Université du Havre
UFR des Sciences et Techniques
Licence Sciences, Technologies, Santé
(2ème Année)- Méthodes numériques

Interrogation écrite du 3 novembre 2011 - Durée : 1 heure.
Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1.

1. Énoncer l'algorithme de Newton.
2. Énoncer l'algorithme de Lagrange.
3. Énoncer l'algorithme de la corde.

Exercice 2.

1. Énoncer l'algorithme de point fixe.
2. Énoncer un théorème donnant une condition suffisante de convergence globale de la méthode du point fixe.
3. Soit
$$g(x) = \frac{1}{2}x(1-x)$$
   (a) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $g(x) \in [0,1]$.
   (b) Calculer la valeur de :
$$\sup_{x\in[0,1]} |g'(x)|.$$
   (c) Soit $x_0 \in [0,1]$ et x_n la suite définie par
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad x_{n+1} = g(x_n).$$
   Quelle est la limite de la suite x_n quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 3.

1. Soit $f(x)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$$
2. Déterminer les racines de f.
3. Calculer la dérivée de f, et dresser son tableau de variation. Calculer également sa dérivée seconde puis tracer l'allure de la fonction f.

4. On cherche maintenant à étudier la limite de la suite x_n définie par l'algorithme de Newton suivant la valeur de la donnée initiale x_0.
Soit $y_1, ..., y_4$ les quatre racines de f classées par ordre croissant, c_1, c_2 les deux racines non nulles de f' et d_1 et d_2 les deux racines de f''.
Montrer que pour tout $x_0 \in]-\infty, c_1[$,

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = y_1.$$

Quelle est la limite de la suite x_n si $x_0 \in]c_2, +\infty[$?

5. QCM. Répondre par vrai ou faux, sans démonstration.
   (a) Si $x_0 > 0$ alors x_n tend vers y_4 quand n tend vers $+\infty$.
   (b) Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x_0 \in]y_2 - \alpha, d_1[$, x_n tend vers y_2 quand n tend vers $+\infty$.
   (c) Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x_0 \in]c_1, c_1 + \alpha[$, x_n tend vers y_4 quand n tend vers $+\infty$.
   (d) Il existe un intervalle $]\alpha, \beta[$, $\alpha < \beta < 0$ tel que pour tout $x_0 \in]\alpha, \beta[$, x_n tend vers y_3 quand n tend vers $+\infty$.
   (e) Il existe une infinité dénombrable d'intervalles disjoints $]\alpha_i, \beta_i[$, $i \in \mathbb{N}$, inclus dans $]c_1, y_2[$ tels que pour tout $x_0 \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}}]\alpha_i, \beta_i[$, x_n tend vers y_4 quand n tend vers $+\infty$.