



# Bifurcation de Hopf dans un système de Réaction-Diffusion issu des neurosciences

Benjamin Ambrosio\*

**Résumé.** On s'intéresse à un système d'EDP de type réaction-diffusion permettant d'obtenir une riche variété de motifs (patterns) et phénomènes pertinents en physiologie : spirales, oscillations en mode mixte (mixed mode oscillations), propagation d'oscillations en salves. Ce système est basé sur un modèle d'EDO classique de FitzHugh-Nagumo, qui présente une bifurcation de Hopf lorsqu'on fait varier un paramètre. En ajoutant un terme diffusif on obtient un système d'EDP de type réaction-diffusion pour laquelle la bifurcation de Hopf semble persister. On présente ici la démonstration de l'existence de la bifurcation de Hopf dans le cas où la dimension de l'espace est égale à un.

**Mots-clés.** Système de Réaction-Diffusion, EDO de FitzHugh-Nagumo, Bifurcation de Hopf.

## 1. Introduction

Le système d'équations aux dérivées partielles de type FitzHugh-Nagumo :

$$\begin{cases} \epsilon u_t = f(u) - v + d_u \Delta u \\ v_t = u - c(x) - \delta v + d_v \Delta v \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $f(u) = -u^3 + 3u$ ,  $\epsilon > 0$  petit,  $\delta \geq 0$ ,  $c(x)$  fonction régulière,  $d_u \geq 0$ ,  $d_v \geq 0$ ,  $d_u d_v \neq 0$ , et avec conditions au bord de Neuman sur un ouvert borné régulier  $\Omega$ , permet d'obtenir une riche variété de motifs (patterns) et phénomènes pertinents en physiologie : spirales, oscillations en mode mixte (mixed mode oscillations), propagation d'oscillations en salves. On s'intéresse ici plus particulièrement au cas où  $\delta = d_v = 0$  et dans le cas où la dimension d'espace est égale à 1, c'est-à-dire qu'on considère le système :

$$\begin{cases} \epsilon u_t = f(u) - v + d_u u_{xx} \\ v_t = u - c(x) \end{cases} \quad (1.2)$$

sur un intervalle  $\Omega = ]a, b[$  et avec conditions aux bords de Neumann. Pour comprendre le comportement qualitatif de l'EDP, il est nécessaire de connaître le comportement de l'EDO sous-jacente :

$$\begin{cases} \epsilon u_t = f(u) - v \\ v_t = u - c \end{cases} \quad (1.3)$$

---

\* Fédération Normandie-Mathématiques, Université du Havre, LMAH.  
benjamin.ambrosio@univ-lehavre.fr

La dynamique du système selon la valeur de  $c$  est la suivante : si  $|c| \geq 1$  l'unique point stationnaire est attractif tandis que si  $|c| < 1$  le point stationnaire est répulsif et il existe un cycle limite attirant toutes les trajectoires, voir figure 1.

