Feuille de TD1

Exercice 1.
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$f(1) = 1,\ f(2) = 8,\ f(3) = 27, f(4) = 64.$$

Que vaut $P_3(x)$, le polynôme d'interpolation de f de degré 3 sur le support $\{x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4\}$?
Écrire sa forme de Lagrange puis sa forme de Newton.

Exercice 2.
Soit $(x_i)_{0\leq i\leq n}$, $n+1$ réels distincts, et $(\phi_i)_{0\leq i\leq n}$ la base des polynômes de Lagrange. Vérifier que les Φ_i forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 3.
Soit $(x_i)_{0\leq i\leq n}$, $n+1$ réels distincts. On considère la matrice suivante (matrice de Vandermonde) :

$$D_n = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & ... & x_0^n \\ 1 & x_1 & ... & x_1^n \\ & ... & & \\ 1 & x_n & ... & x_n^n \end{pmatrix}$$

1. Montrer que D_n est inversible.
2. Soit $(\phi_i)_{0\leq i\leq n}$ la base des polynômes de Lagrange. On suppose que pour tout $i \in \{0, ..., n\}$, on a :

$$\phi_i(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_{ij} x^j.$$

   Soit α la matrice de taille $(n+1) \times (n+1)$ définie par :

$$\alpha = (\alpha_{ij})_{0\leq i,j\leq n}.$$

   Déterminer une relation entre D_n et α.
3. Expliciter D_n^{-1} dans le cas $n = 2$.

Exercice 4.
1. Montrer que

$$f[x_0] = \frac{\det(f(x_0))}{\det(1)},$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & f(x_0) \\ 1 & f(x_1) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{pmatrix}},$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & f(x_0) \\ 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{pmatrix}}$$

2. Généraliser. On pourra utiliser les formules de Cramer.