Chapitre 2

Quelques résultats sur les équations classiques

2.1 L'équation de la chaleur

On considère dans ce chapitre, l'équation de la chaleur,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= f \text{ sur } \Omega \\ u(x,0) &= u_0(x) \\ u(x,t) &= g(x) \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

2.1.1 Quelques exercices

Exercice 1. Démontrer la formule de la divergence.
Exercice 2. Inégalité de Cauchy-Schwartz
Soit f et g deux fonctions continues, montrer que l'on a :

$$\int_0^1 fg dx \leq (\int_0^1 f^2 dx)^{\frac{1}{2}} (\int_0^1 g^2 dx)^{\frac{1}{2}}.$$

Exercice 3. Inégalité de Poincaré
Soit v une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$ telle que $v(0) = 0$. Montrer que :

$$\int_0^1 v^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 (\frac{\partial v}{\partial x})^2 dx.$$

Exercice 4.

1. Soit u la solution de l'équation de la chaleur avec $f = 0$, $\Omega = [0, 1]$, $u(0) = u(1) = 0$, montrer que,
$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^1 u^2 dx = 0.$$
2. On suppose que $f(x) = x(1-x)$, $u(0, t) = a$, $u(0, t) = b$. Soit u la solution de l'équation de la chaleur avec ces nouvelles données.
   (a) Déterminer la solution $\bar{u}$ de l'équation,
$$\begin{array}{rcl} -u_{xx} & = & f \text{ sur }]0,1[, \\ u(0,t) = a, & & u(1,t) = b. \end{array}$$
   (b) Montrer que :
$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^1 (u - \bar{u})^2 dx = 0.$$

Exercice 5. Le principe du maximum.
On considère l'équation de la chaleur, avec $\Omega = [0, 1]$, $f = 0$, $u(0) = u(1) = 0$. Montrer que si $u(x, 0) = u_0(x) \geq 0$ alors $u(x, t) \geq 0$ pour tout $(x, t) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^+$. En déduire l'unicité de la solution de l'équation de la chaleur, pour f quelconque et $u(0) = a$, $u(1) = b$.
Correction
Soit $T > 0$ quelconque. Soit $v(x, t) = u(x, t) + \epsilon t$. Supposons que v admette un minimum en $(x_0, t_0) \in]0, 1[\times]0, T[$. Alors, $v_t = 0$. D'où $u_t = -\epsilon$. Or $u_t = u_{xx}$. Ce qui est impossible car $u_{xx} = v_{xx} \geq 0$. Si maintenant v admet un minimum en $(x_0, t_0) \in]0, 1[\times T$. On a $v_t(x_0, T) \leq 0$, donc $u_t \leq -\epsilon$ et $u_t(x_0, T) = u_{xx}(x_0, T) = v_{xx}(x_0, T) \geq 0$ ce qui est une contradiction. Finalement, on en déduit que v atteint nécessairement son minimum sur $0 \times \mathbb{R}^+ \cup]0, 1[\times 0 \cup 1 \times \mathbb{R}^+$. Donc $v(x, t) > 0$ sur $]0, 1[\times\mathbb{R}^+$. Par passage à la limite lorsque ϵ tend vers 0 on en déduit que $u(x, t) \geq 0$.

2.1.2 Résolution de l'équation de la chaleur avec source nulle

On suppose que $f = 0$, $u(0) = u(1) = 0$. On va déterminer explicitement la solution de l'équation de la chaleur.

$$\begin{array}{rcl} u_t - u_{xx} & = & 0 \text{ sur }]0,1[\\ u(x,0) & = & u_0(x) \text{ sur } [0,1] \\ u(0,t) & = & u(1,t) = 0. \end{array}$$

On cherche une solution sous la forme,

$$u(x,t) = g(x)w(t).$$

Alors,

$$w_t g - g_{xx} w = 0$$

Ce qui implique,

$$\frac{w_t}{w} = \frac{g_{xx}}{g}$$

Ce qui donne,

$$\frac{w_t}{w} = \frac{g_{xx}}{g} = k \text{ avec } k \text{ constant.}$$

Résolvons ces deux équations séparément,

$$\begin{aligned} \frac{g_{xx}}{g} &= k \\ \Leftrightarrow g_{xx} - kg &= 0. \end{aligned}$$

