)$ ne peuvent entrer dans F_0. Donc $\omega(\partial F_0)$ est isolé et acyclique et par conséquent le système (1.3) est permanent, grâce au Théorème 3.6.

ii) Supposons que le système (1.3) est permanent et montrons qu'alors $\sigma_1(d_2,b,\gamma) > 0$. Si le système (1.3) est permanent, alors il possède un point d'équilibre srictement positif (x^*,y^*). L'équation en y^* s'écrit :

$$\begin{cases} d_2\nabla^2 y^* + y^*(b - \dfrac{by^*}{x^*+e_2}) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \\ \gamma y^* + (1-\gamma)\dfrac{\partial y^*}{\partial n} = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

La valeur propre principale associée à $y^* > 0$ dans Ω, est :

$$\sigma_1(d_2, b - \frac{by^*}{x^*+e_2}, \gamma) = 0.$$

Comme $b - \dfrac{by^*}{x^*+e_2} < b$, la monotonie des valeurs propres implique :

$$0 = \sigma_1(d_2, b - \frac{by^*}{x^* + e_2}, \gamma) < \sigma_1(d_2, b, \gamma).$$

Donc la permanence implique $\sigma_1(d_2, b, \gamma) > 0$.

Extinction du prédateur.

La proposition suivante donne une condition suffisante pour l'extinction du prédateur :

PROPOSITION 3.8.
Si $\sigma_1(d_2, b, \gamma) \leqslant 0$, alors $y \to 0$ lorsque $t \to +\infty$, (c'est à dire qu'il y a extinction du prédateur).

Preuve. Soit (x, y) une solution de (1.3) ; alors y est une sous-solution de (3.8). Soit $\tilde{y}$ une solution de (3.8) avec $\tilde{y}(s, 0) = y(s, 0)$. Puisque $\overline{y}$ est l'unique solution positive de (3.8), $\tilde{y} = \overline{y}$ et donc $y < \overline{y}$ dans Ω. Or, par le corollaire 3.4, si $\sigma_1(d_2, b, \gamma) \leqslant 0$ ($\Leftrightarrow d_2\lambda_1^+(b, \gamma) \geqslant 1$), alors toute solution de (3.7) tend vers zéro lorsque $t \to +\infty$. Donc $y \to 0$ lorsque $t \to +\infty$ et le prédateur s'éteint pour t suffisamment grand.

Bibliographie

[1] M. A. AZIZ-ALAOUI, Study of a Leslie-Gower-type tritrophic population model, Chaos, Solitons and Fractals, 14, 1275-1293 (2002).

[2] M. A. AZIZ-ALAOUI et M. DAHER OKIYE, Boudedness and global stability for a predator-prey model with modified Leslie-Gower and Holling type II schemes, Applied Math. Lets., pp. 1069-1075 (2003).

[3] B. I. CAMARA et M. A. AZIZ-ALAOUI, Dynamics of a Predator-prey model with diffusion, Discrete and Impulsive Systems, Series A : Mathematical Analysis, Vol. 15, pp. 897-906 (2008).

[4] B. I. CAMARA et M. A. AZIZ-ALAOUI, Turing and Hopf Patterns Formation in a Predator-Prey Model with Leslie-Gower-Type Functional Response, Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems-B, Vol. 16(4), pp. 479-488 (2009)

[5] R. S CANTRELL, C. COSNER, Diffusion models for population dynamics incorporating individual behavior at boundaries : Applications to refuge design, Theoretical Pop. Biology 55, 189-207 (1999).

[6] R. S CANTRELL, C. COSNER, On the dynamics of predator-prey models with the Beddington-DeAngelis functional response, Journal of Math. Analysis and Appl. 257, 206-222 (2001).

[7] M. O DAHER, Etude et analyse asymptotique de certains systèmes dynamiques non-linéaires : application à des problèmes proie-prédateurs, Thèse de doctorat, Université du Havre, 2004.

[8] P. HESS, Periodic-parabolic boundary value problems and positivity, Pitman Research Notes in Mathematics Series, 247 (1991).