Université du Havre
UFR des Sciences et Techniques
Licence Sciences, Technologies, Santé
(2ème Année)- Méthodes numériques

Contrôle du 19 mars 2014 - Durée : 2 heures.
Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1.
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $x_0, x_1, ..., x_n$, $n+1$ réels distincts de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à n vérifiant :

$$\forall i \in \{0, ..., n\}, \quad f(x_i) = P(x_i).$$

Exercice 2.
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $x_0, x_1, ..., x_n$, $n+1$ réels distincts de $\mathbb{R}$.

1. Donner l'expression de $P_n(x)$, le polynôme d'interpolation de Lagrange de f sur le support $\{x_0, .., x_n\}$.
2. Expliquer comment calculer $f[x_0, x_1, ..., x_n]$.
3. On suppose maintenant que :

$$f(-2) = 2,\ f(-1) = 1,\ f(0) = 0,\ f(1) = -1,\ f(2) = -2$$

   Déterminer l'expression du polynôme d'interpolation de Lagrange puis de Newton de f sur le support $\{x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 2\}$.

Exercice 3.
Soit $f(x)$ une fonction définie sur un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$. On pose :

$$I_S = \frac{b-a}{6}(f(a) + f(b) + 4f(\frac{a+b}{2})).$$

1. Démontrer qu'il existe $\xi \in [a,b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)dx - I_S = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi).$$

2. On suppose que $a = -1, b = 1$, et que :

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

   (a) Donner une valeur aprochée de I_S à 0.01 près.

   (b) Montrer que :

$$f^{(4)}(x) = g(x)f(x)$$

   où $g(x)$ est un polynôme que l'on déterminera.

   (c) Faire une étude de la fonction g et en déduire un majorant de $|g|$.

   (d) En déduire une majoration de :

$$|\int_{-1}^{1} f(x)dx - I_S|.$$

3. On pose maintenant $x_0 = -1, x_1 = -0.9, ..., x_{20} = 1$, et,

$$I_{S,N} = \sum_{k=0}^{19} \frac{0.1}{6}(f(x_k) + f(x_{k+1}) + 4f(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}))$$

   Donner une majoration de :

$$|\int_{-1}^{1} f(x)dx - I_{S,N}|.$$