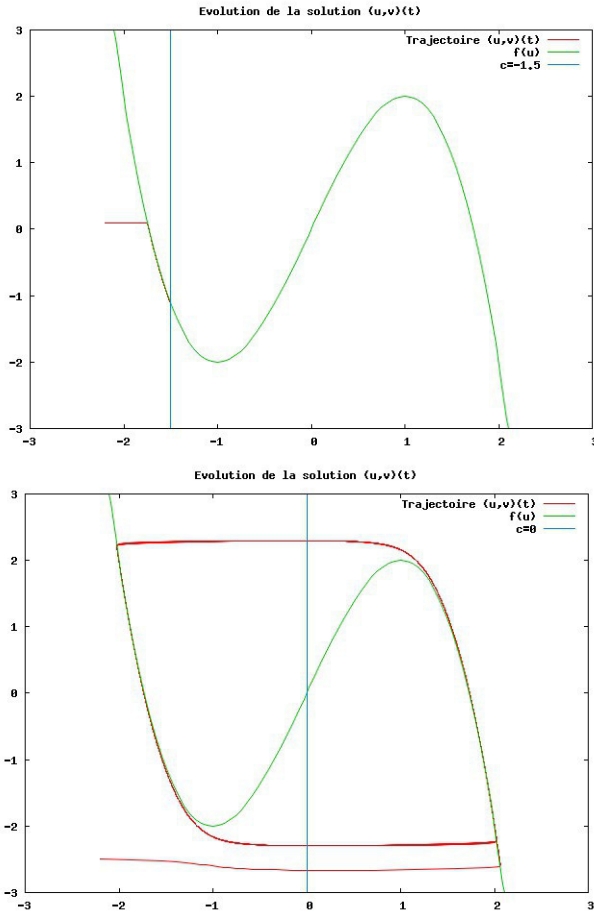


Fig. 1.1. Solutions du système d'EDO.

## 2. Analyse mathématique

Dans cette partie, on suppose  $a < 0 < b = -a$  et que  $c(x)$  est une fonction régulière dépendant d'un paramètre positif  $p$ , vérifiant :

- $c \leq 0$  sur  $[a, b]$ ,
- $c(0) = 0$ ,
- $c' \geq 0$  sur  $]a, 0[$ ,  $c' \leq 0$  sur  $]0, b[$ ,

- $c'(a) = c'(b) = 0$ ,
- pour tout  $x \in [a, b], x \neq 0, \lim_{p \rightarrow +\infty} c(x) = -\infty$ ,
- pour tout  $x \in [a, b], \lim_{p \rightarrow 0} c(x) = 0$ .

De manière analogue, à la dimension finie, on peut effectuer une analyse locale autour des points stationnaires et procéder à l'étude des bifurcations dans le cas des EDP de réaction-diffusion. Pour une présentation générale, on peut par exemple consulter [1], [2], [3]. L'analyse de stabilité et de bifurcation de systèmes de FitzHugh-Nagumo ou à non linéarité cubique n'est pas nouvelle, voir [4],[7], [6], [5]. Cependant, l'approche considérée ici avec un paramètre de bifurcation portant sur la non homogénéité spatiale inspirée du système de Van Der Pol et permettant une analogie avec les systèmes biologiques excitables (voir [8] semble nouvelle. On présente ici la démonstration de l'existence de la bifurcation de Hopf pour le système (1.2). Pour une étude plus détaillée de la variété centrale et la direction de la bifurcation on pourra consulter [9]. Les solutions stationnaires du système (1.2) sont :

$$\begin{cases} \bar{v} = f(\bar{u}) + d_u \bar{u}_{xx} \\ \bar{u} = c(x) \end{cases} \tag{2.1}$$

Pour étudier la stabilité de la solution stationnaire, on va considérer le système linéarisé autour de  $(\bar{u}, \bar{v})$  :

$$\begin{cases} \epsilon u_t = f'(\bar{u})u - v + du_{xx} \\ v_t = u \end{cases} \tag{2.2}$$

On procède donc à l'analyse spectrale de l'opérateur  $\mathcal{F}$  de domaine  $\mathcal{D}(\mathcal{F})\{u, v \in C^2([a, b]); u'(a) = u'(b) = 0\}$ , défini par :

$$\mathcal{F}(u, v) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon}(f'(\bar{u})u - v + du_{xx}) \\ u \end{cases}$$

Ce qui conduit à chercher les fonctions propres  $u, v$  et les valeurs propres  $\lambda$  vérifiant :

$$\begin{cases} \frac{1}{\epsilon}(f'(\bar{u})u - v + du_{xx}) = \lambda u \\ u = \lambda v \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} f'(\bar{u})u - \frac{u}{\lambda} + du_{xx} = \lambda \epsilon u \\ v = \frac{u}{\lambda} \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{cases} -du_{xx} - f'(\bar{u})u = -\left(\frac{1}{\lambda} + \lambda \epsilon\right)u \\ v = \frac{u}{\lambda} \end{cases}$$

