# Chapitre 6

# Equations différentielles ordinaires

Ce chapitre traite de la résolution des équations différentielles ordinaires. Les équations différentielles ordinaires modélisent de nombreux phénomènes issus de la physique, de la chimie ou de la biologie. Après avoir donné les principaux théorèmes d'existence et d'unicité des solutions, nous présenterons les méthodes d'Euler et Runge-Kutta. Nous démontrerons ensuite la convergence des méthodes.

## 6.1 Position du problème

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $E$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$. Soit $f$ une fonction continue sur $O = I \times E$. Soit $(t_0, u_0) \in O$. On considère le problème suivant : trouver une fonction $u$ dérivable telle que,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u'(t) & = & f(u(t)), \\ u(t_0) & = & u_0. \end{array} \right. \tag{6.1}$$

## 6.2 Théorèmes d'existence et d'unicité des solutions

**Définition 1.** *On dit que $f$ est localement lipschitzienne si pour tout $(\tau, u_1) \in I \times E$, il existe $\delta$ et $L$ tels que*

$$||t - \tau|| < \delta \text{ et } ||u_2 - u_1|| < \delta \Rightarrow ||f(t, u_1) - f(t, u_2)|| \leq L||u_1 - u_2||. \tag{6.2}$$

**Définition 2.** *On dit que $f$ est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément en la première si il existe $L > 0$ tel que,*

$$\forall t \in I, \forall u_1, u_2 \in E, ||f(t, u_1) - f(t, u_2)|| \leq L||u_1 - u_2||. \tag{6.3}$$

L'existence et l'unicité des solutions de l'équation (6.1) est assurée par le théorème de Cauchy-lipschitz. [1]

**Théorème 1** (Cauchy-Lipschitz)**.** *Si $f$ vérifie* (6.2)*, alors il existe $\mu$ et $u$ tel que $u$ soit l'unique solution de* (6.1) *sur $t_0 - \mu, t_0 + \mu$. Si $f$ vérifie* (6.3) *sur $I \times \mathbb{R}^p$ alors il existe une unique solution $u$ de* (6.1) *de classe $C^1$ définie sur $I$.*

**Proposition 1.** *Sous les mêmes hypothèses, si l'on suppose de plus que $f$ est de classe $C^p$ alors $u$ est de classe $C^{p+1}$.*

## 6.3 Les méthodes d'Euler

Dans cette section on se place dans un intervalle $[0, T]$, que l'on divise en $N$ sous intervalles de longueur $h$. C'est à dire que l'on pose :

$$t_0 = 0, t_1 = h, ..., t_N = T.$$

On va maintenant construite un vecteur :

$$U = \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_N \end{pmatrix},$$

de telle sorte que $U_n$ soit une approximation de $u(t_n)$ où $u$ est solution de l'équation (6.1).

### 6.3.1 La méthode d'Euler explicite

L'idée de la méthode d'Euler [2] est d'approcher :

$$u'(t) \text{ par } \frac{u(t+h) - u(t)}{h}.$$

1. Augustin Louis, baron Cauchy (1789-1857) est un prolifique mathématicien français. Ses travaux portent sur l'analyse, l'algèbre, la géométrie, les probabilités et aussi l'optique et la mécanique. Catholique et royaliste engagé, ses positions lui valurent parfois de vives critiques et oppositions. Rudolph Otto Sigismund Lipschitz (1832-1903) est un mathématicien allemand. Il précisa les résultats de Cauchy sur les équations différentielles et de son nom que découle le terme "lipschitzienne". Il travailla également sur la théorie des nombres, l'analyse, la géométrie différentielle et la mécanique classique.

2. Leonhard Euler (1707-1783), est un éminent mathémticien Suisse qui vécut principalement en Russie et en Allemagne. Ses travaux ont été considérables en mathématiques (analyse, théorie des graphes). Il est également connu pour ses travaux en mécanique, dynamique des fluides, optique et astronomie.