On résout alors,

$$r^2 = k.$$

On obtient les solutions,

$$g(x) = \alpha e^{-\sqrt{k}x} + \beta e^{\sqrt{k}x} \text{ si } k > 0,$$

$$g(x) = e^{kx}(\alpha + \beta x) \text{ si } k = 0$$

$$g(x) = e^{0x}(\alpha \cos(\sqrt{-k}x) + \beta \sin(\sqrt{-k}x)) \text{ si } k < 0.$$

Compte tenu de la condition au bord,

$$u(0,t) = u(1,t) = 0,$$

on obtient pour $k \geq 0$, $g(x) = 0$. On ne retiendra donc que la dernière famille de solutions, avec $k < 0$.

$$g(0) = 0 \Rightarrow \alpha = 0.$$

$$g(1) = 0 \Rightarrow \beta = 0 \text{ ou } \sqrt{-k} = n\pi$$

On obtient donc une famille de solutions,

$$g(x) = \beta_n \sin(n\pi x).$$

Ce qui donne pour w,

$$w_n(t) = w_n(0)e^{-n^2\pi^2 t}.$$

On vient ainsi d'exhiber une famille de solutions de la forme,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-n^2\pi^2 t}\sin(n\pi x).$$

Pour $t = 0$, on obtient,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sin(n\pi x) = u_0(x).$$

En prolongeant, $u_0(x)$ par $-u_0(-x)$ sur $[-1, 0]$, on obtient grâce à la théorie des séries de Fourier,

$$a_n = \int_{-1}^{1} u_0(x)\sin(n\pi x) = 2\int_0^1 u_0(x)\sin(n\pi x)$$

Définition 1. *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période T. La série de Fourier de f est*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right) + b_n\sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)\right)$$

où,

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_n & = & \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(\frac{2\pi}{T}nt)dt, \\ b_n & = & \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(\frac{2\pi}{T}nt)dt. \end{array}\right.$$

Théorème 1. *Soit f une fonction périodique sur $\mathbb{R}$, continue par morceaux, alors sa série de Fourier converge simplement vers*

$$\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}.$$

Théorème 2. *Soit f une fonction périodique sur $\mathbb{R}$, C^1 par morceaux, et continue, alors sa série de Fourier converge uniformémen vers f sur $\mathbb{R}$.*

Résolutions des équations différentielles linéaires d'ordre deux

On ne traite ici que le cas homogène et où les coefficients constants. Soit à résoudre l'équation suivante :

$$au" + bu' = c = 0.$$

On calcule $\Delta = b^2 - 4ac$, et les solutions de l'équation :

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{2.1}$$

On a trois cas :

1. Si $\Delta > 0$, on obtient des solutions de la forme :
$$\alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$$
où r_1 et r_2 sont les solutions de (2.1).
2. Si $\Delta = 0$, on obtient des solutions de la forme :
$$\alpha e^{rx} + \beta x e^{rx}$$
où r est la racine double de (2.1).
3. Si $\Delta < 0$, on obtient des solutions de la forme :
$$e^{ax}(\alpha \cos(bx) + \beta \sin(bx))$$
où $r = a + ib$ est la racine complexe de (2.1).

2.1.3 Résolution de l'équation de la chaleur avec source non nulle

On va maintenant résoudre le problème,

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= f(x) \text{ sur }]0,1[\\ u(x,0) &= u_0(x) \text{ sur } [0,1] \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0. \end{aligned}$$

Reprenons les fonctions du paragraphe précédent,

$$\sin(n\pi x) \quad n \in \mathbb{N}^*$$

On a,

$$(\sin(n\pi x))_{xx} = -n^2\pi^2 \sin(n\pi x).$$

De sorte que ces fonctions sont des fonctions propres de l'opérateur $u \mapsto -u_{xx}$ avec conditions aux bords de Dirichlet homogène. On a,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sin^2(n\pi x) &= \int_0^1 \cos^2(n\pi x) \\ \text{donc } 2\int_0^1 \sin^2(n\pi x) &= \int_0^1 \sin^2(n\pi x) + \int_0^1 \cos^2(n\pi x) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Donc,

$$\int_0^1 \sin^2(n\pi x) = \frac{1}{2}.$$

Par ailleurs,

$$\int_0^1 \sin(n\pi x)\sin(p\pi x) = 0 \text{ si } p \neq n.$$

Soit,

$$\phi_n(x) = \sqrt{2}\sin(n\pi x).$$

Alors,

$$\int_0^1 \phi_n\phi_p = 0, \text{ et } \int_0^1 \phi_n^2 = 1.$$

En fait, ϕ_n, $n \in 1, ..., n$ est une base orthonormale de $L^2(0,1)$. Cherchons une solution de l'équation sous la forme,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)\phi_n(x).$$

