Feuille de TD 2

Exercice 1. On considère l'équation suivante :

$$f(x) = x^4 - 10x^3 - 15x^2 + 24 = 0 \tag{1}$$

1. Faire une étude de la fonction f. En déduire le nombre de solutions de l'équation (1).
2. Pour chacune des solutions précédentes déterminer une condition initiale telle que la suite des itérés de Newton converge vers cette solution.
3. Que se passe-t-il si $x_0 > 0$ et x_0 assez proche de 0 ?

Exercice 2. On considère l'équation suivante :

$$f(x) = x^2 - l^2 = 0, \tag{2}$$

où $l > 0$. Déterminer des valeurs de a et b, $0 < a < l < b$, telles que pour tout $x_0 \in [a, b]$ la suite des itérés de la méthode de la corde converge vers l.

Exercice 3. Formules de Cardan

1. Montrer grâce à un changement de variable de la forme $y = x - x_0$ que toute équation cubique

   $$y^3 - ay^2 + by + c = 0$$

   peut se mettre sous la forme

   $$x^3 + px + q = 0. \tag{3}$$

2. Montrer que si

   $$x_1 = u + v, p = -3uv, q = -(u^3 + v^3)$$

   alors x_1 est solution de (3).
3. Écrire $U = u^3$, $V = v^3$ et montrer que U et V sont racines d'une équation quadratique dont on donnera les solutions en fonction de p et q.
4. A priori, U et V ont chacun trois racines cubiques, ce qui devrait conduire à neuf combinaisons différentes de la forme $u + v$. Montrer que la condition $p = -3uv$ limite à trois choix possibles : donner explicitement trois solutions de (3). Il peut être utile d'utiliser les racines cubiques complexes de 1, $j = e^{\frac{i2\pi}{3}}$, j^2, et de distinguer les cas selon le signe de $4p^3 + 27q^2$.
5. Construire un exemple simple d'équation cubique dont les trois racines sont réelles, et dont les formules de cardan utilisent des nombres complexes.

Exercice 4.

1. Quels sont les points fixes de

   $$g(x) = x - x^3 \text{ sur } I = [-1, 1] \text{ ?}$$

   Montrer que pour tout x_0 appartenant à I la suite des itérés de la méthode du point fixe converge vers 0.
2. Quels sont les points fixes de

   $$g(x) = x + x^3 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ ?}$$

   Montrer que pour tout $x_0 \neq 0$ la suite des itérés de la méthode du point fixe tend vers $\pm\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Dans les questions précédentes, peut-on appliquer le théorème de convergence locale du point fixe dans un voisinage de 0 ? Pourquoi ? Étudier le comportement de l'agorithme de convergence du point fixe pour :
$$g(x) = \alpha x + x^3 \text{ où } 0 < \alpha < 1$$

Exercice 5. On considère la fonction g définie par
$$\forall x \in I = [0,1], g(x) = 2x \text{ si } x \in [0, \frac{1}{2}],\ g(x) = 2(1-x) \text{ sinon.}$$

1. Vérifier que $g(I) \subset I$ et que g est continue sur I. Que peut on en conclure ?
2. Déterminer tous les points fixes de g. On suppose que $x_0 \in I$. Quelles sont les limites possibles de la suite des itérés du point fixe ?
3. Montrer que si la suite des itérés converge alors elle est constante à partir d'un certain rang.
4. Décrire les différents cas possibles de comportement de la suite, et montrer qu'il ne peut y avoir que trois cas possibles :
   (a) la suite possède une infinité de valeurs distinctes,
   (b) la suite est stationnaire après un nombre fini d'itérations,
   (c) la suite est cyclique mais non stationnaire.
5. On cherche maintenant à déterminer le comportement de la suite selon la valeur initiale de la suite x_0. Donner une partition de I selon le comportement de la suite, et à l'aide de la fonction g^p (composée p fois de g). On note U (resp, V, W)l'ensemble des conditions initiales telles que les cas a) (resp b),c)) ait lieu.
6. On admet l'expression suivante pour la fonction g^p, pour $p \geq 1$, et pour $i \in \{0, 2, 4, ..., 2^p - 4, 2^p - 2\}$
$$g^p(x) = 2^p(x - \frac{i}{2^p}) \text{ si } x \in [\frac{i}{2^p}, \frac{i+1}{2^p}], g(x) = 2^p(-x + \frac{i+2}{2^p}) \text{ si } x \in [\frac{i+1}{2^p}, \frac{i+2}{2^p}]$$
7. Montrer que
$$V = \bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} V_p$$
   où
$$\forall p \in \mathbb{N}^*, V_p = \{\frac{l}{3.2^{p-1}}; l \in 0, ..., 32^{p-1}\}.$$
   Montrer que V est dénombrable.
8. Peut on déterminer W de façon explicite ? Pourquoi est il inclus dans $\mathbb{Q}$? Montrer que $\frac{1}{7}$ et $\frac{1}{84}$ appartiennent à W.
9. Pourquoi les irrationnels de I appartiennent à U ?
10. Soi g définie sur I par
$$g(x) = -4x^2 + 4x.$$
    Peut-on prévoir le même type de comportement que pour l'équation précédente ?