L'équation (6.1) devient alors,

$$\frac{u(t+h)-u(t)}{h} = f(u(t)),$$

ou encore,

$$u(t+h) = u(t) + hf(u(t)).$$

On cherche alors $U$ solution de

$$\forall n \in 0, ..., N-1 \quad U_{n+1} = U_n + hf(U_n) \tag{6.4}$$

### 6.3.2 La méthode d'Euler implicite

L'idée de cette méthode est d'approcher,

$$u'(t) \text{ par } \frac{u(t)-u(t-h)}{h}.$$

L'équation (6.1) devient alors,

$$\frac{u(t)-u(t-h)}{h} = f(u(t)),$$

ou encore,

$$u(t) - hf(u(t)) = u(t-h).$$

On cherche alors $U$ solution de,

$$\forall n \in 0, ..., N-1 \quad U_{n+1} - hf(U_{n+1}) = U_n. \tag{6.5}$$

### 6.3.3 La théta-méthode

On obtient cette méthode en prenant une combinaison convexe des équations (6.4) et (6.5) :

$$\forall n \in 0, ..., N-1 \quad U_{n+1} = U_n + h(\theta f(U_n) + (1-\theta) f(U_{n+1})). \tag{6.6}$$

où $\theta$ est un réel compris entre 0 et 1.
Le lecteur pourra remarquer que pour $\theta = 1$, c'est la méthode d'Euler explicite tandis que pour $\theta = 0$, il s'agit de la méthode d'Euler Implicite.

## 6.4 Convergence de la méthode d'Euler

### 6.4.1 Convergence de la méthode d'Euler explicite

Soit $u(t)$ la solution de l'équation (6.1). On pose,

$$\forall n \in 0, ..., N, \quad V_n = u(t_n).$$

On a alors,

**Théorème 2.** *On suppose que la fonction $f$ est de classe $C^1$ sur $R^p$, alors,*

$$\lim_{h \to 0} \sup_{n \in 0,...,N} |U_n - V_n| = 0.$$

*Démonstration.* On pose,

$$\epsilon_n = V_{n+1} - V_n - hf(V_n)$$

Alors, puisque $V$ est de classe $C^2$ sur $[0, T]$,

$$\exists C > 0, \quad |\epsilon_n| = |V_{n+1} - V_n - hf(V_n)| \leq Ch^2$$

$$\begin{aligned}
|U_{n+1} - V_{n+1}| &= |U_n + hf(U_n) - (V_n + hf(V_n) + \epsilon_n)| \\
&\leq |U_n - V_n| + Lh|U_n - V_n| + |\epsilon_n| \\
&\leq (1 + Lh)|U_n - V_n| + Ch^2 \\
&\leq (1 + Lh)((1 + Lh)|U_{i-1} - V_{i-1}| + Ch^2) + Ch^2 \\
&\leq (1 + Lh)^2|U_{i-1} - V_{i-1}| + (1 + Lh)Ch^2 + Ch^2
\end{aligned}$$

Par récurrence, on montre alors que,

$$\forall n \in 0, ..., N, \quad |U_n - V_n| \leq (1 + Lh)^n|U_0 - V_0| + Ch^2(\sum_{k=0}^{n-1}(1 + Lh)^k.$$

Ceci implique que $\forall i \in 0, ..., N$,

$$\begin{aligned}
|U_n - V_n| &\leq Ch^2(\frac{1 - (1 + Lh)^i}{-Lh}) \quad (\text{ car } U_0 = V_0) \\
&= Ch^2(1 + Lh)^n(\frac{1 - (1 + Lh)^{-n}}{Lh}) \\
&\leq (1 + Lh)^N \frac{C}{L} h \\
&\leq \frac{C}{L} h e^{NLh} \\
&= \frac{C}{L} h e^{LT}.
\end{aligned}$$

