Feuille de TD 3.

Exercice 1. Soit l'équation,

$$\left\{\begin{array}{rcl} y' & = & y^2 \\ y(0) & = & y_0 \end{array}\right.$$

1. La fonction $f(y) = y^2$ est-elle lipschitzienne ? Localement lipschitzienne ?
2. Montrer l'existence d'une unique solution maximale.
3. Résoudre l'équation.

Exercice 2. On considère l'équation,

$$\left\{\begin{array}{rcl} y' & = & \frac{1}{y} \\ y(0) & = & y_0 \end{array}\right.$$

1. La fonction $f(y) = \frac{1}{y}$ est elle lipschitzienne sur $\mathbb{R}$? Localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}$?
2. On suppose $y_0 \neq 0$. Montrer l'existence d'une unique solution maximale. Calculer la solution.
3. On suppose que $y_0 = 0$. On cherche une solution continue sur $[0, +\infty[$, et dérivable sur $]0, +\infty[$ telle que,

$$\left\{\begin{array}{rcl} y' & = & \frac{1}{y} \text{ sur }]0, +\infty[\\ y(0) & = & 0 \end{array}\right.$$

   Calculer les solutions de l'équation. Combien y-en a-t-il ?

Exercice 3.

Soit f une fonction continue. Dans cet exercice on s'intéresse à l'approximation numérique de la solution du problème

$$\left\{\begin{array}{rcl} u' & = & f(u) \\ u(0) & = & u_0 \end{array}\right. \tag{1}$$

où

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \text{ et } u : [0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$$

On suppose que l'équation (1) admet une unique solution définie sur $[0, +\infty[$. Soit $T > 0 \in \mathbb{R}$, $N \in N^*$ et $h = \frac{T}{N}$.

1. La méthode d'Euler explicite
   (a) Soit $(U_i)_{0\leq i\leq N}$, la solution obtenue par l'algorithme d'Euler explicite. Donner la formule permettant de calculer U_{i+1} à partir de U_i.
   (b) On suppose jusqu'à mention explicite du contraire que $f(u) = au$ où $a < 0 \in \mathbb{R}$. Expliciter dans ce cas U_{i+1} en fonction de U_i.
   (c) On suppose que $u_0 \neq 0$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur h pour que :
      – $(U_i)_{0\leq i\leq N}$ soit une suite de nombres « strictement alternée »(c'est à dire que ses éléments sont alternativement strictements positifs et strictements négatifs).
      – $(|U_i|)_{0\leq i\leq N}$ soit une suite de nombres strictement décroissante.
   (d) Toujours dans le cas où $f(u) = au$, donner la solution exacte de (1).
   (e) Déduire des questions précédentes une condition sur h pour que le comportement de la suite U_i soit en adéquation avec le comportement de la solution exacte.

(f) On sait d'après le cours que lorsque N tend vers $+\infty$ la méthode d'Euler explicite converge. En déduire :

$$\lim_{N\to+\infty}(1+\frac{aT}{N})^N.$$

Justifier votre réponse.

2. La méthode d'Euler implicite

   (a) Soit $(V_i)_{0\leq i\leq N}$, la solution obtenue par l'algorithme d'Euler implicite. Dans le cas où f est quelconque, donner la formule permettant de relier V_{i+1} et V_i. Donner en une phrase la démarche mathématique à suivre pour déterminer V_{i+1} à partir de V_i.

   (b) On suppose maintenant que $f(u) = au$ avec $a < 0$. Expliciter dans ce cas V_i en fonction de u_0.

   (c) Étudier le signe de V_i, et le sens de variation de $|V_i|$. Ces résultats vous semblent-ils en adéquation avec le comportement de la solution exacte ?

   (d) On sait d'après le cours que lorsque N tend vers $+\infty$ la méthode d'Euler implicite converge. En déduire la valeur de :

$$\lim_{N\to+\infty}(\frac{1}{1-\frac{aT}{N}})^N.$$

   Justifier votre réponse.

