Résumé

Dans ce travail, nous nous intéressons à l'estimation de la matrice de précision Σ^{-1} d'un modèle de mélange de lois de Wishart, $S \mid V \sim \mathcal{W}_p(n, V\,\Sigma)$, sous des coûts de type Efron-Morris $L_k\{\Sigma^{-1}, \hat{\Sigma}^{-1}\} = \mathrm{tr}[\{\hat{\Sigma}^{-1} - \Sigma^{-1}\}^2\, S^k]$, pour tout $k = 1, 2, 3\ldots$. Ici S est une matrice d'observation de dimension $p \times p$, V est une variable de mélange qui suit une distribution $\mathcal{H}(\cdot)$ connue et définie sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathcal{W}_p(n, V\,\Sigma)$ représente la distribution de Wishart à n degrés de liberté et de matrice de variance-covariance $V\,\Sigma$. Dans une approche unifiée des deux cas où la matrice S est inversible et où elle est singulière, nous considérons les estimateurs usuels de type $a\,S^+$ où a est une constante positive et où S^+ est l'inverse de Moore-Penrose (qui coïncide avec l'inverse S^{-1} de S lorsque S est inversible). Nous fournissons des estimateurs optimaux dans cette classe, notés $a^*\,S^+$ sous les coûts L_1, L_2 et L_3, et des estimateurs alternatifs, notés $a_0\,S^+$, sous les coûts L_0 et L_k, pour $k \geq 4$, cas où il n'existe pas d'estimateurs optimal.

Étant donné que tous les estimateurs usuels de la forme $\hat{\Sigma}_a^{-1} = a\,S^+$ sont inadmissibles, nous proposons deux types d'estimateurs alternatifs de la forme $\hat{\Sigma}_{a,c}^{-1} = a\,S^+ + c\,S\,G(S)$ et $\hat{\Sigma}_{a,c,r}^{-1} = a\,S^+ + c\,r(\mathrm{tr}\{S\})\,S\,G(S)$, où c est une constante positive, $r(\cdot)$ est une fonction réelle et $G(S)$ est une fonction matricielle d'ordre p homogène de degré α. Notons que pour les deux types d'estimateurs, la fonction $G(S)$ peut être ou pas orthogonalement invariante. Grâce à une identité de type Stein-Haff, nous établissons un estimateur sans biais de la différence de risque entre les estimateurs $\hat{\Sigma}_{a,c}^{-1}$ et $\hat{\Sigma}_a^{-1}$ et nous fournissons des conditions sur c, $G(S)$ et $r(\cdot)$ afin que les estimateurs $\hat{\Sigma}_{a,c}^{-1}$ et $\hat{\Sigma}_{a,c,r}^{-1}$ améliorent les estimateurs $\hat{\Sigma}_a^{-1}$, sous les fonctions de coût $L_k\{\Sigma^{-1}, \hat{\Sigma}^{-1}\} = \mathrm{tr}[\{\hat{\Sigma}^{-1} - \Sigma^{-1}\}^2\, S^k]$, pour $k = 1, 2, 3\ldots$. En particulier, nous donnons des exemples d'estimateurs de type Haff, Dey et Efron-Morris qui dominent les estimateurs $\hat{\Sigma}_a^{-1}$ à travers leur domination sur les estimateurs optimaux $\hat{\Sigma}_{a^*}^{-1}$ ou les estimateurs raisonnables $\hat{\Sigma}_{a_0}^{-1}$.

En dernier lieu, à la lumière des estimateurs de type Haff, Dey et Efron-Morris dont la fonction de correction $G(S)$ est homogène de degré -2, nous mettons en évidence le fait que seul ce degré d'homogénéité fait sens. Nous illustrons ce phénomène dans le cadre de l'estimation d'un vecteur moyenne d'une loi normale en montrant que, parmi les estimateurs de type James Stein d'un certain degré d'homogénéité, seule l'homogénéité d'ordre -2 est valide.

Mots clés : Lois à symétrie elliptique, mélange de lois de Wishart, identité de type Stein-Haff, matrice de précision, coûts de type Efron-Morris, fonction homogènes.