Problème de transmission en dynamique de population

A. Thorel

Résumé

On étudie un problème de transmission (P), en dynamique de population, posé dans un ouvert cylindrique Ω de la forme : $\Omega :=]a,b[\times \omega$, avec $\Omega := \Omega_- \cup \Gamma \cup \Omega_+$, où $\Omega_- :=]a,\gamma[\times \omega$, $\Gamma := \{\gamma\} \times \omega$ et $\Omega_+ :=]\gamma, b[\times \omega$ avec $\gamma \in]a,b[\subset \mathbb{R}$ et $\omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$.

Dans chacun des habitats, on considère qu'une population se disperse selon une équation de diffusion généralisée modélisée par $k\Delta^2 u - l\Delta u = f$, où le terme biharmonique modélise la dispersion induite par des interactions à longues portées alors que le laplacien ne modélise que la dispersion locale (voir J.D. Murray [3]).

Afin d'étudier (P), on utilise les techniques liées aux équations différentielles opérationnelles : sommes d'opérateurs linéaires, puissances fractionnaires d'opérateurs, théorie des semi-groupes et de l'interpolation (voir M. Haase [1])

Plus précisément, on traduit les équations de (P) en équations opérationnelles d'ordre 4, à valeurs dans l'espace de Banach $X := L^p(\omega)$, $p \in]1,+\infty[$.

En posant $(u(x))(y) := u(x,y)$ avec $x \in]a,b[$, $y \in \omega$ et Δ_y comme étant le laplacien en dimension $n-1$, on définit $Au(x) := \Delta_y u(x)$ et $D(A)$ le domaine de A qui dépend des conditions aux bords considérées. Ainsi, on obtient

$$\left.\begin{array}{l}
(EQ)\left\{\begin{array}{rcll}
u_-^{(4)}(x) + (2A - \frac{l_-}{k_-}I)u_-''(x) + (A^2 - \frac{l_-}{k_-}A)u_-(x) &=& f_-(x), & \text{pour p. p. } x \in]a,\gamma[\\
u_+^{(4)}(x) + (2A - \frac{l_+}{k_+}I)u_+''(x) + (A^2 - \frac{l_+}{k_+}A)u_+(x) &=& f_+(x), & \text{pour p. p. } x \in]\gamma,b[,
\end{array}\right. \\
(BC)\left\{\begin{array}{rclrcl}
u_-(a) &=& \varphi_1^-, & u_+(b) &=& \varphi_1^+, \\
u_-'(a) &=& \varphi_2^-, & u_+'(b) &=& \varphi_2^+,
\end{array}\right. \\
(TC)\left\{\begin{array}{rcl}
u_-(\gamma) &=& u_+(\gamma) \\
u_-'(\gamma) &=& u_+'(\gamma) \\
k_+u_+^{(3)}(\gamma) + k_+Au_+'(\gamma) - l_+u_+'(\gamma) &=& k_-u_-^{(3)}(\gamma) + k_-Au_-'(\gamma) - l_-u_-'(\gamma) \\
k_+u_+''(\gamma) + k_+Au_+(\gamma) &=& k_-u_-''(\gamma) + k_-Au_-(\gamma).
\end{array}\right.
\end{array}\right. \qquad \text{(P)}$$

On utilise les résultats de [2], pour montrer que, sous de bonnes hypothèses sur les données du problème (P), on peut construire des solutions

$$u_- \in W^{4,p}(a,\gamma;X) \cap L^p(a,\gamma;D(A^2)) \quad \text{et} \quad u_+ \in W^{4,p}(\gamma,b;X) \cap L^p(\gamma,b;D(A^2))$$

de (P) vérifiant les conditions aux limites du problème (P). Enfin, on résout un déterminant opérationnel pour montrer que parmi les couples (u_-, u_+) précédents un seul vérifie les conditions de transmission, fournissant ainsi l'unique solution du problème (P) ayant la régularité attendue. Ce résultat reste vrai sous certaines hypothèses si A est un opérateur linéaire plus général.

Références

[1] M. Haase, *The Functional Calculus for Sectorial Operators*, Birkhauser, 2006.

[2] R. Labbas, S. Maingot, D. Manceau & A. Thorel, “On the regularity of a generalized diffusion problem arising in population dynamics set in a cylindrical domain”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 450, 2017, pp. 351-376.

[3] J.D. Murray, *Mathematical Biology II : Spatial Models and Biomedical Applications*, Third Edition, Springer, 2003.