En posant :

$$\nu = -\left(\frac{1}{\lambda} + \lambda \epsilon\right),$$

la première équation se réécrit :

$$-du_{xx} - f'(\bar{u})u = \nu u. \quad (2.3)$$

et on a :

$$\lambda_{-}^{+} = \frac{-\nu_{-}^{+} \sqrt{\nu_{-}^{+2} - 4\epsilon}}{2\epsilon}.$$

On a alors le théorème suivant (voir par exemple [10], [11]) :

THÉORÈME 2.1.

*Il existe une suite croissante de réels  $\nu_n$  et une base hilbertienne  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $L^2(\Omega)$  telle que :*

$$\begin{aligned} -du_{nxx} - f'(\bar{u})u_n &= \nu_n u_n \\ u'(a) = u'(b) &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Par ailleurs,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \nu_n = +\infty.$$

Enfin :

$$\nu_0 = \inf_{u: \|u\|_{L^2} = 1} d \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} f'(\bar{u})u^2 dx. \quad (2.5)$$

On en déduit la proposition suivante :

PROPOSITION 2.2.

*On suppose que :*

$$\int_{\Omega} f'(\bar{u})dx > 0 \quad (2.6)$$

*alors la solution stationnaire est instable.*

**Preuve.** Il suffit de choisir  $u = \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}}$ . On a alors

$$\nu_0 \leq - \int_{\Omega} f'(\bar{u})u^2 dx < 0 \quad \text{et} \quad \lambda_0^{\pm} = \frac{-\nu_0^{\pm} \sqrt{\nu_0^{\pm 2} - 4\epsilon}}{2\epsilon}$$

est de partie réelle strictement positive.

Dans l'équation (2.3) :

$$-du_{xx} - (\nu + f'(\bar{u}))u = 0,$$

on effectue le changement de variable :

$$u = r \sin \theta, u_x = r \cos \theta. \quad (2.7)$$

On obtient :

$$\theta_x = g(\theta) = \cos^2 \theta + \frac{f'(\bar{u}) + \nu}{d} \sin^2 \theta \quad (2.8)$$

$$r_x = \frac{\sin 2\theta}{2} \left( 1 + \frac{\nu + f'(\bar{u})}{d} \right) r \quad (2.9)$$

L'équation (2.8) ne dépend que de  $\theta$ . Connaissant  $\theta$  l'équation (2.9) donne :

$$r(x) = r(a) \exp \int_a^x \frac{\sin(2y)}{2} \left( 1 + \frac{\nu + f'(\bar{u}(y))}{d} \right) dy.$$

On s'intéresse maintenant aux solutions de l'équation (2.8). Puisque  $u$  vérifie les conditions aux bords de Neumann on s'intéresse aux solutions vérifiant  $\theta(a) = \frac{\pi}{2}$  et  $\theta(b) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ . Dans un premier temps, on s'intéresse aux solutions de (2.8) vérifiant  $\theta(a) = \frac{\pi}{2}$ . C'est alors un problème de Cauchy bien posé.

On peut démontrer la proposition suivante (voir [11]) :

PROPOSITION 2.3.

*La fonction  $\theta$  est strictement positive sur  $]a, b[$ . Pour tout  $x \in ]a, b[$ , la fonction  $\theta(x)$  est croissante par rapport à  $\nu$  et on a :*

$$\lim_{\nu \rightarrow -\infty} \theta(x) = 0, \quad \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \theta(x) = +\infty.$$

THÉORÈME 2.4.