3. On suppose que $f(u) = -u^3$.

   (a) Montrer que quelque soit la valeur de u_0, il existe $t_0 > 0$ et une unique fonction u définie sur $[0, t_0[$ qui soit solution du problème (1).

   (b) Résoudre l'équation (1). Quel est le comportement asymptotique de $u(t)$?

   (c) Soit U_n la suite construite par la méthode d'Euler explicite. On suppose que $u_0 = U_0 > 0$. Donner une condition suffisante sur h et u_0 pour que la suite U_n soit strictement positive et décroissante.

4. Reprendre la question précédente avec $f(u) = -u^p$, $p \in \mathbb{N}$, $p > 3$.

Exercice 4. L'équation d'un système masse-ressort.
Le système masse-ressort est constitué d'un ressort, dont une extrémité est fixée et l'autre extrémité est reliée à un objet de masse m.

1. On suppose que le ressort est positionné de manière horizontale, et qu'un dispositif physique permet de négliger les forces de frottements, alors le système masse-ressort est régi par l'équation suivante,

$$x'' = -\frac{k}{m}x,$$

   où k est le coefficient de raideur du ressort. La variable x représente la position de l'objet, le 0 étant fixé à l'extrémité du ressort où se trouve l'objet, lorsque celui-ci est au repos. Résoudre l'équation. Quel est le comportement asymptotique du système ?

2. On suppose maintenant que les frottements ne sont plus négligeables. L'équation devient alors,

$$x'' = -\frac{\lambda}{m}x' - \frac{k}{m}x$$

où λ est le coefficient de frottement.
On suppose que $\lambda^2 < \frac{4k}{m}$. Résoudre cette équation. Quel est le comportement asymptotique du système ?

Exercice 5. On considère l'équation,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & \sin(y) \\ y(0) & = & y_0 \end{array} \right.$$

1. Démontrer que pour tout y_0 il existe une unique solution de l'équation.
2. Pour une solution donnée, une trajectoire est l'ensemble des valeurs $y(t)_{t\in\mathbb{R}}$. On admet le résultat suivant : deux trajectoires non confondues n'ont aucun point en commun. Déterminer le comportement asymptotique des solutions en fonction de la condition initiale y_0.

Exercice 6. On considère le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_t & = & -u^3 + u \\ u(0) & = & u_0 \end{array} \right.$$

1. Montrer l'existence et l'unicité d'une solution maximale.
2. Déterminer les solutions stationnaires.
3. Déterminer sans calcul analytique le comportement asymptotique du système.
4. Déterminer analytiquement l'expression de la solution du système.

Exercice 7. Equation du pendule
L'équation donnant le mouvement du pendule est :

$$u'' + \omega^2 \sin(u) = 0$$

où :

$$\omega = \frac{g}{l}.$$

Avec g constante de gravitation et l la longueur du pendule.

1. Les valeurs : $u(0) = u_0$ et $u'(0) = u_1$ étant fixées, montrer l'existence et l'unicité d'une solution maximale.
2. Quelles sont les solutions stationnaires du système ?
3. On pose $E(u, u') = \frac{1}{2}(u'^2) + \omega^2(1 - \cos(u))$. Calculer $\frac{d}{dt}E$. Qu'en concluez-vous ? (Faire une étude aussi exhaustive que possible des solutions du système.)

Exercice 8. On considère le système suivant,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & ax - bxy \\ y' & = & cxy - dy \end{array} \right. \qquad (2)$$

Ce système décrit l'évolution d'un système de proie-prédateurs et a été introduit indépendamment par Lotka et Volterra respectivement en 1925 et 1926.

Dans ce système :
- x représente la population de proies, y la population de prédateurs.
- a le taux de reproduction des proies, b son taux de mortalité due aux prédateurs.
- d le taux de mortalité des prédateurs, c le taux reproduction des prédateurs en fonction des proies mangées.

