Feuille de TP3

Soit $g(x)$ la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par :

$$g(x) = \mu x(1 - x), \qquad \mu \in [0, 4]. \tag{1}$$

On s'intéresse à la convergence de la méthode du point fixe, qui définit la suite x_n par :

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

1. On suppose que $\mu < 1$

   (a) Déterminer les points fixes de g.

   (b) Pour toute valeur de x_0, déterminer en utilisant les résultats du cours le comportement de la suite définie par l'algorithme du point fixe.

   (c) Représenter l'allure des fonctions $g(x)$ et x, et représenter graphiquement, pour un x_0 fixé, les premières valeurs de la suite x_n.

   (d) Implémenter une classe java $PFLogistique1$ construisant la suite des itérés des points fixes, jusqu'à ce que $|g(x) - x| < eps$ ou que le l'on ait atteint un nombre d'itérations supérieur ou égal à nmax. La fonction devra également récupérer toutes les valeurs de la suite dans un fichier texte.

   (e) Pour quelques valeurs de μ et quelques valeurs de x_0, lancer l'algorithme de point fixe.

2. On suppose que $1 \leq \mu \leq 2$

   (a) Déterminer les points fixes de g.

   (b) Les théorèmes du cours vous permettent-ils de conclure sur la convergence de la suite x_n ? Justifier votre réponse.

   (c) Étudier théoriquement le comportement de la suite et étayer vos raisonnements par des simulations numériques.

3. On suppose que $2 < \mu \leq 4$

   (a) Déterminer les points fixes de g.

   (b) Dans les cas $\mu = 2.5, 3.1, 3.49, 3.55, 3.57, 3.8, 3.9, 4$. Lancer l'algorithme de point fixe sur quelques valeurs de x_0 que vous aurez choisies. Récupérer toutes les suites obtenues dans des fichiers textes.

   (c) En observant les suites obtenues essayez de formuler des hypothèses sur le comportement asymptotique de la suite x_n.

   (d) Implémenter une classe java $PFLogistique$ qui en plus de ce que fait la fonction $PFLogistique1$ représente la fonction g, la droite d'équation $y = x$ et la suite des points sur un graphique.