$\square$

**Remarque 1.** *En fait la condition, $f$ lipschitzienne n'est pas nécessaire. En effet, on peut se donner une valeur $r$ et construire le cylindre $K = \cup_{t\in[0,T]} B(u(t), r)$. On choisit alors :*

$$L = \sup_{x\in K} |\nabla f|,$$

*puis $h$ assez petit pour que $\frac{C}{L} h e^{LT} < r$. Alors $U_n \in K$ pour tout $i \in 0, ..., N$, et on a $|f(U_n) - f(V_n)| < L$.*

### 6.4.2 Convergence de la méthode d'Euler implicite

**Théorème 3.** *On suppose que la fonction $f$ est de classe $C^1$ sur $R^N$, alors,*

$$\lim_{h\to 0} \sup_{i\in 0,...,N} |U_n - V_n| = 0.$$

*Démonstration.* On pose,

$$\epsilon_n = V_{i+1} - V_n - f(V_{i+1})h.$$

Alors puisque $V$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}$, on en déduit, en utilisant la formule de taylor que :

$$|V_n - V_{i+1} + f(V_{i+1})h| \leq \sup_{t\in[0,T]} |u''(t)| \frac{h^2}{2}.$$

On a donc :

$$\exists C > 0, \quad |\epsilon_n| \leq Ch^2.$$

Donc :

$$\begin{aligned}|U_{n+1} - V_{n+1}| &= |U_n + hf(U_{n+1}) - (V_n + hf(V_{n+1}) + \epsilon_n)| \\ &\leq |U_n - V_n| + Lh|U_{n+1} - V_{n+1}| + |\epsilon_n|\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$|U_{n+1} - V_{n+1}| \leq \frac{1}{1 - Lh}(|U_n - V_n| + Ch^2)$$

On pose :

$$\rho_h = \frac{1}{1 - Lh}.$$

Par récurrence, on montre que :

$$\forall n \in 1, ..., N, \quad |U_n - V_n| \leq Ch^2 \sum_{k=1}^{n} \rho_h^k.$$

Ceci implique que $\forall n \in 1, ..., N$,

$$\begin{aligned}
|U_n - V_n| &\leq \rho_h C h^2 \frac{1-\rho_h^n}{1-\rho_h} \\
&= \frac{C}{L} h(\rho_h^n - 1) \\
&\leq \frac{C}{L} h(\rho_h^N - 1) \\
&= \frac{C}{L} h(\exp(-N \ln(1 - \frac{LT}{N}) - 1) \\
&\leq \frac{C}{L} h(\exp(LT + \epsilon(\frac{1}{N})) - 1).
\end{aligned}$$

□

## 6.5 Les méthodes de Runge-Kutta

On se donne $q$ réels $c_1, c_2, ..., c_q$ et on leur associe des formules de quadrature :

$$\int_0^{c_i} \psi(t)dt = \sum_{j=1}^{q} a_{ij}\psi(c_j) \tag{6.7}$$

et

$$\int_0^{1} \psi(t)dt = \sum_{j=1}^{q} b_j\psi(c_j) \tag{6.8}$$

On considère alors les instants intermédiaires :

$$t_{ni} = t_n + c_i h, \ 1 \leq i \leq q$$

On obtient en utilisant (6.7) :

$$y(t_{ni}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{ni}} f(t, y(t)) \simeq y(t_n) + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t_{nj}, y(t_{nj}))$$

et en utilisant (6.8) :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt \simeq y(t_n) + h \sum_{j=1}^{q} b_j f(t_{nj}, y(t_{nj}))$$

Les méthodes de Runge-Kutta consistent à remplacer les signes $\simeq$ par des égalités, on obtient :

$$y_{ni} = y_n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t_{nj}, y_{nj})$$

et,

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=1}^{q} b_j f(t_{nj}, y_{nj})$$