*Pour  $p$  assez petit, la solution stationnaire est instable. Pour  $p$  assez grand elle est asymptotiquement stable. Il existe une valeur de  $p_0$  pour laquelle on a une bifurcation de Hopf : lorsque  $p$  traverse la valeur  $p_0$  de droite à gauche la partie réelle d'un couple de valeurs propres complexes conjuguées passe d'une valeur strictement négative à strictement positive. Les autres valeurs propres restent toutes de parties réelles négatives dans un voisinage de 0.*

**Preuve.** On va montrer en deux étapes que la plus petite valeur propre  $\nu_0$  est strictement croissante par rapport à  $p$  et qu'elle traverse la valeur 0. On montre que :

1. pour  $p$  assez grand  $\nu_0 > 0$ , pour  $p$  assez petit  $\nu_0 < 0$ .
2.  $\nu_0$  est une fonction strictement croissante de  $p$ .

On commence par le premier point.

Pour  $p$  assez petit,  $f'(\bar{u}(x)) > 0$  sur  $[a, b]$  et la proposition 2.2 permet de conclure que dans ce cas  $\nu_0 < 0$ . On s'intéresse maintenant à l'équation (2.8), avec :

$$\theta(a) = \frac{\pi}{2}, \quad \nu = 0.$$

On montre alors que pour  $p$  assez petit :  $\theta(b) < \frac{\pi}{2}$ . Du fait de la croissance de  $\theta$  par rapport à  $\nu$  cela montre que  $\nu_0 > 0$ . Pour montrer cela, on construit une sursolution de l'équation (2.8) vérifiant :  $\theta(b) < \frac{\pi}{2}$ . On pose :

$$w(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \alpha(x - a) & \text{si } x \in ]a, -\epsilon_1[ \\ \frac{\pi}{2} - \alpha(-\epsilon_1 - a) + \left(1 + \frac{3}{d}\right)(x + \epsilon_1) & \text{si } x \in ]-\epsilon_1, \epsilon_1[ \\ \frac{\pi}{2} - \alpha(-\epsilon_1 - a) + \left(1 + \frac{3}{d}\right)2\epsilon_1 - \alpha(x - \epsilon_1) & \text{si } x \in ]\epsilon_1, b[ \end{cases}$$

C'est-à-dire que  $w$  est une fonction continue affine par morceaux.

On choisit, par ailleurs  $\alpha$  et  $\epsilon_1$  vérifiant :

$$\frac{\pi}{2} - \alpha(b-a) > 0, \quad \text{c'est-à-dire : } \alpha < \frac{\pi}{2(b-a)}.$$

Ceci assure que  $w$  reste strictement positive sur  $[a, b]$ . Et :

$$-\alpha(-\epsilon_1 - a) + (1 + \frac{3}{d})(2\epsilon_1) < 0, \quad \text{c'est-à-dire : } \alpha > (1 + \frac{3}{d})\frac{2\epsilon_1}{-\epsilon_1 - a}.$$

Ceci est toujours possible dès que  $\epsilon_1$  est assez petit et assure que  $w(x) < \frac{\pi}{2}$  sur  $]a, b[$ .

Ensuite, on change un peu la fonction  $w$  de manière à la rendre  $C^1$ , on pose :

$$\begin{aligned} \tilde{w}(a) &= w(a) \\ \tilde{w}'(x) &= w(x) \text{ sur } [a, -\epsilon_1[ \cup [-\epsilon_2, \epsilon_2] \cup [\epsilon_1, b], \epsilon_2 < \epsilon_1 \\ \tilde{w}'(x) &= -\alpha + \frac{1 + \frac{3}{d} + \alpha}{-\epsilon_2 + \epsilon_1}(x + \epsilon_1) \text{ sur } [-\epsilon_1, -\epsilon_2] \\ \tilde{w}'(x) &= -\alpha + \frac{1 + \frac{3}{d} + \alpha}{\epsilon_2 - \epsilon_1}(x - \epsilon_1) \text{ sur } [\epsilon_2, \epsilon_1] \end{aligned} \quad (2.10)$$

Afin d'alléger les notations, on renomme la fonction  $\tilde{w}$ ,  $w$ . Alors pour  $p$  assez petit, on a :  $w' > g(w)$ .

