Méthodes numériques

Chapitre 4: Interpolation polynomiale

Normandie Universités
Le Havre

2015

Plan

Plan

Introduction

On se donne une fonction continue f sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$, et $n+1$ points, $x_0, x_1, ..., x_n \in [a, b]$. Comment trouver un polynôme qui coïncide avec f aux points $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$?

Théorème

Théorème 1

Soient $x_0, x_1, \dots, x_n$, $n+1$ *réels distincts et* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction. Alors il existe un unique polynôme* P *de degré au plus* n *qui vérifie*

$$P(x_i) = f(x_i), \quad \forall i \in \{0, \dots, n\}.$$

Démonstration

On cherche un polynôme $P(x)$ de degré inférieur ou égal à n :

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

tel que

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x_i^k = f(x_i) \quad \forall i \in 0, \dots, n. \tag{1}$$

Démonstration

On cherche un polynôme $P(x)$ de degré inférieur ou égal à n :

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

tel que

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x_i^k = f(x_i) \quad \forall i \in 0, ..., n. \tag{1}$$

Or l'application linéaire :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ (a_0, a_1, ..., a_n) &\mapsto (\sum_{k=0}^{n} a_k (x_0)^k, \sum_{k=0}^{n} a_k x_1^k, ..., \sum_{k=0}^{n} a_k x_n^k). \end{aligned}$$

est injective.

Démonstration

En effet, soit $(b_0, b_1, ..., b_n)$, vérifiant, pour tout $i \in 0, 1, ..., n$,

$$\sum_{k=0}^{n} b_k (x_i)^k = 0.$$

Démonstration

En effet, soit $(b_0, b_1, ..., b_n)$, vérifiant, pour tout $i \in 0, 1, ..., n$,

$$\sum_{k=0}^{n} b_k (x_i)^k = 0.$$

Alors le polynôme,

$$\sum_{k=0}^{n} b_k x^k$$

possède $n+1$ racines distinctes, c'est donc le polynôme nul.

Démonstration

En effet, soit $(b_0, b_1, ..., b_n)$, vérifiant, pour tout $i \in 0, 1, ..., n$,

$$\sum_{k=0}^{n} b_k (x_i)^k = 0.$$

Alors le polynôme,

$$\sum_{k=0}^{n} b_k x^k$$

possède $n+1$ racines distinctes, c'est donc le polynôme nul. L'application F est donc injective, donc bijective.

Autre démonstration

L'équation (1) est équivalente à :

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ & \dots & & \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}.$$

Autre démonstration

L'équation (1) est équivalente à :

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ & \dots & & \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}.$$

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ & \dots & & \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n. \end{pmatrix}$$

Autre démonstration

Montrons que A est inversible en calculant son déterminant.

Autre démonstration

Montrons que A est inversible en calculant son déterminant.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ & \dots & & \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

Autre démonstration

Montrons que A est inversible en calculant son déterminant.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ & \dots & & \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

En effectuant les opérations sur les colonnes de droite à gauche, $C_i \leftarrow C_i - x_0 C_{i-1}$, on obtient :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & \dots & x_1^{n-1}(x_1 - x_0) \\ & \dots & & \\ 1 & x_n - x_0 & \dots & x_n^{n-1}(x_n - x_0) \end{vmatrix}.$$

Autre démonstration

En développant par rapport la première ligne et en utilisant la multilinéarité du déterminant, on trouve :

$$\det(A) = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)...(x_n - x_0) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ & \dots & & \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Autre démonstration

En développant par rapport la première ligne et en utilisant la multilinéarité du déterminant, on trouve :

$$\det(A) = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)...(x_n - x_0) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ & \dots & & \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

En réitérant l'opération, on obtient finalement :

$$\det(A) = \prod_{i=0}^{n-1} \prod_{j=i+1}^{n} (x_j - x_i) = \prod_{i<j} (x_j - x_i) \neq 0.$$

Ce qui achève la démonstration.