Une méthode de Runge-Kutta est donc déterminée dès que l'on connait $q$, $c_i$, $a_{ij}$, $b_j$. On représente généralement une méthode de Runge-Kutta[3] par le tableau :

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_q & a_{q1} & a_{q2} & \dots & a_{qq} \\ \hline & b_1 & b_2 & \dots & b_q \end{array}$$

### 6.5.1 La méthode de Runge-Kutta d'ordre 2

Elle est donnée par le tableau :

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

On obtient donc :

$$y_{n1} = y_n$$

3. Carl Runge, 1856-1927, est un mathématicien allemand. Il soutient son doctorat en 1880 sous la direction de K. Weierstrass. Sa principale contribution reconnue en mathématiques est le développement, en 1901, avec M.W. Kutta des méthodes de Runge-Kutta pour l'approximation des solutions différentielles que nous présentons dans ce chapitre. Il découvre également à la même époque, que la différence entre le polynôme d'interpolation d'une fonction et la fonction qu'il interpole peut exploser lorsqu'on augmente le nombre de points du support (c'est le phénomène de Runge ; voir TP). Il s'intéressa également à la physique (spectroscopie, géodésie astrophysique). Il fut l'ami du célèbre physicien M. Planck. Martin Wilhelm Kutta, 1867-1944 est également un mathématicien allemand. Il est aussi connu pour ses études en aérodynamique.

$$y_{n2} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

et,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n2}))$$

**Interprétation géométrique**

### 6.5.2 La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

Elle est donnée par le tableau :

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} y_{n1} &= y_n \\ y_{n2} &= y_n + \frac{h}{2} f(t_n + \frac{h}{2}, y_n) \\ y_{n3} &= y_n + \frac{h}{2} f(t_n + \frac{h}{2}, y_{n2}) \\ y_{n4} &= y_n + hf(t_{n+1}, y_{n3}) \end{aligned}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(f(t_n, y_n) + 2f(t_n + \frac{h}{2}, y_{n2}) + 2f(t_n + \frac{h}{2}, y_{n3}) + +f(t_n + h, y_{n4}))$$

## 6.6 Convergence de la méthode Runge-Kutta RK4

On énonce maintenant et on démontre un théorème assurant la convergence de la méthode de Runge-Kutta RK4. La démonstration présentée ici se veut assez constructive et fait le lien avec l'intégration numérique. Elle ne ne permet pas de montrer que la méthode est d'ordre $4$. Soit $U_n,\ n \in \{0, ..., N\}$ et $U_{nj}, j \in \{1, ...q\}$ les suites construites par la méthode RK4. On pose $V_n = u(t_n), n \in \{0, ..., N\}$ et $V_{nj} = u(t_n + c_i h), j \in \{1, ..., q\}$.

**Théorème 4.** *On suppose la fonction $f$ assez régulière sur $R^p$, alors,*

$$\lim_{h \to 0} \sup_{n \in 0, \ldots, N} |U_n - V_n| = 0.$$

*Démonstration.* On a :

$$V_{n+1} - U_{n+1} = V_n + h \sum_{j=1}^{q} b_j f(V_{nj}) + \epsilon_n - (U_n + h \sum_{j=1}^{q} b_j f(U_{nj}))$$

où

$$\begin{array}{rcl} \epsilon_n & = & V_{n+1} - (V_n + h \sum_{j=1}^{q} b_j f(V_{nj})) \\ & = & \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(s))ds - h \sum_{j=1}^{q} b_j f(V_{nj})) \\ & = & \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(s))ds - \frac{h}{6}(f(u(t_n)) + 4f(u(t_n + 0.5h)) + f(u(t_{n+1}))) \end{array}$$

D'après les résultats sur la méthode de Simpson, on en déduit que

$$||\epsilon_n|| \leq Ch^5$$

où $C$ est une constante indépendante de $h$. On en déduit que :

$$||V_{n+1} - U_{n+1}|| \leq ||V_n - U_n|| + Lh \sum_{j=1}^{q} b_j ||V_{nj} - U_{nj}|| + ||\epsilon_n||.$$