Alors en multipliant par ϕ_k l'équation et en intégrant sur $[0,1]$, on trouve,

$$u_{kt} - \lambda_k u_k = \int_0^1 f\phi_k = f_k,$$

et,

$$u_k(0) = \int_0^1 u_0\phi_k.$$

On peut résoudre cette équation et on obtient,

$$u_k(t) = (u_k(0) + \frac{f_k}{\lambda_k})e^{\lambda_k t} - \frac{f_k}{\lambda_k}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)\phi_n(x).$$

Nous admettrons la convergence de la série dans le cadre de ce cours.

2.1.4 Résolution de l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}$

On considère le problème suivant,

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0 \text{ sur } \mathbb{R} \\ u(x,0) &= u_0(x). \end{aligned}$$

Pour une fonction f intégrable, on définit la transformée de Fourier de f par la fonction,

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x\xi} f(x)dx.$$

Sous des conditions de régularité, on a les propriétés suivantes :

$$\hat{f}_x(\xi) = 2i\pi\xi\hat{f}(\xi),$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\hat{f}(\xi) = -2i\pi\mathcal{F}(xf)(\xi)$$

$$\mathcal{F}(f * g)(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

On a :

$$\hat{f_{xx}}(\xi) = -4\pi^2\xi^2\hat{f}.$$

La solution u de l'équation de la chaleur vérifie donc,

$$\hat{u}_t + 4\pi^2\xi^2\hat{u} = 0,$$

c'est à dire que,

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{-4\pi^2\xi^2 t}\hat{u}(\xi, 0).$$

Or,

$$\mathcal{F}\left(\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\right) = e^{-4\pi^2\xi^2 t}$$

donc,

$$u(x, t) = u_0 * \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

On a donc,

Théorème 3. *Une solution du problème est donnée par,*

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} u_0(y)\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}.$$

On peut également démontrer le résultat suivant,

Théorème 4. *Une solution du problème de la chaleur sur $\mathbb{R}$ avec second membre f est donnée par,*

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} u_0(y) \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-s)}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4(t-s)}} f(y,s) dy ds$$

Remarque 1. *On peut remarquer l'analogie entre cette dernière formule et la formule :*

$$u(t) = e^{at} u_0 + \int_0^t e^{a(t-s) b(s) ds},$$

qui donne la solution de l'équation différentielle :

$$u' = au + b(t).$$

2.2 L'équation des ondes

Exercice 6.
On considère l'équation des ondes avec $\Omega = \mathbb{R}$, $f = 0$. On note U_1, une primitive de u_1. Vérifier que,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(u_0(x+t) + u_0(x-t)) + \frac{1}{2}(U_1(x+t) - U_1(x-t)) \tag{2.2}$$

est solution de l'équation. En déduire que la solution de l'équation des ondes donnée par (2.2) au point (x,t), ne dépend de u_0 et u_1 que sur l'intervalle $[x-t, x+t]$. Pourquoi dit-on que l'équation des ondes est réversible ?
Exercice 7. Conservation d'énergie.
On considère l'équation des ondes avec $\Omega = [0,1]$ et $f = 0$. Montrer que,

$$\text{pour tout } t \geq 0 \int_0^1 (u_t^2 + u_x^2) dx = \int_0^1 (u_1^2 + u_{0x}^2) dx$$

2.3 L'équation de Schrodinger

Exercice 8. Conservation d'énergie.
Soit $u(x,t)$ une solution régulière de l'équation de Schrodinger qui décroit vers 0 ainsi que u_x lorsque $|x|$ tend vers $+\infty$.
Montrer que pour toute fonction dérivable v,

$$|v|_t^2 = 2\mathcal{R}(\bar{v} v_t).$$

Établir les égalités d'énergie,

$$\forall t \geq 0, \int_{\mathbb{R}} |u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |u_0|^2 dx,$$

et,

$$\forall t \geq 0, \int_{\mathbb{R}} (|u_x|^2 + V(x)|u|^2) dx = \int_{\mathbb{R}} (|u_{0x}|^2 + V(x)|u_0|^2) dx.$$