En effet, pour  $p$  assez petit,  $f'(\tilde{u}(x)) < 0$  sur  $[a, -\epsilon_2] \cup [\epsilon_2, b]$ . On a alors pour tout  $x \in [a, -\epsilon_2] \cup [\epsilon_2, b]$  :

$$g(w) < \cos^2(w_0) + \frac{f'(\tilde{u}(x))}{d} \sin^2(w_0).$$

On peut alors assurer pour  $p$  assez petit que :

$$\begin{aligned} g(w) &< -\alpha \leq w' \text{ sur } [a, -\epsilon_2[ \cup [\epsilon_2, b], \\ g(w) &\leq 1 + \frac{3}{d} = w' \text{ sur } [-\epsilon_2, \epsilon_2] \end{aligned} \quad (2.11)$$

Alors  $w$  est une sur-solution de (2.8) et donc  $\theta < w$ . En particulier,  $\theta(b) < w(b) < \frac{\pi}{2}$ . Ce qui montre que  $\nu_0 > 0$  et donc la plus petite partie réelle est strictement négative.

On montre maintenant que  $\nu_0$  est une fonction strictement croissante par rapport  $p$ . Pour cela, puisque  $\theta(b)$  est strictement croissante par rapport à  $\nu$ , il suffit de montrer que  $\theta(b)$  est une fonction strictement décroissante de  $p$ .

On utilise pour cela le lemme suivant :

LEMME 2.5.

*Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  localement lipchitzienne. Soit  $x(t)$  et  $y(t)$  deux fonctions dérivables telles que :*

$$x(0) \leq y(0), \quad \dot{x} - f(x) \leq \dot{y} - f(y), \quad t \in [0, T].$$

*Alors  $x(t) \leq y(t)$  pour tout  $t \in [0, T]$ . Si de plus,  $x(t) < y(t)$  pour un certain  $t$  cela reste vrai pour les temps ultérieurs.*

Soit  $p_1 > p_2$ . Soit  $\theta_1$  la solution associée à  $p_1$  et  $\theta_2$  la solution associée à  $p_2$ , on a :

$$\dot{\theta}_1 - g_1(\theta_1) = 0$$

et

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_2 - g_1(\theta_2) &= \dot{\theta}_2 - \left( \cos^2(\theta_2) + \frac{f'(\bar{u}_1) + \nu}{d} \sin^2(\theta_2) \right) \\ &= \dot{\theta}_2 - \left( \cos^2(\theta_2) + \frac{f'(\bar{u}_1) - f'(\bar{u}_2) + f'(\bar{u}_2) + \nu}{d} \sin^2(\theta_2) \right) \\ &= - \left( \frac{f'(\bar{u}_1) - f'(\bar{u}_2) + \nu}{d} \sin^2(\theta_2) \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Donc,

$$\dot{\theta}_1 - g_1(\theta_1) \leq \dot{\theta}_2 - g_2(\theta_1).$$

Par ailleurs,

$$\dot{\theta}_1(a) < \dot{\theta}_2(a)$$

donc,

$$\theta_2(x) > \theta_1(x) \text{ sur } ]a, b[.$$

On en déduit le résultat.

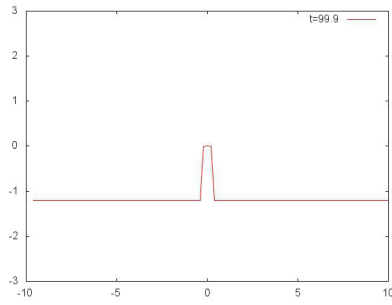
### 3. Bifurcation : simulations numériques

Pour les simulations numériques, on définit une fonction  $c(x)$  telle que :

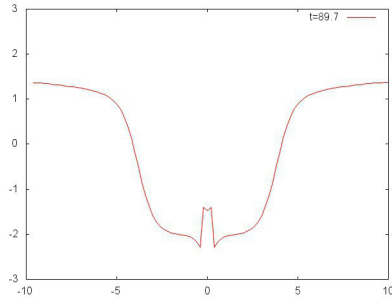
$$c(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \leq 0.2 \\ c_0 < -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