Par ailleurs :

$$||V_{n1} - U_{n1}|| = ||V_n - U_n||.$$

$$||V_{n2} - U_{n2}|| = ||V_n + 0.5hf(V_{n1}) + \epsilon_{n1} - (U_n + 0.5hf(U_{n1}))||.$$

où

$$\epsilon_{n1} \quad = \quad V_{n2} - V_n - 0.5hf(V_{n1})$$

On en déduit d'après les résultats sur la méthode des rectangles que :

$$||\epsilon_{n1}|| \leq Ch$$

Puis,

$$\begin{array}{rcl} ||V_{n2} - U_{n2}|| & \leq & ||V_n - U_n|| + 0.5Lh||V_{n1} - U_{n1}|| + ||\epsilon_{n1}|| \\ & \leq & (1 + O.5Lh)|V_n - U_n|| + ||\epsilon_{n1}||. \end{array}$$

$$||V_{n3} - U_{n3}|| = ||V_n + 0.5hf(V_{n2}) + \epsilon_{n2} - (U_n + 0.5hf(U_{n2}))||.$$

où

$$\epsilon_{n2} \quad = \quad V_{n3} - V_n - 0.5hf(V_{n2})$$

On en déduit d'après les résultats sur la méthode des rectangles que :

$$||\epsilon_{n2}|| \leq Ch$$

Puis,

$$\begin{array}{rcl} ||V_{n3}-U_{n3}|| & \leq & ||V_n-U_n||+0.5Lh||V_{n2}-U_{n2}||+||\epsilon_{n2}|| \\ & \leq & ||V_n-U_n||+0.5Lh((1+O.5Lh)|V_n-U_n||+||\epsilon_{n1}||)+||\epsilon_{n2}|| \\ & \leq & ||V_n-U_n||(1+\frac{Lh}{2}+\frac{L^2h^2}{4})+\frac{Lh}{2}||\epsilon_{n1}||+||\epsilon_{n2}||. \end{array}$$

Enfin,

$$||V_{n4}-U_{n4}|| = ||V_n+hf(V_{n3})+\epsilon_{n3}-(U_n+hf(U_{n3}))||.$$

où

$$\epsilon_{n3} \quad = \quad V_{n4}-V_n-hf(V_{n3}).$$

On en déduit d'après les résultats sur la méthode du point milieu que :

$$||\epsilon_{n3}|| \leq Ch^2$$

Puis,

$$\begin{array}{rcl} ||V_{n4}-U_{n4}|| & \leq & ||V_n-U_n||+Lh||V_{n3}-U_{n3}||+||\epsilon_{n3}|| \\ & \leq & ||V_n-U_n||+Lh(||V_n-U_n||(1+\frac{Lh}{2}+\frac{L^2h^2}{4})+\frac{Lh}{2}||\epsilon_{n1}||+||\epsilon_{n2}||)+||\epsilon_{n3}|| \\ & \leq & ||V_n-U_n||(1+Lh+\frac{L^2h^2}{2}+\frac{L^3h^3}{4})+\frac{L^2h^2}{2}||\epsilon_{n1}||+Lh||\epsilon_{n2}||+||\epsilon_3 \end{array}$$

.