Le polynôme d'interpolation.

Le polynôme exhibé dans le théorème 1 est appelé le polynôme d'interpolation de f aux points $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Plan

Le polynôme d'interpolation de Lagrange

D'après le théorème 1, on sait qu'étant donnés $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $n+1$ réels distincts, et $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$, $n+1$ réels associés, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant,

$$P(x_i) = f(x_i), \quad \forall i \in 0, 1, \ldots, n.$$

Le polynôme d'interpolation de Lagrange

D'après le théorème 1, on sait qu'étant donnés $x_0, x_1, ..., x_n$, $n+1$ réels distincts, et $f(x_0), f(x_1), ..., f(x_n)$, $n+1$ réels associés, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant,

$$P(x_i) = f(x_i), \quad \forall i \in 0, 1, ..., n.$$

Soit L le polynôme défini par :

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}.$$

Le polynôme d'interpolation de Lagrange

Alors L est de degré au plus n et il vérifie :

$$L(x_i) = f(x_i), \quad \forall i \in 0, 1, ..., n.$$

Le polynôme d'interpolation de Lagrange

Alors L est de degré au plus n et il vérifie :

$$L(x_i) = f(x_i), \quad \forall i \in 0, 1, ..., n.$$

Le polynôme L est donc le polynôme d'interpolation. Écrit sous cette forme, on l'appelle le polynôme d'interpolation de Lagrange.

Le polynôme d'interpolation de Lagrange

Alors L est de degré au plus n et il vérifie :

$$L(x_i) = f(x_i), \quad \forall i \in 0, 1, ..., n.$$

Le polynôme L est donc le polynôme d'interpolation. Écrit sous cette forme, on l'appelle le polynôme d'interpolation de Lagrange. Soit

$$\phi_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Alors, les fonctions $(\phi_i)_{0\leq i\leq n}$, forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Le polynôme d'interpolation de Lagrange

Alors L est de degré au plus n et il vérifie :

$$L(x_i) = f(x_i), \quad \forall i \in 0, 1, ..., n.$$

Le polynôme L est donc le polynôme d'interpolation. Écrit sous cette forme, on l'appelle le polynôme d'interpolation de Lagrange. Soit

$$\phi_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Alors, les fonctions $(\phi_i)_{0\leq i\leq n}$, forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Cependant cette base de polynômes n'est pas satisfaisante car l'ajout d'un point conduit à changer toutes les fonctions de la base.

Plan

Interpolation de Newton et différences divisées

On veut maintenant déterminer une nouvelle forme du polynôme d'interpolation P qui ne nécessite pas de recalculer toutes les fonctions de base lors de l'ajout d'un nouveau point.

Interpolation de Newton et différences divisées

On veut maintenant déterminer une nouvelle forme du polynôme d'interpolation P qui ne nécessite pas de recalculer toutes les fonctions de base lors de l'ajout d'un nouveau point.
Si l'on a qu'un point d'interpolation x_0 alors,

$$P(x) = f(x_0).$$

Interpolation de Newton et différences divisées

On veut maintenant déterminer une nouvelle forme du polynôme d'interpolation P qui ne nécessite pas de recalculer toutes les fonctions de base lors de l'ajout d'un nouveau point.
Si l'on a qu'un point d'interpolation x_0 alors,

$$P(x) = f(x_0).$$

Si l'on ajoute un point x_1, on cherche

$$P(x) = f(x_0) + a_1(x - x_0),$$

Interpolation de Newton et différences divisées

On veut maintenant déterminer une nouvelle forme du polynôme d'interpolation P qui ne nécessite pas de recalculer toutes les fonctions de base lors de l'ajout d'un nouveau point.
Si l'on a qu'un point d'interpolation x_0 alors,