On simule alors l'équation (1.2) sur l'intervalle  $] - 10, 10[$  avec un schéma explicite de type Runge-Kutta 4, avec un pas de temps de  $10^{-5}$  et un pas d'espace égal 0.2. La valeur de  $\epsilon$  est fixée à 0.1. On obtient le comportement suivant :

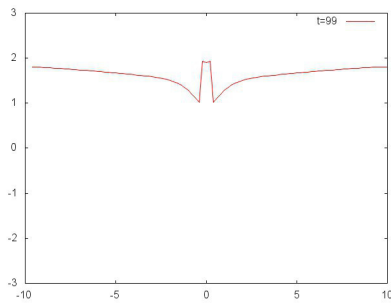
- si  $c_0 < -1$  assez petit, la solution de (1.2) converge vers une solution stationnaire. La figure 3.1a) représente la solution  $u(x, t)$  pour  $t$  fixé assez grand lorsque  $c_0 = -1.2$ . Dynamiquement cette solution n'évolue plus en temps et a atteint sa position stationnaire. La figure 3.2a) représente la solution  $u(0, t)$  pour  $t \in [500, 600]$ .
- si  $c_0 < -1$  assez proche de  $-1$  on observe des propagations d'ondes qui naissent au centre du domaine et se propagent vers le bord . La figure 3.1c) représente la solution  $u(x, t)$  pour  $t$  fixé assez grand lorsque  $c_0 = -1.01$ . La figure 3.2c) représente la solution  $u(0, t)$  pour  $t \in [500, 600]$ .
- entre ces deux valeurs de  $c_0$ , il existe une plage de paramètres pour lesquels le comportement est intermédiaire : au centre du domaine on observe des oscillations en mode mixtes, c'est-à-dire une alternance de petites oscillations et de grandes oscillations. Seules les grandes oscillations centrales vont donner naissance à des ondes qui se propagent vers le bord . La figure 3.1b) représente la solution  $u(x, t)$  pour  $t$  fixé assez grand lorsque  $c_0 = -1.12$ . La figure 3.2b) représente la solution  $u(0, t)$  pour  $t \in [500, 600]$ .



(a) Solution stationnaire :  $u(x, 599)$  pour  $c_0 = -1.2$ .



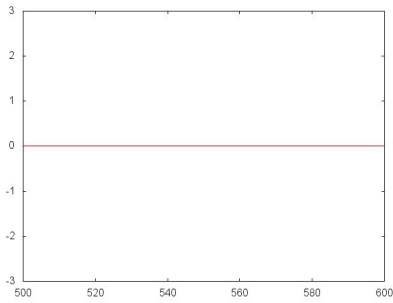
(b) Bifurcation entre solution stationnaire et propagation d'ondes :  $u(x, 589.7)$  pour  $c_0 = -1.12$ .



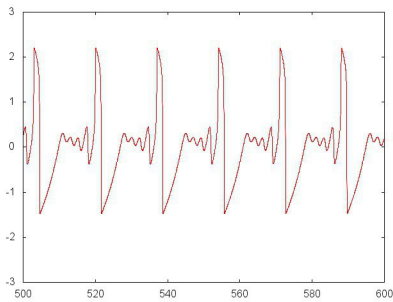
(c) Propagation d'ondes :  $u(x, 599)$  pour  $c_0 = -1.01$ .

Fig. 3.1.

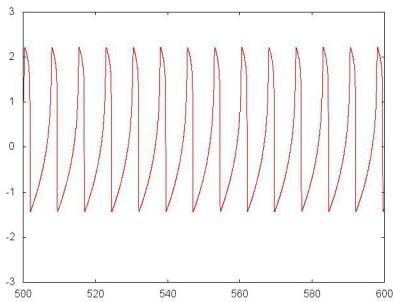




(a) Solution stationnaire :  $u(0,t)$  pour  $c_0 = -1.2$ .