Finalement, on en déduit que :

$$||V_{n+1}-U_{n+1}|| \leq ||V_n-U_n||(1+L'h)+Ch^2.$$

puis,

$$\begin{array}{rcl} ||V_n-U_n|| & \leq & Ch^2\sum_{k=0}^{n-1}(1+L'h)^k \\ & = & \frac{Ch}{L'}(1+L'h)^n \\ & \leq & \frac{Ch}{L'}\exp L'T. \end{array}$$

□

**Remarque 2.** *L'idée pour montrer que la méthode est d'ordre* $4$ *est d'écrire le développement de taylor en* $t_n$ *de* $V_{n+1}-V_n$*, et de* $h\sum_{j=1}^{q} b_j f(V_{nj})$*, et de montrer que la différence est d'ordre* $5$*. Voir [**?**]*

Méthodes numériques 2. Université du Havre

**Feuille de TD 3.**

**Exercice 1.** Soit l'équation,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & y^2 \\ y(0) & = & y_0 \end{array} \right.$$

1. La fonction $f(y) = y^2$ est-elle lipschitzienne ? Localement lipschitzienne ?
2. Montrer l'existence d'une unique solution maximale.
3. Résoudre l'équation.

**Exercice 2.** On considère l'équation,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & \frac{1}{y} \\ y(0) & = & y_0 \end{array} \right.$$

1. La fonction $f(y) = \frac{1}{y}$ est elle lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ ? Localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ ?
2. On suppose $y_0 \neq 0$. Montrer l'existence d'une unique solution maximale. Calculer la solution.
3. On suppose que $y_0 = 0$. On cherche une solution continue sur $[0, +\infty[$, et dérivable sur $]0, +\infty[$ telle que,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & \frac{1}{y} \text{ sur } ]0, +\infty[ \\ y(0) & = & 0 \end{array} \right.$$

Calculer les solutions de l'équation. Combien y-en a-t-il ?

**Exercice 3.**
Soit $f$ une fonction continue. Dans cet exercice on s'intéresse à l'approximation numérique de la solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u' & = & f(u) \\ u(0) & = & u_0 \end{array} \right. \tag{6.9}$$

où

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \text{ et } u : [0, +\infty[ \mapsto \mathbb{R}$$

On suppose que l'équation (6.9) admet une unique solution définie sur $[0, +\infty[$. Soit $T > 0 \in \mathbb{R}$, $N \in N^*$ et $h = \frac{T}{N}$.

1. La méthode d'Euler explicite
   (a) Soit $(U_i)_{0\leq i\leq N}$, la solution obtenue par l'algorithme d'Euler explicite. Donner la formule permettant de calculer $U_{i+1}$ à partir de $U_i$.
   (b) On suppose jusqu'à mention explicite du contraire que $f(u) = au$ où $a < 0 \in \mathbb{R}$. Expliciter dans ce cas $U_{i+1}$ en fonction de $U_i$.
   (c) On suppose que $u_0 \neq 0$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $h$ pour que :
      – $(U_i)_{0\leq i\leq N}$ soit une suite de nombres « strictement alternée »(c'est à dire que ses éléments sont alternativement strictements positifs et strictements négatifs).
      – $(|U_i|)_{0\leq i\leq N}$ soit une suite de nombres strictement décroissante.
   (d) Toujours dans le cas où $f(u) = au$, donner la solution exacte de (6.9).
   (e) Déduire des questions précédentes une condition sur $h$ pour que le comportement de la suite $U_i$ soit en adéquation avec le comportement de la solution exacte.
   (f) On sait d'après le cours que lorsque $N$ tend vers $+\infty$ la méthode d'Euler explicite converge. En déduire :
   $$\lim_{N\to+\infty}(1+\frac{aT}{N})^N.$$
   Justifier votre réponse.
2. La méthode d'Euler implicite
   (a) Soit $(V_i)_{0\leq i\leq N}$, la solution obtenue par l'algorithme d'Euler implicite. Dans le cas où $f$ est quelconque, donner la formule permettant de relier $V_{i+1}$ et $V_i$. Donner en une phrase la démarche mathématique à suivre pour déterminer $V_{i+1}$ à partir de $V_i$.
   (b) On suppose maintenant que $f(u) = au$ avec $a < 0$. Expliciter dans ce cas $V_i$ en fonction de $u_0$.
   (c) Étudier le signe de $V_i$, et le sens de variation de $|V_i|$. Ces résultats vous semblent-ils en adéquation avec le comportement de la solution exacte ?
   (d) On sait d'après le cours que lorsque $N$ tend vers $+\infty$ la méthode d'Euler implicite converge. En déduire la valeur de :
   $$\lim_{N\to+\infty}(\frac{1}{1-\frac{aT}{N}})^N.$$
   Justifier votre réponse.