$$P(x) = f(x_0).$$

Si l'on ajoute un point x_1, on cherche

$$P(x) = f(x_0) + a_1(x - x_0),$$

et,

$$P(x_1) = f(x_1),$$

Interpolation de Newton et différences divisées

On veut maintenant déterminer une nouvelle forme du polynôme d'interpolation P qui ne nécessite pas de recalculer toutes les fonctions de base lors de l'ajout d'un nouveau point.
Si l'on a qu'un point d'interpolation x_0 alors,

$$P(x) = f(x_0).$$

Si l'on ajoute un point x_1, on cherche

$$P(x) = f(x_0) + a_1(x - x_0),$$

et,

$$P(x_1) = f(x_1),$$

implique,

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Interpolation de Newton et différences divisées

Si l'on a $n+1$ points, $x_0, x_1, \ldots, x_n$, on cherche

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n \prod_{k=0}^{n-1}(x - x_k).$$

Interpolation de Newton et différences divisées

Si l'on a $n+1$ points, $x_0, x_1, ..., x_n$, on cherche

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n \prod_{k=0}^{n-1}(x - x_k).$$

Remarquer que si l'on a déterminé $a_0, a_1, ..., a_{i-1}$ alors de l'égalité,

$$P(x_i) = f(x_i) = a_0 + a_1(x_i - x_0) + ... + a_i(x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1}),$$

on déduit que a_i est déterminé par la formule :

$$a_i = \frac{f(x_i) - a_0 - a_1(x_i - x_0) - ... - a_{i-1}(x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-2})}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})}.$$

Interpolation de Newton et différences divisées

Ce qui montre que a_i ne dépend que des points $x_0, ..., x_i$. On pose alors pour tout $k \in \{1, .., n\}$:

$$a_k = f[x_0, ..., x_k].$$

Interpolation de Newton et différences divisées

Ce qui montre que a_i ne dépend que des points $x_0, ..., x_i$. On pose alors pour tout $k \in \{1, .., n\}$:

$$a_k = f[x_0, ..., x_k].$$

Avec cette notation, on a :

$$P(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + ... + f[x_0, ..., x_n] \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k).$$

Lemme

Lemme 1
Soit $n \in \mathbb{N}$, et soient $x_0, \dots, x_n$, $n+1$ réels distincts. Pour toute permutation σ sur $\{0, \dots, n\}$, on a :

$$f[x_0, \dots, x_n] = f[x_\sigma(0), \dots, x_\sigma(n)].$$

Preuve

Démonstration.

On pose pour tout $j \in \{0, ..., n\}$:

$$y_j = x_{\sigma(j)}.$$

$\square$

Preuve

Démonstration.

On pose pour tout $j \in \{0, ..., n\}$:

$$y_j = x_{\sigma(j)}.$$

On considère la décomposition de P dans les deux bases :

$$1, (x - x_0), ..., \prod_{k=0}^{n-1}(x - x_k) \text{ et } 1, x - y_0, ..., \prod_{k=0}^{n-1}(x - y_k),$$

avec,

$$(a_k)_{0 \leq k \leq n}, \quad (b_k)_{0 \leq k \leq n},$$

les coefficients de P dans ces deux bases. $\square$

Preuve

Démonstration.

On pose pour tout $j \in \{0, ..., n\}$:

$$y_j = x_{\sigma(j)}.$$

On considère la décomposition de P dans les deux bases :

$$1, (x - x_0), ..., \prod_{k=0}^{n-1}(x - x_k) \text{ et } 1, x - y_0, ..., \prod_{k=0}^{n-1}(x - y_k),$$

avec,

$$(a_k)_{0 \leq k \leq n}, \quad (b_k)_{0 \leq k \leq n},$$

les coefficients de P dans ces deux bases.
Alors, le coefficient du terme x^n est a_n dans la première décomposition et b_n dans la seconde. Par unicité du polynôme d'interpolation, on en déduit que $a_n = b_n$. □

Lemme

Lemme 2

On a la relation de récurrence

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

Preuve

Démonstration

On pose,

$$y_j = x_{n-j}.$$

Preuve

Démonstration

On pose,

$$y_j = x_{n-j}.$$

On a :

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n \prod_{k=0}^{n-1}(x - x_k) \\ &= b_0 + b_1(x - y_0) + \ldots + b_n \prod_{k=0}^{n-1}(x - y_k). \end{aligned}$$

Preuve

Démonstration

On sait déjà que $a_n = b_n$. On identifie les termes de degré $n-1$.

