Université du Havre
UFR des Sciences et Techniques
Licence Sciences, Technologies, Santé
(2ème Année)- Méthodes numériques

Contrôle continu du 16 janvier 2014 - Durée : 3 heures.
Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1. On rappelle le théorème suivant :

Théorème 1 (Condition suffisante de convergence globale de la méthode du point fixe) *Soit g une fonction de classe C^1 sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$. On suppose que $g([a, b]) \subset [a, b]$ et qu'il existe k, $0 < k < 1$ tel que pour tout $x \in [a, b]$, $|g'(x)| < k$, alors :*

1. *la fonction g admet un unique point fixe l dans $[a, b]$.*
2. *Pour tout x_0 de $[a, b]$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la récurrence*

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n \in [a, b] \text{ et } \lim_{n\to+\infty} x_n = l.$$

Démontrer ce théorème.

Exercice 2. Soit :

$$\begin{aligned} g: \quad [0, 1] \quad &\mapsto \mathbb{R} \\ x \quad &\to \mu x(1 - x) \end{aligned} \tag{1}$$

1. Rappeler la formule permettant de construire la suite des itérés de la méthode du point fixe. On note $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cette suite.
2. On suppose que $\mu = \frac{1}{2}$. Déterminer le comportement asymptotique de la suite x_n.
3. On suppose que $\mu = \frac{3}{2}$. Déterminer le comportement asymptotique de la suite x_n.

Exercice 3.
Soit $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$

1. (a) Déterminer les variations de la fonction f et en déduire le nombre p de solutions de l'équation $f(x) = 0$. On note $s_i, 1 \leq i \leq p$, ces solutions classées par ordre croissant.
   (b) Déterminer la convexité de f et en donner une représentation graphique.
2. Rappeler la formule permettant de construire la suite des itérés de la méthode de Newton. On note $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cette suite.
3. Enoncer un théorème donnant un critère de convergence globale de la méthode de Newton.
4. On suppose que $x_0 \in]-\infty, s_1[$. A l'aide d'une construction géométrique, déterminer graphiquement les trois premiers termes de la suite (c'est à dire x_0, x_1 et x_2).
5. Dans le cas où $x_0 \in]-\infty, s_1[$, quel est le comportement asymptotique (lorsque n tend vers $+\infty$) de la suite. Justifier votre réponse.
6. On suppose maintenant que $x_1 \in]s_1, -1[$. Quel est le comportement asymptotique de la suite. Justifier votre réponse.
7. Soit $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.
   (a) Montrer que g réalise une bijection de $]-1, -\frac{1}{\sqrt{3}}[$ dans $]g(-\frac{1}{\sqrt{3}}), +\infty[$.
   (b) En déduire qu'il existe un réel positif α vérifiant $\alpha < 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$ tel que $g(-1+\alpha) = 1$. Quel est le comportement asymptotique de la suite x_n si $x_0 \in]-1, -1+\alpha[$?
8. Par un raisonnement analogue, montrer qu'il existe α_2 vérifiant $\alpha < \alpha_2 < 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$ tel que pour tout $x_0 \in]-1+\alpha, -1+\alpha_2[$, la suite x_n converge vers s_1 quand n tend vers $+\infty$.
9. Montrer qu'il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $x_0 \in]-\beta, 0[$, la suite converge vers s_1.
10. A l'aide d'un théorème du cours, montrer qu'il existe $\gamma > 0$ tel que pour $x_0 \in]s_2 - \gamma, s_2 + \gamma[$ la suite converge vers s_2.
11. Que peut-on dire, de la convergence de la suite dans le cas $x_0 > 0$.

Exercice 4.
Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -4 & 5 \\ 3 & -8 & 14 & -20 \\ -3 & 4 & -6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Donner la factorisation LU de la matrice A.

Exercice 5.
Donner la factorisation QR de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 11 & 15 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -9 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6.

1. Rappeler l'algorithme de Cholesky.
2. Pour quel type de matrices peut-on utiliser cet algorithme ?
3. Calculer le nombre d'opérations effectuées lors de cet algorithme (multiplications et divisions), pour une matrice de taille $n \times n$.
4. Proposer une modification de l'algorithme de Cholesky dans le cas d'une matrice tridiagonale.
5. Calculer le nombre d'opérations (multiplications et divisions) effectuées lors de nouvel algorithme.