3. On suppose que $f(u) = -u^3$.
   (a) Montrer que quelque soit la valeur de $u_0$, il existe $t_0 > 0$ et une unique fonction $u$ définie sur $[0, t_0[$ qui soit solution du problème (6.9).
   (b) Résoudre l'équation (6.9). Quel est le comportement asymptotique de $u(t)$ ?
   (c) Soit $U_n$ la suite construite par la méthode d'Euler explicite. On suppose que $u_0 = U_0 > 0$. Donner une condition suffisante sur $h$ et $u_0$ pour que la suite $U_n$ soit strictement positive et décroissante.
4. Reprendre la question précédente avec $f(u) = -u^p$, $p \in \mathbb{N}$, $p > 3$.

**Exercice 4.** L'équation d'un système masse-ressort.
Le système masse-ressort est constitué d'un ressort, dont une extrémité est fixée et l'autre extrémité est reliée à un objet de masse $m$.

1. On suppose que le ressort est positionné de manière horizontale, et qu'un dispositif physique permet de négliger les forces de frottements, alors le système masse-ressort est régi par l'équation suivante,
$$x'' = -\frac{k}{m}x,$$
où $k$ est le coefficient de raideur du ressort. La variable $x$ représente la position de l'objet, le 0 étant fixé à l'extrémité du ressort où se trouve l'objet, lorsque celui-ci est au repos. Résoudre l'équation. Quel est le comportement asymptotique du système ?
2. On suppose maintenant que les frottements ne sont plus négligeables. L'équation devient alors,
$$x'' = -\frac{\lambda}{m}x' - \frac{k}{m}x$$
où $\lambda$ est le coefficient de frottement.
On suppose que $\lambda^2 < \frac{4k}{m}$. Résoudre cette équation. Quel est le comportement asymptotique du système ?

**Exercice 5.** On considère l'équation,
$$\begin{cases} y' &= \sin(y) \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

1. Démontrer que pour tout $y_0$ il existe une unique solution de l'équation.
2. Pour une solution donnée, une trajectoire est l'ensemble des valeurs $y(t)_{t\in\mathbb{R}}$. On admet le résultat suivant : deux trajectoires non confondues n'ont aucun point en commun. Déterminer le comportement asymptotique des solutions en fonction de la condition initiale $y_0$.

**Exercice 6.** On considère le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_t & = & -u^3+u \\ u(0) & = & u_0 \end{array}\right.$$

1. Montrer l'existence et l'unicité d'une solution maximale.
2. Déterminer les solutions stationnaires.
3. Déterminer sans calcul analytique le comportement asymptotique du système.
4. Déterminer analytiquement l'expression de la solution du système.

**Exercice 7.** Equation du pendule
L'équation donnant le mouvement du pendule est :

$$u'' + w_0^2 \sin(u) = 0$$

où :

$$w_0 = \frac{g}{l}.$$

Avec $g$ constante de gravitation et $l$ la longueur du pendule.

1. Les valeurs : $u(0) = u_0$ et $u'(0) = u_1$ étant fixées, montrer l'existence et l'unicité d'une solution maximale.
2. Quelles sont les solutions stationnaires du système ?
3. Faire une étude aussi exhaustive que possible des solutions du système.

