Université du Havre
UFR des Sciences et Techniques
Licence Sciences, Technologies, Santé
(2ème Année)- Méthodes numériques

Interrogation écrite du 15 décembre 2011 - Durée : 3 heures.
Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1.

1. Rappeler les algorithmes de la corde, de Lagrange, de Newton et de point fixe. Pour chaque algorithme, illustrer graphiquement le procédé géométrique permettant de construire à chaque itération le nouvel itéré de la suite.
2. QCM, répondre par vrai ou faux sans démonstration.
   (a) Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. On suppose que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.
   (b) Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. On suppose que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Alors il existe un unique $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.
   (c) Soit f une fonction continue et strictement croissante sur un intervalle $[a, b]$. On suppose que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Soit x_n la suite définie par l'algorithme de dichotomie, alors il existe un unique $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$ et on a de plus,
   $$\lim_{n \to +\infty} x_n = c$$
   .
   (d) Soit g une fonction dérivable sur un intervalle $[a, b]$. On suppose que $g([a, b]) \subset [a, b]$ et que pour tout $x \in [a, b]$, $|g'(x)| < 1$. Soit x_n la suite définie par l'algorithme de point fixe, alors il existe un unique $l \in [a, b]$ tel que $g(l) = l$ et on a de plus,
   $$\lim_{n \to +\infty} x_n = l$$
   .
   (e) Soit x_n la suite définie par l'alorithme de Newton. On suppose que
   $$\lim_{n \to +\infty} x_n = c$$
   alors il existe $d \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que,
   $$\lim_{n \to +\infty} \frac{|x_{n+1} - l|}{|x_n - l|} = d$$

Exercice 2.

1. Soit
$$f(x) = x^2 - 4$$
Déterminer le comportement de la suite x_n définie par l'algorithme de Newton en fonction de la condition initiale x_0.
2. Soit
$$f(x) = x^3 - 4x$$
Déterminer, le plus exhaustivement possible, le comportement de la suite x_n définie par l'algorithme de Newton en fonction de la condition initiale x_0.

Exercice 3.

1. Donner la décomposition LU de la matrice suivante :
$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 10 \\ 2 & 12 & 22 & 29 \\ 3 & 25 & 57 & 82 \\ 4 & 32 & 89 & 147 \end{pmatrix}$$
2. Donner la décomposition QR de la matrice suivante :
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.

1. On considère la matrice A de taille $n \times n$ suivante :
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
Montrer que cette matrice est définie positive.

2. On rappelle l'algorithme de Cholesky pour une matrice A symétrique définie positive de taille $n \times n$,
Algorithme de Cholesky

Pour j allant de 1 à n
    Pour k allant de 1 à $j - 1$
        $a_{jj} = a_{jj} - (a_{jk})^2$
    Fin k

$a_{jj} = \sqrt{a_{jj}}$

Pour i allant de $j+1$ à n

Pour k allant de 1 à $j-1$

$a_{ij} = a_{ij} - a_{ik}a_{jk}$

Fin k

$a_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{jj}}$

Fin i

Fin j

3. Déterminer le nombre de multiplications, divisions et calcul de racines carrées effectuées lors de cet algorithme.
4. En utilisant la propriété de structure bande de la matrice A, proposer une nouvelle version de l'algorithme de Cholesky pour la matrice A qui permette de réduire le nombre d'opérations effectuées.
5. Calculer le nombre d'opérations effectuées pour ce nouvel algorithme.