Topologie

2015-2016

Table des matières

Chapitre 1

Espaces topologiques

La topologie est présente dans toutes les branches de l'analyse moderne et est indispensable à tous ceux qui veulent pratiquer les mathématiques au delà du niveau de la licence. Elle s'attache à définir d'une manière générale les notions de continuité, de limites... Ces notions déjà étudiées dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$ font appel à la notion de distances. La généralisation de la notion de distances permet de définir les espaces métriques, puis la notion d'espaces métriques complets (Chapitre 2). Cependant les mathélaticiens on été amenés à généraliser les notions de limites ou de continuité sans faire appels à la notion de distances. Cela passe par l'introduction des voisinages et des ouverts, et c'est l'objet des espaces topologiques (Chapitre 1). Les notions de connexité (Chapitre 3) et de compacité (Chapitre 4) appraissent naturellement comme la généralisation de certaines propriétés de sous ensembes de $\mathbb{R}$. Enfin, les espaces fonctionnels (Chapitre 5) constituent un exemple d'application important de ces concepts. D'une manière plus générale, la topologie fait partie des enseignements qui fixent un saut au niveau de l'abstraction par rapport aux enseignements de la deuxième année. Elle permet ainsi d'acquérir par la pratique, une méthode de raisonnement puissant. Partant d'un nombre limité d'axiomes, elle permet d'aboutir à des vérités mathématiques par déductions logiques. En ce sens, elle apporte un développement de la raison qui peut être utilisé dans toute science.

1.1 Définitions et premières propriétés

1.1.1 Ouverts

Définition 1. *On appelle espace topologique un couple $(X, \mathcal{T})$ où X est un ensemble et $\mathcal{T}$ est une famille de parties de X, appelées ouverts, vérifiant les propriétés suivantes :*

(O1) $\emptyset, X$ *sont des ouverts,*

(O2) *toute intersection finie d'ouverts est un ouvert,*

(O3) *toute réunion d'ouverts est un ouvert.*

Exemples

1. L'ensemble $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(X)$ formé par l'ensemble des parties de X définit une topologie appelée la topologie discrète. Un espace muni de la topologie discrète est appelé un espace discret. L'ensemble $\mathcal{T}_g = \{\emptyset, X\}$ définit une topologie appelée la topologie grossière.
2. Soit X un ensemble, alors $\mathcal{T}_{cf} = \emptyset \cup \{U \subset X; U^c \text{ est fini}\}$ définit une topologie sur X appelée la topologie cofinie. Si l'ensemble X est fini la topologie cofinie est la topologie discrète. Si l'ensemble X est infini deux ouverts quelconques de la topologie cofinie ont une intersection non vide.
3. Dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des parties constituées d'unions d'intervalles ouverts et de l'ensemble vide définit une topologie appelée la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.

1.1.2 Fermés

Définition 2. *On appelle complémentaire de A dans X et on note $\complement_X A$ ou bien A^c lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité l'ensemble $\{x \in X; x \notin A\}$.*

Définition 3. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. On appelle fermé, toute partie de X dont le complémentaire est ouvert.*

Proposition 1. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. La famille des fermés de X vérifie les propriétés suivantes :*

(F1) $\emptyset, X$ *sont fermés.*

(F2) *L'union d'une famille finie de fermés est un fermé.*

(F3) *L'intersection d'une famille quelconque de fermés est un fermé.*

Démonstration. Elle se déduit par passage au complémentaire à partir de $(O1)$, $(O2)$ et $(O3)$. $\square$

1.1.3 Voisinages

Définition 4. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $x \in X$. On dit qu'une partie V de X est un voisinage de x si elle contient un ouvert qui contient x.*

Exemple. *Par exemple, dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle et $x \in \mathbb{R}$, $]x-2, x+1]$ est un voisinage de x.*

Proposition 2. *Pour qu'une partie d'un espace topologique soit un ouvert, il faut et il suffit qu'il soit voisinage de chacun de ses points.*

Démonstration. Si O est un ouvert, c'est un voisinage de chacun de ses points. Réciproquement, si O est voisinage de chacun de ses points, alors, pour chaque $x \in O$, il existe un ouvert O_x tel que $x \in O_x \subset O$. On a donc

$$O = \cup_{x \in O}\{x\} \subset \cup_{x \in O} O_x \subset O.$$

Ce qui montre que O est ouvert. □

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. On note $\mathcal{V}(x)$ la famille des voisinages de x, on a le résultat suivant.

