Université du Havre
UFR des Sciences et Techniques
Licence Sciences, Technologies, Santé
(2ème Année)- Méthodes numériques

Contrôle continu 5 juin 2012 - Durée : 3 heures.
Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1.
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $x_0, x_1, ..., x_n$, $n+1$ réels.

1. Donner l'expression de $P_n(x)$, le polynôme d'interpolation de Lagrange de f sur le support $\{x_0, ..., x_n\}$.
2. Expliquer comment calculer $f[x_0, x_1, ..., x_n]$.
3. On suppose maintenant que :

$$f(-2) = 2,\ f(-1) = 1,\ f(0) = 0,\ f(1) = -1,\ f(2) = -2$$

Déterminer l'expression du polynôme d'interpolation de Lagrange puis de Newton de f sur le support $\{x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 2\}$.

Exercice 2.
Soit f une fonction de classe C^4 sur $\mathbb{R}$ et a, b deux réels. On pose

$$I_S = \frac{1}{6}(f(a) + f(b) + 4f(\frac{a+b}{2})).$$

Montrer qu'il existe $\xi \in [a, b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)dx - I_S = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi).$$

Exercice 3.
Soit

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

On cherche à approcher l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 f(x)dx.$$

1. Soit $f_1(x)$ la fonction affine passant par les points $(0, 1)$ et $(1, e^{\frac{-1}{2}})$. Calculer :

$$I_1 = \int_0^1 f_1(x)dx.$$

Soit,

$$E_1 = I - I_1.$$

Calculer $f''(x)$ et en déduire une majoration de $|E_1|$.

2. Soit $f_2(x)$ le polynôme de degré 2 tel que $f_2(0) = 1$, $f_2(0.5) = e^{-\frac{1}{8}}$ et $f_2(1) = e^{-\frac{1}{2}}$. Calculer :

$$I_2 = \int_0^1 f_2(x)dx.$$

Soit

$$E_2 = I - I_2$$

Calculer $f^{(4)}(x)$ et en déduire une majoration de $|E_2|$.

Exercice 4.

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue, on s'intéresse à la résolution théorique et numérique du problème suivant : trouver une fonction $u : [0, a[\mapsto \mathbb{R}$ solution de l'équation,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u'(t) & = & f(u(t)) \\ u(0) & = & u_0 \end{array} \right. \tag{1}$$

où a est soit un nombre strictement positif, soit $+\infty$. Pour l'approximation numérique de la solution du problème (1), on se donne un nombre strictement positif T, un pas de temps h. On pose alors $N = \frac{T}{h}$, et on subdivise l'intervalle $[0, T]$ en posant $t_i = ih$. L'approximation de la solution du problème (1) sur l'intervalle $[0, T]$ consiste alors à construire un vecteur $(U_n)_{0 \leq n \leq N}$, avec $U_0 = u_0$ selon une méthode donnée.

1. Décrivez succinctement les méthodes de résolution numériques suivantes :
   (a) La méthode d'Euler explicite.
   (b) La méthode d'Euler implicite.
2. On suppose que $f(u) = au$ avec $a < 0$.
   (a) Calculer la solution exacte du problème (1).
   (b) Dans ce cas particulier, déterminer l'expression des suites U_n et V_n contruites respectivement par les méthodes d'Euler explicite et implicite. Déterminer le signe et le sens de variation des suites U_n et V_n en fonction de la valeur de h.
   (c) On sait que lorsque h tend vers zéro les deux méthodes convergent vers la solution exacte. En déduire les valeurs de :

   $$\lim_{N \to +\infty} (1 + \frac{aT}{N})^N,$$

   et,

   $$\lim_{N \to +\infty} (\frac{1}{1 - \frac{aT}{N}})^N.$$

3. On suppose que $f(u) = -u^3$.

(b) Résoudre l'équation (1). Quel est le comportement asymptotique de $u(t)$?

(c) Soit U_n la suite construite par la méthode d'Euler explicite. On suppose que $u_0 = U_0 > 0$. Donner une condition suffisante sur h et u_0 pour que la suite U_n soit strictement positive et décroissante.

4. Reprendre la question précédente avec $f(u) = -u^p$, $p \in \mathbb{N}$, $p > 3$.