Université du Havre
UFR des Sciences et Techniques
Licence Sciences, Technologies, Santé
(2ème Année)- Méthodes numériques

Examen du 5 septembre 2011 - Durée : 3 heures.
Aucun document n'est autorisé. Seules les calculatrices de l'Université sont autorisées.

Exercice 1.
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $x_0, x_1, ..., x_n$, $n+1$ points donnés de $\mathbb{R}$.

1. Donner l'expression de $P_n(x)$, le polynôme d'interpolation de Lagrange de f sur le support $\{x_0, .., x_n\}$.
2. On suppose $n > 3$. Que vaut $P_n(x_3)$?
3. On suppose maintenant que :

$$f(0) = 1,\ f(1) = -1,\ f(2) = 1,\ f(3) = -1,\ f(4) = 1$$

Déterminer l'expression du polynôme d'interpolation de Lagrange puis de Newton de f sur le support $\{x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4\}$. Calculer la valeur du polynôme d'interpolation de Newton en x_4.

Exercice 2.
Soit

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

on cherche à approcher l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 f(x)dx$$

1. Soit $f_1(x)$ la fonction affine passant par les points $(0, 1)$ et $(1, e^{\frac{-1}{2}})$. Calculer :

$$I_1 = \int_0^1 f_1(x)dx,$$

puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.
D'après le cours, on sait qu' il existe $\xi \in [0, 1]$ tel que

$$E_1 = I - I_1 = -\frac{f''(\xi)}{12}.$$

Calculer $f''(x)$ puis déduire de l'égalité précédente une majoration de $|E_1|$.

2. Soit $f_2(x)$ le polynôme de degré 2 tel que $f_2(0) = 1$, $f_2(0.5) = e^{-\frac{1}{8}}$ et $f_2(1) = e^{-\frac{1}{2}}$. Calculer :

$$I_2 = \int_0^1 f_2(x)dx,$$

puis en donner une valeur approchée à 10^{-4} près. D'après le cours, on sait qu' il existe $\xi \in [0, 1]$ tel que

$$E_2 = I - I_2 = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{2880}.$$

Calculer $f^{(4)}(x)$ puis déduire de l'égalité précédente une majoration de $|E_2|$.

Exercice 3.

Soit f une fonction continue. Dans cet exercice on s'intéresse à l'approximaion numérique de la solution du problème

$$\begin{cases} u' &= f(u) \\ u(0) &= u_0 \end{cases} \tag{1}$$

où

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \text{ et } u : [0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$$

On suppose que l'équation (1) admet une unique solution définie sur $[0, +\infty[$. Soit $T > 0 \in \mathbb{R}$, $N \in N^*$ et $h = \frac{T}{N}$.

1. La méthode d'Euler explicite
   - (a) Soit u_e la solution obtenue par l'algorithme d'Euler explicite. Donner la formule permettant de calculer $u_e((i + 1)h)$ à partir de $u_e(ih)$.
   - (b) On suppose jusqu'à mention explicite du contraire que $f(u) = au$ où $a < 0 \in \mathbb{R}$. Expliciter dans ce cas $u_e(ih)$ en fonction de u_0.
   - (c) On suppose que $u_0 \neq 0$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur h pour que :
     - $u_e(ih)_{0\leq i\leq N}$ soit une suite de nombres « strictement alternée »(c'est à dire que ses éléments sont alternativement strictements positifs et strictements négatifs).
     - $|u_e(ih)|_{0\leq i\leq N}$ soit une suite de nombres strictement décroissante.
   - (d) Toujours dans le cas où $f(u) = au$, donner la solution exacte de (1).
   - (e) Déduire des questions précédentes une condition sur h pour que le comportement de la suite u_e soit en adéquation avec le comportement de la solution exacte.
   - (f) On sait d'après le cours que lorsque N tend vers $+\infty$ la méthode d'Euler explicite converge. En déduire :

     $$\lim_{N\to+\infty}(1 + \frac{aT}{N})^N.$$

     Justifier votre réponse.
2. La méthode d'Euler implicite
   - (a) Soit u_{imp} la solution obtenue par l'algorithme d'Euler implicite. Dans le cas où f est quelconque, donner la formule permettant de relier $u_{imp}((i + 1)h)$ et $u_{imp}(ih)$. Donner en une phrase la démarche mathématique à suivre pour déterminer $u_{imp}((i+1)h)$ à partir de $u_{imp}(ih)$.
   - (b) On suppose maintenant que $f(u) = au$ avec $a < 0$. Expliciter dans ce cas $u_{imp}(ih)$ en fonction de u_0.
   - (c) Étudier le signe de $u_{imp}(ih)$, et la croissance de $|u_{imp}(ih)|$. Ces résultats vous semblent-il en adéquation avec le comportement de la solution exacte ?

(d) On sait d'après le cours que lorsque N tend vers $+\infty$ la méthode d'Euler implicite converge. En déduire la valeur de :

$$\lim_{N\to+\infty} (\frac{1}{1-\frac{aT}{N}})^N.$$

Justifier votre réponse.