Proposition 3. *Les familles $\mathcal{V}(x)$ de voisinages de x, $x \in X$ vérifient les propriétés suivantes :*

(V1) *Pour tout $x \in X$,$\mathcal{V}(x) \neq \emptyset$ et pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, on a $x \in V$.*

(V2) *Toute partie de X qui contient un élément de $\mathcal{V}(x)$ appartient à $\mathcal{V}(x)$.*

(V3) *L'intersection de deux éléments de $\mathcal{V}(x)$ est élément de $\mathcal{V}(x)$.*

(V4) *Pour tout $x \in X$ et tout $V \in \mathcal{V}(x)$, il existe $W \in \mathcal{V}(x)$ tel que pour tout $y \in W$, on ait $\mathcal{V} \in V(y)$.*

Démonstration. Les trois premières propriétés sont laissées en exercice. Pour la quatrième, soit O un ouvert tel que $x \in O \subset V$. On pose $W = O$. Alors $W \in \mathcal{V}(x)$, et pour tout $y \in W$, $V \in \mathcal{V}(y)$. □

Remarque 1. *On pourrait définir les topolologies en partant des propriétés $V1, V2, V3$ et $V4$.*

1.1.4 Bases d'ouverts, bases de voisinages

Les ouverts d'un espace topologique ne sont parfois pas facilement identifiables et il est souvent plus simple de décrire des ensembles particuliers qui vont générer la topologie par union quelconque. Par exemple les ouverts de $\mathbb{R}$ s'écrivent comme union d'intervalles ouverts. On verra également que les ouverts d'espaces métriques s'écrivent comme union de boules ouvertes.

Définition 5. *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{B}$ une famille d'ouverts. On dit que $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de $(X, \mathcal{T})$ si tout ouvert non vide de X est réunion d'ouverts appartenant à $\mathcal{B}$.*

En général, il n'y a pas unicité de la base d'ouverts.

Proposition 4 (*). *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ une famille d'ouverts. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *$\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de X.*
2. *Pour tout ouvert U et tout $x \in U$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subset U$.*

Démonstration. Montrons d'abord l'implication $1 \Rightarrow 2$. Si $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts, alors tout ouvert U peut s'écrire sous la forme $U = \cup_{i \in J} B_i$. Donc quelque soit $x \in U$, il existe $i \in J$ tel que $x \in B_i \subset U$. Montrons maintenant la réciproque $2 \Rightarrow 1$. Soit U un ouvert. Alors pour tout $x \in U$, il existe un ouvert $B_x \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B_x \subset U$. On a alors, $U = \cup_{x \in U}\{x\} \subset \cup_{x \in U} B_x \subset U$. □

Remarque 2 (*). *Par un raisonnement analogue, on voit donc que U est ouvert si et seulement pour tout élément x de U, il existe un élément B de la base d'ouverts tel que*

$$x \in B \subset U.$$

Proposition 5 (*). *Si $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts, alors on a les propriétés suivantes :*

(B1) $\forall x \in X$, $\exists B \in \mathcal{B}$ *tel que* $x \in B \subset X$.

(B2) *Pour tout* $x \in X$, $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ *tels que* $x \in B_1 \cap B_2$, $\exists B \in \mathcal{B}$ *tel que* $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.