**Exercice 8.** On considère le système suivant,

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & ax-bxy \\ y' & = & cxy-dy \end{array}\right. \tag{6.10}$$

Ce système décrit l'évolution d'un système de proie-prédateurs et a été introduit indépendamment par Lotka et Volterra respectivement en 1925 et 1926. Dans ce système :

- $x$ représente la population de proies, $y$ la population de prédateurs.
- $a$ le taux de reproduction des proies, $b$ son taux de mortalité due aux prédateurs.
- $d$ le taux de mortalité des prédateurs, $c$ le taux reproduction des prédateurs en fonction des proies mangées.

1. Soit
$$F(x,y) = \left\{\begin{array}{l} ax-bxy \\ cxy-dy \end{array}\right.$$
Calculer la matrice jacobienne de $F$ et en déduire l'existence et l'unicité d'une solution locale pour le système (1).

2. Déterminer les solutions stationnaires ($x' = 0, y' = 0$).
3. Déterminer les solutions de l'équation vérifiant $x = 0$.

4. Déterminer les solutions de l'équation vérifiant $y = 0$.
5. Pour une condition initiale donnée, l'ensemble $(x(t), y(t))_{t\in A}$, où $A \subset \mathbb{R}$, est l'intervalle maximal sur lequel la solution est définie, définit une trajectoire. On admet que deux trajectoires ne peuvent pas s'intersecter. Déduire de ce qui précède que si $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$ alors $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$ pour tout $t > 0$.
6. Montrer que toute solution telle que $(x_0, y_0) \in B = \{\frac{d}{c}\}\times]\frac{a}{b}, +\infty[$ coupe $B$ une infinité de fois.
7. Soit $(x(t), y(t)$ une solution, calculer :
$$\frac{d}{dt}(by + cx - aln(y) - dln(x)).$$
8. Que peut-on en conclure ?

**Exercice 9.** Système de FitzHugh-Nagumo.
On considère le système suivant :

$$\begin{cases} u_t &= f(u) - v \\ v_t &= au - bv + c \end{cases} \tag{6.11}$$

où
$$f(u) = -u^3 + 3u \text{ et } a, b, c > 0$$

1. Montrer l'existence et l'unicité d'une solution maximale.
2. Déterminer les solutions stationnaires.
3. Faire une étude la plus exhaustive possible de la solution du système.

**Exercice 10.** Système de Hodgkin-Huxley. On considère le système suivant :

$$\begin{cases} C\dfrac{dV}{dt} = -\bar{g}_K n^4(V - E_K) - \bar{g}_{Na} m^3 h(V - E_{Na}) - \bar{g}_L(V - E_L) + I \\ \dfrac{dm}{dt} = \alpha_m(V)(1 - m) - \beta_m(V)m \\ \dfrac{dn}{dt} = \alpha_n(V)(1 - n) - \beta_n(V)n \\ \dfrac{dh}{dt} = \alpha_h(V)(1 - h) - \beta_h(V)h \end{cases}$$

où $\bar{g}_K, E_K, \bar{g}_{Na}, E_{Na}, \bar{g}_L, E_L, I$ sont des constantes et avec des conditions initiales données. On suppose que $m(0), n(0), h(0) \in [0,1]$ et que les fonctions $\alpha$ et $\beta$ sont strictement positives.

1. Montrer l'existence et l'unicité d'une solution maximale définie sur un intrevalle $I$.
2. Montrer que pout tout $t \in I$, $m(t), n(t), h(t) \in [0,1]$.
3. Faire une étude la plus exhaustive possible de la solution du système.

**Exercice 11.** Système de Lorenz.
On considère le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_t & = & \sigma(y-x) \\ y_t & = & \rho x - y - xz \\ z_t & = & xy - \beta z \end{array} \right. \tag{6.12}$$

où $\sigma, \rho, \beta > 0$.

1. Montrer l'existence et l'unicité d'une solution maximale.
2. Déterminer les solutions stationnaires du système.
3. Faire une étude la plus exhaustive possible de la solution du système.

# Bibliographie

[1] M. Crouzeix and A. L. Mignot. *Analyse numérique des équations différentielles*. Masson, 1989.