Preuve

Démonstration

On sait déjà que $a_n = b_n$. On identifie les termes de degré $n-1$. On trouve :

$$\begin{aligned} a_{n-1} - a_n \sum_{k=0}^{n-1} x_k &= b_{n-1} - b_n \sum_{k=0}^{n-1} y_k \\ &= b_{n-1} - a_n \sum_{k=0}^{n-1} x_{n-k} \\ &= b_{n-1} - a_n \sum_{k=1}^{n} x_k . \end{aligned}$$

Preuve

Démonstration

On a donc :

$$a_{n-1} - b_{n-1} = a_n(x_0 - x_n).$$

Or $a_{n-1} = f[x_0, ..., x_{n-1}]$ et $b_{n-1} = f[x_1, ..., x_n]$. D'où le résultat. $\square$

Plan

Évaluation d'un polynôme

Soit à évaluer le polynôme

$$a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})$$

au point x. n peut utiliser l'algorithme suivant :

$S = a_n$

Pour i allant de $n - 1$ *à* 0

$S = a_i + (x - x_i)S$

Fin pour

Retourner S.

Évaluation d'un polynôme

Soit à évaluer le polynôme

$$a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)...(x - x_{n-1})$$

au point x. On peut utiliser l'algorithme suivant :

$S = a_n$

Pour i allant de $n-1$ à 0

$S = a_i + (x - x_i)S$

Fin pour

Retourner S.

Calcul des diffŕences divisées

Pour calculer les différences divisées, on peut faire :

Calcul des diffŕences divisées

Pour calculer les différences divisées, on peut faire :

Pour i allant de 0 *à* n

$a(i) = f(x_i)$

Fin pour

Pour j allant de 1 *à* n

Pour i allant de n à j

$a(i) = \frac{a(i)-a(i-1)}{x_i - x_{i-j}}$

Fin i

Fin j

Plan

Erreur d'interpolation

Soit P_n le polynôme d'interpolation de f aux points $x_0, x_1, ..., x_n$. On pose :

$$e_n(x) = f(x) - P_n(x).$$

Erreur d'interpolation

Soit P_n le polynôme d'interpolation de f aux points $x_0, x_1, \dots, x_n$. On pose :

$$e_n(x) = f(x) - P_n(x).$$

Proposition 1

Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, on a

$$e_n(x) = \begin{cases} 0 \ \textit{si } x \in \{x_0, \dots, x_n\} \\ f[x_0, \dots, x_n, x] \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) \ \textit{sinon.} \end{cases}$$

Preuve

Démonstration.

On suppose que $x \notin \{x_0, ., x_n\}$. $\square$

Preuve

Démonstration.
On suppose que $x \notin \{x_0, ., x_n\}$. Soit P_{n+1} le polynôme d'interpolation de f aux points $\{x_0, ..., x_n, x\}$. □

Preuve

Démonstration.

On suppose que $x \notin \{x_0, ., x_n\}$. Soit P_{n+1} le polynôme d'interpolation de f aux points $\{x_0, ..., x_n, x\}$. Alors :

$$e_n(x) = f(x) - P_n(x) = P_{n+1}(x) - P_n(x) = f[x_0, ..., x_n, x] \prod_{j=0}^{n} (x - x_j).$$

$\square$

Théorème

Théorème 2

Soient f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, de classe C^k, et $x_0, \ldots, x_k$ des réels distincts. On pose $a = \min\{x_0, \ldots, x_k\}$ et $b = \max\{x_0, \ldots, x_k\}$. Alors il existe $\xi \in]a, b[$ tel que

$$f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{f^k(\xi)}{k!}.$$

Preuve

Démonstration

Dans le cas où $k = 1$, c'est une application du théorème des accroissements finis.

