Université du Havre
UFR des Sciences et Techniques
Licence Sciences, Technologies, Santé
(2ème Année)- Méthodes numériques

Contrôle continu du 7 février 2013 (Rattrapage) - Durée : 1 heure 30 mn.
Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1.

1. Rappeler la construction de la suite des itérés de l'algorithme de dichotomie.
2. Rappeler la construction de la suite des itérés de l'algorithme de Newton.
3. Rappeler la construction de la suite des itérés de l'algorithme de Lagrange.
4. Rappeler la construction de la suite des itérés de l'algorithme de Regula-Falsi.
5. Rappeler la construction de la suite des itérés de la méthode du point fixe.
6. Donner un théorème de condition suffisante de convergence de la méthode du point fixe.

Exercice 2.

1. Soit
$$g(x) = \frac{1}{2}x(1-x).$$
   (a) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $g(x) \in [0,1]$.
   (b) Calculer la valeur de :
   $$\sup_{x\in[0,1]} |g'(x)|.$$
   (c) Soit $x_0 \in [0,1]$ et x_n la suite définie par
   $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad x_{n+1} = g(x_n).$$
   Quelle est la limite de la suite x_n quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x - 11.$$

On considère l'équation :

$$f(x) = 0. \tag{1}$$

1. Calculer la dérivée de f et dresser le tableau de variation de f. En déduire le nombre exact de solutions de l'équation (1). Donner une représentation graphique de la fonction f.
2. Soit $(x_i), i = 1, 2...$ les solutions de (1) classées par ordre croissant et soit y_n la suite définie par l'algorithme de Newton à partir d'une donnée initiale y_0.
   (a) Quelle est la limite de la suite y_n si $y_0 < -1$? Justifier votre réponse.
   (b) Quelle est la limite de la suite y_n si $y_0 > 2$? Justifier votre réponse.
   (c) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $y_0 \in]x_2 - \alpha, x_2 + \alpha[$, la suite y_n converge vers x_2.
   (d) Montrer qu'il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $y_0 \in]x_3 - \beta, x_3 + \beta[$, la suite y_n converge vers x_3.
3. Dans tous les cas précédents, quel est l'ordre de convergence ? Justifier votre réponse.