1. Soit
$$F(x,y) = \left\{ \begin{array}{l} ax - bxy \\ cxy - dy \end{array} \right.$$
Calculer la matrice jacobienne de F et en déduire l'existence et l'unicité d'une solution locale pour le système (1).
2. Déterminer les solutions stationnaires ($x' = 0$, $y' = 0$).
3. Déterminer les solutions de l'équation vérifiant $x = 0$.
4. Déterminer les solutions de l'équation vérifiant $y = 0$.
5. Pour une condition initiale donnée, l'ensemble $(x(t), y(t))_{t \in A}$, où $A \subset \mathbb{R}$, est l'intervalle maximal sur lequel la solution est définie, définit une trajectoire. On admet que deux trajectoires ne peuvent pas s'intersecter. Déduire de ce qui précède que si $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$ alors $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$ pour tout $t > 0$.
6. Montrer que toute solution telle que $(x_0, y_0) \in B = \{\frac{d}{c}\} \times]\frac{a}{b}, +\infty[$ coupe B une infinité de fois.
7. Soit $(x(t), y(t))$ une solution, calculer :
$$\frac{d}{dt}(by + cx - aln(y) - dln(x)).$$
8. Que peut-on en conclure ?

Exercice 9. Système de FitzHugh-Nagumo.
On considère le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_t & = & f(u) - v \\ v_t & = & au - bv + c \end{array} \right. \tag{3}$$

où
$$f(u) = -u^3 + 3u \text{ et } a, b, c > 0$$

1. Montrer l'existence et l'unicité d'une solution maximale.
2. Déterminer les solutions stationnaires.
3. Faire une étude la plus exhaustive possible de la solution du système.

Exercice 10. Système de Hodgkin-Huxley. On considère le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} C\dfrac{dV}{dt} = -\bar{g}_K n^4(V - E_K) - \bar{g}_{Na} m^3 h(V - E_{Na}) - \bar{g}_L(V - E_L) + I \\ \dfrac{dm}{dt} = \alpha_m(V)(1 - m) - \beta_m(V)m \\ \dfrac{dn}{dt} = \alpha_n(V)(1 - n) - \beta_n(V)n \\ \dfrac{dh}{dt} = \alpha_h(V)(1 - h) - \beta_h(V)h \end{array} \right.$$

1. Montrer l'existence et l'unicité d'une solution maximale définie sur un intrevalle I.
2. Montrer que pout tout $t \in I$, $m(t), n(t), h(t) \in [0, 1]$.
3. Faire une étude la plus exhaustive possible de la solution du système.

Exercice 11. Système de Lorenz.
On considère le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_t &=& \sigma(y - x) \\ y_t &=& \rho x - y - xz \\ z_t &=& xy - \beta z \end{array} \right. \tag{4}$$

où $\sigma, \rho, \beta > 0$.

1. Montrer l'existence et l'unicité d'une solution maximale.
2. Déterminer les solutions stationnaires du système.
3. Faire une étude la plus exhaustive possible de la solution du système.

Exercice 12. Système de Rössler.
On considère le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_t &=& -y - z \\ y_t &=& x + ay \\ z_t &=& b + z(x - c) \end{array} \right. \tag{5}$$

où $a, b, c > 0$.

1. Montrer l'existence et l'unicité d'une solution maximale.
2. Déterminer les solutions stationnaires du système.
3. Faire une étude la plus exhaustive possible de la solution du système.

Exercice 13. Système de Hindmarsh-Rose
On considère le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_t &=& y + \phi(x) - z + I \\ y_t &=& \psi(x) - y \\ z_t &=& \epsilon(s(x - e) - z) \end{array} \right. \tag{6}$$

où

$$\phi(x) = -ax^3 + bx^2,$$

$$\psi(x) = c - dx^2,$$

$s = 4, e = -\frac{8}{5}, a = 1, b = 3, c = 1, d = 5, \epsilon = 0.001.$

1. Montrer l'existence et l'unicité d'une solution maximale.
2. Déterminer les solutions stationnaires du système.
3. Faire une étude la plus exhaustive possible de la solution du système.