[*]

Démonstration. La propriété $(B1)$ résulte du fait que X est ouvert. La propriété $(B2)$ résulte du fait que l'intersection des deux ouverts B_1 et B_2 est ouvert. □

On a également la proposition réciproque suivante.

Proposition 6. *Soient X un ensemble et $\mathcal{B}$ une famille de parties de X vérifiant les propriétés $(B1)$ et $(B2)$ alors il existe une unique topologie $\mathcal{T}$ sur X pour laquelle $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts.*

Démonstration. Il suffit de prendre,

$$\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X;\ \text{tel que } U \text{ soit réunion d'ensemble appartenant à } \mathcal{B}\}.$$

Vérifions que la famille $\mathcal{T}$ vérifie les propriétés $(O1)$, $(O2)$ et $(O3)$.

$\underline{(O1)}$

$\emptyset \in \mathcal{T}$ par construction et $X \in \mathcal{T}$ grâce à la propriété $(B1)$.

$\underline{(O2)}$

La propriété $(O2)$ est vérifiée de manière évidente.

$\underline{(O3)}$
Soient U_1,...U_n des éléments de $\mathcal{T}$. On a :

$$\begin{aligned}\bigcap_{i=1}^{n} U_i &= \bigcap_{i=1}^{n} \bigcup_{j_i \in J_i} B_{ij_i} \text{ (avec} B_{ij_i} \in \mathcal{B}) \\ &= \bigcup_{j_1 \in J_1, \ldots, j_n \in J_n} B_{1j_1} \cap \ldots \cap B_{nj_n} \\ &= \bigcup_{j_1 \in J_1, \ldots, j_n \in J_n} \bigcup_{x \in B_{1j_1} \cap \ldots \cap B_{nj_n}} \{x\}\end{aligned}$$

Or, d'après la propriété $(B2)$ pour tout $x \in B_{1j_1} \cap \ldots \cap B_{nj_n}$, il existe $B_x \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B_x \subset B_{1j_1} \cap \ldots \cap B_{nj_n}$.
On en déduit que :

$$\bigcap_{i=1}^{n} U_i = \bigcup_{j_1 \in J_1, \ldots, j_n \in J_n} \bigcup_{x \in B_{1j_1} \cap \ldots \cap B_{nj_n}} B_x.$$

Ce qui montre que $\mathcal{T}$ est une topologie. Vérifions que c'est l'unique topologie dont $\mathcal{B}$ est une base par double inclusion. Soit $\mathcal{T}_1$, une topologie dont $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts. Soit $O \in \mathcal{T}$. Alors, il exite une famille d'indices I telle que :

$$O = \bigcup_{i \in I} B_i, B_i \in \mathcal{B}.$$

Or pour tout i, $B_i \in \mathcal{T}_1$. Donc $O \in \mathcal{T}_1$. Réciproquement, supposons que $O \in \mathcal{T}_1$. Alors, il existe de même une famille d'indices I telle que

$$O = \bigcup_{i \in I} B_i, B_i \in \mathcal{B},$$

ce qui montre que $O \in \mathcal{T}$.

□

Exemples (*). 1. ***Topologie de l'ordre***. *Soit $(X, \leq)$ un ensemble totalement ordonné. Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des parties de X formé par les intervalles ouverts, les demi-droite ouvertes et X. Alors $\mathcal{B}$ vérifie les axiomes $(B1)$ et $(B2)$. L'unique topologie sur X pour laquelle $\mathcal{B}$ est une base est appelée la topologie de l'ordre.*

2. ***La droite réelle***. *L'ensemble $\mathbb{R}$ est totalement ordonné. Alors $\mathcal{B}$ vérifie les propriétés* 1 *et* 2 *ci-dessus. La topologie de l'ordre sur $\mathbb{R}$ est appelée la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ (ou euclidienne). On peut remarquer que les intervalles ouverts forment également une base d'ouverts de la topologie usuelle.*