Preuve

Démonstration

Dans le cas où $k = 1$, c'est une application du théorème des accroissements finis. Supposons $k > 1$ quelconque. Soit P_k le polynôme d'interpolation de f aux points $x_0, ..., x_k$.

Preuve

Démonstration

Dans le cas où $k = 1$, c'est une application du théorème des accroissements finis. Supposons $k > 1$ quelconque. Soit P_k le polynôme d'interpolation de f aux points $x_0, ..., x_k$. Alors, la fonction :

$$e_k(x) = f(x) - P_k(x)$$

s'annule au moins en $k+1$ points distincts : $x_0, ..., x_k$.

Preuve

Démonstration

Dans le cas où $k = 1$, c'est une application du théorème des accroissements finis. Supposons $k > 1$ quelconque. Soit P_k le polynôme d'interpolation de f aux points $x_0, ..., x_k$. Alors, la fonction :

$$e_k(x) = f(x) - P_k(x)$$

s'annule au moins en $k + 1$ points distincts : $x_0, ..., x_k$. Donc, d'après le théorème de Rolle, la fonction $(e_k)'$ s'annule au moins en k points distincts dans $]a, b[$.

Preuve

Démonstration

Dans le cas où $k = 1$, c'est une application du théorème des accroissements finis. Supposons $k > 1$ quelconque. Soit P_k le polynôme d'interpolation de f aux points $x_0, \ldots, x_k$. Alors, la fonction :

$$e_k(x) = f(x) - P_k(x)$$

s'annule au moins en $k+1$ points distincts : $x_0, \ldots, x_k$. Donc, d'après le théorème de Rolle, la fonction $(e_k)'$ s'annule au moins en k points distincts dans $]a, b[$. La fonction $(e_k)''$ s'annule au moins en $k-1$ points distincts dans $]a, b[$...et la fonction $(e_k)^{(k)}$ s'annule en au moins un point dans $]a, b[$.

Preuve

Démonstration

Donc :

$$\exists \xi \in]a, b[\text{ tel que } \quad (e_k)^{(k)}(\xi) = f^{(k)}(\xi) - P_k^{(k)}(\xi) = 0.$$

$\square$

Preuve

Démonstration

Donc :

$$\exists \xi \in]a, b[\text{ tel que } \quad (e_k)^{(k)}(\xi) = f^{(k)}(\xi) - P_k^{(k)}(\xi) = 0.$$

Or,

$$P_k^{(k)}(\xi) = k! f[x_0, ..., x_k].$$

$\square$

Preuve

Démonstration

Donc :

$$\exists \xi \in]a,b[\text{ tel que } \quad (e_k)^{(k)}(\xi) = f^{(k)}(\xi) - P_k^{(k)}(\xi) = 0.$$

Or,

$$P_k^{(k)}(\xi) = k! f[x_0, \ldots, x_k].$$

Donc :

$$\exists \xi \in]a,b[\text{ tel que } \quad f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{f^k(\xi)}{k!}.$$

$\square$

Théorème

Théorème 3

Soient f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle $[a, b]$, $x_0, \ldots, x_n$ des réels distincts de $[a, b]$, et P_n le polynôme d'interpolation de f sur le support $x_0, \ldots, x_n$. Alors pour tout x dans $[a, b]$ il existe $\xi \in]a, b[$ tel que

$$e_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j).$$

Démonstration.

C'est une conséquence de la proposition et du théorème précédents. $\square$

Plan

Extension au cas où les points du support ne sont pas disjoints

Exercice 1.

