Université du Havre
UFR des Sciences et Techniques
Licence Sciences, Technologies, Santé
(2ème Année)- Méthodes numériques

Interrogation écrite du 22 février 2012 - Durée : deux heures.
Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1.
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $x_0, x_1, ..., x_n$, $n+1$ réels.

1. Donner l'expression de $P_n(x)$, le polynôme d'interpolation de Lagrange de f sur le support $\{x_0, .., x_n\}$.
2. On suppose maintenant que :

$$f(-2) = -1,\ f(-1) = 1,\ f(1) = 1,\ f(2) = -1.$$

Déterminer l'expression du polynôme d'interpolation f sur le support $\{x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 2\}$ d'abord sous sa forme de Lagrange, puis sous sa forme de Newton.

Exercice 2.

1. Soit $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$, N un entier strictement positif, on pose,

$$h = \frac{b-a}{N}, \quad a_0 = a, a_1 = a + h, ..., a_i = a + ih, ..., a_N = b.$$

Donner les formules classiques d'intégration numérique : formule des rectangles, du point milieu, des trapèzes et de Simpson.

2. Soit f une fonction de classe C^2 sur un intervalle borné $[a, b]$. Soit

$$I = (b-a)f(\frac{a+b}{2}).$$

Montrer qu'il existe $\xi \in [a, b]$ tel que,

$$\int_a^b f(x)dx - I = f''(\xi)\frac{(b-a)^3}{24}.$$

3. Soit k un entier strictement positif. On pose,

$$M = 2^k,\ l = \frac{b-a}{M}, \quad b_0 = a, b_1 = l, ..., b_M = b.$$

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ définie de la manière suivante,

$$\forall i \in 0, ..., M-1,\ \forall x \in [b_i, b_{i+1}], \quad f(x) = c^i x^2 + c_1^i x + c_0^i.$$

où c^i, c_1^i et c_2^i, $0 \leq i \leq M-1$, sont des réels.
Déterminer $f''(x)$.

4. Soit $N = 2^m$ un entier strictement positif, avec $m > k$. On pose

$$h = \frac{b-a}{N}, \quad a_0 = a, a_1 = a + h, ..., a_i = a + ih, ..., a_N = b.$$

Et,

$$I = \sum_{i=0}^{N-1} hf(\frac{a_i + a_{i+1}}{2}).$$

Déterminer la valeur exacte de

$$\int_a^b f(x)dx - I,$$

en fonction de $l, c^i, 0 \leq i \leq M-1$, et h.
Dans cette question toute tentative de résolution sera prise en compte.

Exercice 3. On rappelle que les polynômes de Legendre sont définis par récurrence de la manière suivante :

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = x,$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ L_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x L_n(x) - \frac{n}{n+1} L_{n-1}(x).$$

1. Déterminer $L_2(x)$ et $L_3(x)$.
2. Vérifier que pour tout n, m, tels que $0 \leq n < m \leq 3$,

$$\int_{-1}^{1} L_m(x) L_n(x) dx = 0.$$

3. Soit $x_0, x_1, ..., x_9$ les racines de $L_{10}(x)$. Soit

$$I = \sum_{i=0}^{9} W_i f(x_i)$$

où,

$$W_i = \frac{2}{10 L'_{10}(x_i) L_9(x_i)},$$

(c'est la formule d'intégration de Gauss-Legendre).
Soit p un polynôme. Donner une condition suffisante sur le degré de p pour que,

$$\int_{-1}^{1} p(x)dx = I.$$