3. ***La droite réelle achevée***. *Soit $\bar{\mathbb{R}} = \{\mathbb{R} \cup +\infty \cup -\infty\}$. L'ensemble $\bar{\mathbb{R}}$ est totalement ordonné. La topogie de l'ordre sur $\bar{\mathbb{R}}$ est appelée la topologie usuelle de $\bar{\mathbb{R}}$.*

Définition 6. *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $x \in X$. On appelle base de voisinages de x toute famille $\mathcal{B}(x)$ de voisinages de x telle que pour tout voisinage V de x, il existe $W \in \mathcal{B}(x)$ tel que $W \subset V$.*

Notez que si $\mathcal{B}(x)$ est une base de voisinages de x alors on a,

$$\mathcal{V}(x) = \{V \subset X;\ \text{il existe } W \in \mathcal{B}(x) \text{ avec } W \subset V\}.$$

Exemple. *Si $\mathbb{R}$ est muni de la topologie usuelle et $x \in \mathbb{R}$, l'ensemble des intervalles de la forme $]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[$ constitue une base de voisinages du point x formée d'ensembles ouverts.*

Proposition 7 (*)**.** *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *$\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de X.*
2. *Pour tout $x \in X$, la famille $\{U \in \mathcal{B}; x \in U\}$ est une base de voisinages de x.*

Démonstration. Montrons d'abord l'implication $1 \Rightarrow 2$. On suppose que $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de X. Soit $x \in X$, et V un voisinage de x. Alors V contient un ouvert O qui contient x. On peut alors écrire O comme l'union d'éléments de $\mathcal{B}$. Il existe une famille $B_i, i \in I$, d'éléments de $\mathcal{B}$ telle que

$$O = \cup_{i \in I} B_i.$$

Mais alors, il existe $i \in I$ tel que $x \in B_i$. Donc,

$$x \in B_i \subset O \subset V.$$

Donc pour tout $x \in X$, la famille $\{U \in \mathcal{B}; x \in U\}$ est une base de voisinages de x. Montrons maintenant l'implication $2 \Rightarrow 1$. Supposons que pour tout $x \in X$, la famille $\{U \in \mathcal{B}; x \in U\}$ soit une base de voisinages de x. Soit O un ouvert de X. Alors, O est un voisinage de chacun de ses points, et donc pour tout $x \in O$, il existe $B_x \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B_x \subset O$. Alors,

$$O = \cup_{x \in O}\{x\} \subset \cup_{x \in O}\{B_x\} \subset O.$$

Ce qui prouve que $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de O. $\square$

1.2 Adhérence, intérieur, frontière

1.2.1 Adhérence

Définition 7. 1. *On dit que x est adhérent à A lorsque tout voisinage de x rencontre A.*

2. *On dit que x est un point d'accumulation de A si tout voisinage de x dans X contient un point de A distinct de x lui même.*
3. *On dit qu'un point $a \in A$ est un point isolé dans A s'il existe un voisinage V de a dans X tel que $V \cap A = a$.*

Remarque 3. *Donc x est adhérent à A équivaut à dire que x est un point d'accumulation ou x est isolé.*

Exemple. *Dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, on considère l'esemble $A = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\}$. Alors, on vérifie que 1 est un point isolé de A, et 0 est un point d'accumulation de A. Les deux sont adhérents à A.*

Définition 8. *L'ensemble des points adhérents à A s'appelle l'adhérence de A et se note $\bar{A}$.*

Proposition 8. *L'adhérence $\bar{A}$ est le plus petit fermé qui contient A.*

Démonstration. On montre d'abord que $\bar{A}$ est fermé. Pour cela, on montre que $(\bar{A})^c$ est ouvert. Soit $x \notin \bar{A}$. Alors il existe un ouvert U contenant x tel que $U \cap A = \emptyset$. Alors $U \subset (\bar{A})^c$ et donc $(\bar{A})^c$ est voisinage de chacun de ses points, il est donc ouvert.
Montrons maintenant que c'est le plus petit fermé contenant A. Soit B un fermé contenant A. On veut montrer que si $x \in \bar{A}$ alors $x \in B$. Supposons que $x \notin B$. Alors puisque B est fermé, il existe un ouvert U tel que $x \in U \subset B^c$. Alors $x \notin \bar{A}$. Donc si $x \in \bar{A}$ alors $x \in B$ □

