Feuille de TP3

Le but de ce TP est d'implémenter méthode d'intégration de Gauss-Legendre pour approcher les intégrales de fonctions continues sur un intervalle compact $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.

La méthode d'intégration de Gauss-Legendre consiste à construire un support d'interpolation $\{x_0, ..., x_n\}$, des points $x_{n+1} = x_0, x_{n+2} = x_1, ..., x_{2n+1} = x_n$ et des fonctions

$$\Psi_j = \prod_{k=0}^{j} (x - x_k)_{n \leq j \leq 2n},$$

telles que l'on ait :

$$\int_{-1}^{1} \Psi_j(x)dx = 0 \text{ pour } n \leq j \leq 2n.$$

Pour cela :

- on construit les polynômes de Legendre par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ L_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x L_n(x) - \frac{n}{n+1} L_{n-1}(x)$$

  avec les termes initiaux

$$L_0(x) = 1,\ L_1(x) = x.$$

- Les x_i sont alors les $n + 1$ zéros de $L_{n+1}(x)$.
- On définit pour tout i dans $\{0, .., n\}$,

$$W_i = \frac{2}{(n+1)L'_{n+1}(x_i)L_n(x_i)}.$$

- La formule de quadrature est alors

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n} W_i f(x_i).$$

1. Écrire un programme java qui renvoie la valeur approchée de $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ par la méthode Gauss-Legendre à $n + 1$ points.
2. Calculer numériquement, grâce à cette fonction les valeurs de :

$$\int_{-1}^{1} \cos(x)dx,\ \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}dx,\ \text{et } \int_{-1}^{1} \exp(x)dx.$$

   Vérifier vos résultats en calculant analytiquement les intégrales précédentes.
   Caluler numériquement

$$\int_{-1}^{1} \frac{\exp(x)\cos(x^2)}{1+x^4}dx.$$

3. Montrer que

$$\int_{a}^{b} f(y)dy = (\frac{b-a}{2}) \int_{-1}^{1} f(\frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2})dx$$

   En déduire l'écriture d'une méthode qui calcule la valeur approchée de $\int_a^b f(x)dx$ en utilisant la méthode de Gauss-Legendre à $n + 1$ points.
4. Calculer numériquement :

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)dx \text{ puis } \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\exp(x)\cos(x^2)}{1+x^4}dx.$$