(b) Bifurcation :  $u(0,t)$  pour  $c_0 = -1.12$ .



(c) Propagation d'ondes :  $u(0,t)$  pour  $c_0 = -1.01$ .

Fig. 3.2. *Bifurcation entre solution stationnaire et propagation d'ondes.*

**Bibliographie**

- [1] Y. A. KUZNETSOV, Ordinary differential equations and dynamical systems, Springer, 1998.
- [2] D. HENRY, Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Springer-Verlag, 1981.
- [3] J. SMOLLER, Shock Waves and Reaction Diffusion, Springer-Verlag, 1994.
- [4] P. FREITAS AND C. ROCHA, Lyapunov Functionals and Stability for FitzHugh-Nagumo Systems, J. Differential Equations, 2001, 169, 208-227.
- [5] F. ROTHE, Global Existence of Branches of Stationary solutions for a system of Reaction Diffusion Equations from Biology, Nonlinear Analysis, Theory Methods and Applications, 1981, 5,487-498 .
- [6] N. CHAFEE AND E. F. INFANTEE, A Bifurcation Problem for a Nonlinear Partial Differential Equation of Parabolic Type, Applicable Analysis, 1974, 4,17-37 .
- [7] J. RAUCH AND J. SMOLLER, Qualitative Theory of thr FitzHugh-Nagumo Equations from Biology, Nonlinear Analysis, Advances in Mathematics, 1978, 27,12-44.
- [8] B. AMBROSIO, Propagation d'ondes dans un milieu excitable: simulations numériques et approche analytique, Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie, 2009.
- [9] B. AMBROSIO, Hopf Bifurcation in a nonhomogeneous neuroscience reaction-diffusion model, en préparation.
- [10] D. GILBARG AND N. S. TRUDINGER, Elliptic partial differential equations of second order, Springer, 2001.
- [11] G. TESCHL, Ordinary differential equations and dynamical systems, American Mathematical Society, 2012.

# Colloque Fédération Normandie-Mathématiques

## EDP - Normandie

24 & 25 Octobre 2013

Université de Caen Basse-Normandie  
UFR de Sciences, Campus 2  
Département de Mathématiques

### COMITÉ SCIENTIFIQUE

Laurent Boudin (LJLL, Paris)  
Ionut Danaila (LMRS, Rouen)  
Thierry Goudon (INRIA, Nice)  
Rabah Labbas (LMAH, Le Havre)  
Taoufik Sassi (LMNO, Caen)

### COMITÉ D'ORGANISATION

Christian Dogbe (LMNO, Caen)  
Mohammed Louaked (LMNO, Caen)

### CONFÉRENCIERS

Chérif Amrouche (Pau)  
Nicolas Besse (Nancy)  
Vincent Calvez (Lyon)  
Maria J. Esteban (Paris)  
Jean-Frédéric Gerbeau (Paris)  
Pauline Lafitte-Godillon (Paris)  
Yvon Maday (Paris)  
Simona Mancini (Orléans)  
Sylvie Monniaux (Aix-Marseille)  
Marie Postel (Paris)  
Delphine Salort (Paris)  
Rodolphe Turpault (Nantes)  
Nicolas Vauchelet (Paris)

Université de Caen Basse-Normandie  
UFR de Sciences  
Campus 2, Côte de Nacre  
Bd Maréchal Juin  
14032 Caen

Fédération  
Normandie-Mathématiques  
FR CNRS 3335



Fiche d'inscription sur le site WEB de la conférence  
Date limite d'inscription : 15 Octobre 2013

Site Web: <http://edp-normandie2.sciencesconf.org/>  
Blog: <http://edp-normandie2.blogspot.fr/>  
Email: [edp-normandie2@sciencesconf.org](mailto:edp-normandie2@sciencesconf.org)