Corollaire 1. *Une partie A de X est fermée si et seulement si $A = \bar{A}$.*

Démonstration. Si A est fermé alors $\bar{A} \subset A$ d'après la proposition précédente donc $\bar{A} = A$. Réciproquement si $A = \bar{A}$ alors A est fermé. □

Corollaire 2. *On a :*

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B} \text{ et } \overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap B.$$

Définition 9. *On dit qu'une partie A est dense dans X si $\bar{A} = X$.*

Définition 10. *On dit qu'un espace topologique est séparable s'il admet une partie dénombrable et dense.*

1.2.2 Intérieur

Définition 11. *On dit que x est intérieur à A si A est un voisinage de x. L'ensemble des points intérieurs à A s'appelle l'intérieur de A et se note $\mathring{A}$.*

Définition 12. *L'ensemble des points intérieurs à A s'appelle l'intérieur de A et se note $\mathring{A}$.*

Proposition 9. *L'intérieur de A est le plus grand ouvert inclus de A.*

Démonstration. Soit $x \in \mathring{A}$. Alors il existe un ouvert U tel que $x \in U \subset A$. Mais alors $U \subset \mathring{A}$ et donc $\mathring{A}$ est un voisinage de x. Donc $\mathring{A}$ est un voisinage de chacun de ses points, c'est donc un ouvert.
Soit maintenant un ouvert U inclus dans A. Alors pour tout $x \in U$, on a $x \in \mathring{A}$. Donc $U \subset \mathring{A}$. □

Proposition 10. *Soit A un sous ensemble d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$. Alors*

$$\overset{\circ}{\widehat{A^c}} = (\bar{A})^c \text{ et } \overline{A^c} = (\mathring{A})^c.$$

Démonstration. Si $x \in (\bar{A})^c$, alors par définition, il existe un voisinage de x qui n'intersecte pas A. Donc A^c est un voisinage de x, donc $x \in \overset{\circ}{\widehat{A^c}}$. Et réciproquement. Si $x \in \overline{A^c}$, alors quelque soit le voisinage V de x, $V \cap A^c \neq \emptyset$. Donc x n'est inclus dans aucun ouvert contenu dans A, donc $x \notin \mathring{A}$. Et réciproquement. □

1.2.3 Frontière

Définition 13. *On dit que x est un point frontière de A si $x \in \bar{A}$ et $x \in \overline{A^c}$.*

Définition 14. *L'ensemble des points frontière de A s'appelle la frontière de A et se note Fr(A).*

Proposition 11. *On a $Fr(A) = \bar{A} - \mathring{A}$.*

Démonstration. On a : $Fr(A) = \bar{A} \cap \overline{A^c} = \bar{A} \cap (\mathring{A})^c = \bar{A} - \mathring{A}$. □

Exemple. *L'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle est séparable car $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} - \{\mathbb{Q}\}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.*

Proposition 12 (*). *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, $\mathcal{B}$ une base d'ouverts de X et A un sous-ensemble de X. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *A est dense dans X.*
2. *Pour tout ouvert non vide U de X, on a $A \cap U \neq \emptyset$.*

3. *Pour tout $B \in \mathcal{B}$ tel que $B \neq \emptyset$, on a $A \cap B \neq \emptyset$.*