1. On suppose f assez régulière. Quelle est la limite de $f[x_0, x]$ lorsque x tend vers x_0 ?
2. Quelle est la limite de $f[x_0, x, x_2]$ quand x tend vers x_0 ? On définit $f[x_0, x_0, x_2]$ par cette limite.
3. Quelle est la limite de $f[x_0, x_0, x]$ lorsque x tend vers x_0 ?
4. Généraliser : quelle est la valeur de $f[x_0, ..., x_0]$, où dans le membre de gauche x_0 apparait $n + 1$ fois ?

Extension au cas où les points du support ne sont pas disjoints

Dans cette partie on suppose que les points du support ne sont pas nécessairement distincts.

Théorème 4

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^n, alors on peut prolonger la fonction $f[x_0, ..., x_n]$ en une fonction continue de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}$.

Extension au cas où les points du support ne sont pas disjoints

Dans cette partie on suppose que les points du support ne sont pas nécessairement distincts.

Théorème 4

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^n, alors on peut prolonger la fonction $f[x_0, \ldots, x_n]$ en une fonction continue de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}$.

Démonstration.

Cela découle d'un passage à la limite et du théorème 2. $\square$

Différence divisée généralisée

Définition 1

Soient $x_0, x_1, ..., x_n$, $n+1$ réels distincts ou non, et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^n, on définit la différence divisée généralisée $f[x_0, x_1, ..., x_n]$ comme le prolongement par continuité de $f[x_0, x_1, ..., x_n]$ dans le cas où les points du support sont distincts.

Différence divisée généralisée

Corollaire 1

Si tous les x_i sont égaux, on a,

$$f[x_0, ..., x_n] = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},$$

sinon si il existe i tel que $x_i \neq x_0$, on a :

$$f[x_0, ..., x_n] = \frac{f[x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n] - f[x_0, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n]}{x_i - x_0}.$$

La quantité précédente ne dépend pas du x_i choisi et, quelque soit n, et quelque soient les $n+1$ points distincts ou non $x_0, ..., x_n$, quelque soit la permutation σ sur $0, ..., n$, on a

$$f[x_0, ..., x_n] = f[x_{\sigma(0)}, ..., x_{\sigma(n)}].$$

Différence divisée généralisée

Corollaire 2 (suite)

En particulier, pour tout couple (i, j) tel que $x_i \neq x_j$,

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f[x_0, \dots, x_n, /\{x_i\}] - f[x_0, \dots, x_n, /\{x_j\}]}{x_j - x_i}.$$

Corollaire

Corollaire 2

Supposons f de classe C^n sur $\mathbb{R}$. Alors,

$$F(x) = f[x_0, ..., x_{n-1}, x],$$

est continue sur $\mathbb{R}$.
Si de plus f est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$, alors, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et,

$$F'(x) = f[x_0, ..., x_{n-1}, x, x].$$

Preuve

Démonstration.

La continuité est un cas particulier du théorème 4. Si F est de classe C^{n+1}. On écrit,

$$
\begin{aligned}
f[x_0,\dots,x_{n-1},x,x+h] &= \frac{f[x_0,\dots,x_{n-1},x+h]-f[x_0,\dots,x_{n-1},x]}{h} \\
&= \frac{F(x+h)-F(x)}{h}.
\end{aligned}
$$

$\square$

Preuve

Démonstration.
La continuité est un cas particulier du théorème 4. Si F est de classe C^{n+1}. On écrit,

$$f[x_0,\dots,x_{n-1},x,x+h] = \frac{f[x_0,\dots,x_{n-1},x+h]-f[x_0,\dots,x_{n-1},x]}{h}$$
$$= \frac{F(x+h)-F(x)}{h}.$$

Mais,

$$f[x_0,\dots,x_{n-1},x,t],$$

est continue en t, donc,

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \to f[x_0,\dots,x_{n-1},x,x] \text{ quand } h \to 0.$$

□

Polynôme d'interpolation généralisé

Définition 2

On dit que le polynôme P interpole f sur le support $x_0, x_1, ..., x_n$ si,

$$\forall i \in 0, ..., n \quad \forall l \in 0, ..., \alpha_i - 1 \quad P^{(l)}(x_i) = f^{(l)}(x_i)$$

où α_i est le nombre d'occurences de x_i dans le support.

Polynôme d'interpolation généralisé

Définition 2

On dit que le polynôme P interpole f sur le support $x_0, x_1, \ldots, x_n$ si,

$$\forall i \in 0, \ldots., n \quad \forall l \in 0, \ldots, \alpha_i - 1 \quad P^{(l)}(x_i) = f^{(l)}(x_i)$$

où α_i est le nombre d'occurences de x_i dans le support.

Théorème 5

Pour toute fonction f de classe C^n, il existe un unique polynôme qui interpole f sur le support $\{x_0, \ldots., x_n\}$

Preuve

Démonstration

Soit $F : \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}^{n+1}$ l'application qui à tout vecteur $(a_0, a_1, ..., a_n)$ associe le vecteur constitué des valeurs de la fonction $\sum_{k=0}^{n} a_k (x_i)^k$ et de ses dérivées jusqu'à l'ordre $\alpha_i - 1$, au points $(x_i)_{0 \le i \le n}$.

Preuve

Démonstration

Soit $F : \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}^{n+1}$ l'application qui à tout vecteur $(a_0, a_1, ..., a_n)$ associe le vecteur constitué des valeurs de la fonction $\sum_{k=0}^{n} a_k(x_i)^k$ et de ses dérivées jusqu'à l'ordre $\alpha_i - 1$, au points $(x_i)_{0\leq i\leq n}$. Montrons que F est injective.

Preuve

Démonstration

Soit $F : \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}^{n+1}$ l'application qui à tout vecteur $(a_0, a_1, ..., a_n)$ associe le vecteur constitué des valeurs de la fonction $\sum_{k=0}^{n} a_k (x_i)^k$ et de ses dérivées jusqu'à l'ordre $\alpha_i - 1$, au points $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$. Montrons que F est injective. Soit $A = (a_0, a_1, ..., a_n)$. Supposons que

$$F(A) = 0.$$

Preuve

Démonstration

Alors si,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

$\square$

Preuve

Démonstration

Alors si,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

on a,

$$P^{(l)}(x_i) = 0 \ \forall i \in 0, ..., n, \forall l \in 0, ..., \alpha_i - 1.$$

$\square$

Preuve

Démonstration

Alors si,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

on a,

$$P^{(l)}(x_i) = 0 \ \forall i \in 0, ..., n, \forall l \in 0, ..., \alpha_i - 1.$$

Donc,

$$P(x) = Q(x) \prod_{i=0}^{d} (x - x_i)^{\alpha_i},$$

où d est le nombre de points distincts du support.

$\square$

Preuve

Démonstration

Alors si,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

on a,

$$P^{(l)}(x_i) = 0 \ \forall i \in 0, ..., n, \forall l \in 0, ..., \alpha_i - 1.$$

Donc,

$$P(x) = Q(x) \prod_{i=0}^{d} (x - x_i)^{\alpha_i},$$

où d est le nombre de points distincts du support. or P est de degré au plus n, donc $P = 0$ et F est injective.

□

Polynôme d'interpolation généralisé

Théorème 6
Le polynôme P défini par,

$$P(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \ldots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}),$$

interpole f sur le support $x_0, \ldots, x_n$.

Preuve

Démonstration

Si, $x_0 = x_1 = \ldots = x_n$, le résultat est vrai par le développement de Taylor.

Preuve

Démonstration

Si, $x_0 = x_1 = ... = x_n$, le résultat est vrai par le développement de Taylor. Sinon, on effectue une récurrence sur n.

Preuve

Démonstration

Si, $x_0 = x_1 = ... = x_n$, le résultat est vrai par le développement de Taylor. Sinon, on effectue une récurrence sur n. Pour $n = 0$, le résultat est vrai.

Preuve

Démonstration

Si, $x_0 = x_1 = ... = x_n$, le résultat est vrai par le développement de Taylor. Sinon, on effectue une récurrence sur n. Pour $n = 0$, le résultat est vrai. Supposons le résultat vrai jusqu'à l'ordre n.

Preuve

Démonstration

Si, $x_0 = x_1 = ... = x_n$, le résultat est vrai par le développement de Taylor. Sinon, on effectue une récurrence sur n. Pour $n = 0$, le résultat est vrai. Supposons le résultat vrai jusqu'à l'ordre n. Sans perte de généralité, on suppose que $x_0 \neq x_{n+1}$.

Preuve

Démonstration

Si, $x_0 = x_1 = ... = x_n$, le résultat est vrai par le développement de Taylor. Sinon, on effectue une récurrence sur n. Pour $n = 0$, le résultat est vrai. Supposons le résultat vrai jusqu'à l'ordre n. Sans perte de généralité, on suppose que $x_0 \neq x_{n+1}$. Soit p le polynôme d'interpolation sur le support $\{x_0, ..., x_n, x_{n+1}\}$. On vérifie que :

$$p(x) = \frac{x - x_0}{x_{n+1} - x_0} q_n(x) + \frac{x_{n+1} - x}{x_{n+1} - x_0} p_n(x),$$

où q_n est le polynôme d'interpolation sur le support $x_1, ...x_{n+1}$ et p_n est le polynôme d'interpolation sur le support $x_0, ...x_n$.

Preuve

Démonstration

On en déduit grâce à l'hypothèse de récurrence que le terme de degré $n+1$ de p est égal à :

$$\frac{1}{x_{n+1}-x_0}(f[x_1,\dots,x_{n+1}]-f[x_0,\dots,x_n]) = f[x_0,\dots,x_{n+1}]$$

Preuve

Démonstration

On en déduit grâce à l'hypothèse de récurrence que le terme de degré $n+1$ de p est égal à :

$$\frac{1}{x_{n+1}-x_0}(f[x_1,...,x_{n+1}]-f[x_0,...,x_n]) = f[x_0,...,x_{n+1}]$$

Soit :

$$R(x) = p(x) - f[x_0,....,x_{n+1}](x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n).$$

Preuve

Démonstration

On en déduit grâce à l'hypothèse de récurrence que le terme de degré $n+1$ de p est égal à :

$$\frac{1}{x_{n+1}-x_0}(f[x_1,...,x_{n+1}]-f[x_0,...,x_n]) = f[x_0,...,x_{n+1}]$$

Soit :

$$R(x) = p(x) - f[x_0,....,x_{n+1}](x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n).$$

Alors $R(x)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n.

Preuve

Démonstration

On en déduit grâce à l'hypothèse de récurrence que le terme de degré $n+1$ de p est égal à :

$$\frac{1}{x_{n+1}-x_0}(f[x_1,...,x_{n+1}]-f[x_0,...,x_n]) = f[x_0,...,x_{n+1}]$$

Soit :

$$R(x) = p(x) - f[x_0,....,x_{n+1}](x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n).$$

Alors $R(x)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Par ailleurs, $R(x)$ interpole f sur le support, $\{x_0,...,x_n\}$ car $\phi(x) = (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)$ vérifie,

$$\phi^{(l)}(x_i) = 0 \text{ pour tout } l \in 0,...,\alpha_i - 1.$$

Preuve

Démonstration

Par hypothèse de récurrence,

$$R(x) = f[x_0] + ... + f[x_0, x_1, ..., x_n](x - x_0)...(x - x_{n-1}),$$

donc,

$$p(x) = f[x_0] + ... + f[x_0, x_1, ..., x_n](x - x_0)...(x - x_{n-1}) + f[x_0, ..., x_{n+1}](x - x_0)(x$$

$\square$