Démonstration. On vérifie sans difficultés que $1 \Rightarrow 2$ et que $2 \Rightarrow 3$. Montrons que $3 \Rightarrow 2$. Soit $x \in X$ et soit V un voisinage de x. Alors il existe un ouvert O, tel que $x \in O \subset V$. Par ailleurs, il existe une famille d'indices I telle que $O = \cup_{i \in I} B_i$ avec $B_i \subset \mathcal{B}$ pour tout i. Donc il existe $i \in I$ tel que $x \in B_i \subset V$. Mais $B_i \cap A \neq \emptyset$ donc $V \cap A \neq \emptyset$. □

Proposition 13 (*). *Soit X un espace topologique séparable. Alors toute famille d'ouverts non vides deux à deux disjoints de X est au plus dénombrable.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un ensemble de points dense dans X. Soit $U_i, i \in I$ une famille d'ouverts non vides deux à deux disjoints de X. Alors pour tout $i \in I$, il existe n tel que $x_n \in U_i$. Soit $n_i = \inf\{n \in \mathbb{N}; x_n \in U_i\}$. Alors $i \to n_i$ est une injection de I dans $\mathbb{N}$. Donc, I est au plus dénombrable. □

1.3 Limites

1.3.1 Limites d'une suite

Définition 15. *On dit qu'un point l de X est limite de la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ si pour tout voisinage V de l dans X, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait, $x_n \in V$.*

1.3.2 Espaces séparés et unicité de la limite

Définition 16. *Soit X un espace topologique. On dit que X est séparé, si quelque soient deux éléments distincts $x, y \in X$, il existe V_x voisinage de x et V_y voisinage de y tels que $V_x \cap V_y = \emptyset$.*

Proposition 14. *Soit X un espace topologique séparé. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X. Si la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite l, cette limite est unique. On dit alors que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l quand n tend vers $+\infty$, et on note :*

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = l.$$

Démonstration. Supposons que la suite admette deux limites distinctes l_1 et l_2. Alors, puisque X est séparé il existe un voisinage V_1 de l_1 et un voisinage V_2 de l_2 tels que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Soit N_1 tel que $x_n \in V_1$ dès que $n \geq N_1$ et soit N_2 tel que $x_n \in V_2$ dès que $n \geq N_2$. Alors $x_n \in V_1 \cap V_2$ dès que $n \geq V_1 \cap V_2$. C'est une contradiction. □

1.3.3 Limites et adhérence

Théorème 1. *Soit X un espace topologique, $A \subset X$ et $x \in X$.*

1. *S'il existe une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ dans A convergeant vers x, alors $x \in \bar{A}$.*
2. *Si x admet une base dénombrable de voisinages ouverts et si $x \in \bar{A}$, alors il existe une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ dans A convergeant vers x.*

Démonstration. 1. Il suffit de d'écrire la définition de la convergence.

2. Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base dénombrable de voisinages de x. On pose $W_n = \cap_{k=0}^{n} V_k$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit a_n tel que $a_n \in W_n \cap A$. Cela est possible puisque $x \in \bar{A}$. Soit maintenant W un voisinage de x. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $W_n \subset V_n \subset W$. Alors pour tout $p \geq n$, on a, $a_p \in W$. Ce qui montre que la suite a_n converge vers x.

□

Remarque 4. *On verra que dans un espace métrique les proprétés précédentes sont équivalentes puisque dans un espace métrique tout point admet une base dénombrable de voisinages ouverts.*

On déduit du théorème **??**, le corollaire suivant :

Corollaire 3. *Soit X un espace topologique. Supposons que tout $x \in X$ admette une base dénombrable de voisinages. Soit $A \subset X$ et $x \in X$. Alors on a :*

1. *$x \in \bar{A}$ si et seulement si il existe une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ dans A convergeant vers x.*
2. *A est fermé dans X si et seulement si la limite de toute suite convergeante d'éléments de A appartient à A.*

Démonstration. 1. Ceci est une conséquence directe du théorème précédent.

2. A est fermé dans X si et seulement si $\bar{A} \subset A$. Supposons que toute suite convergente d'éléments de A converge dans A. Soit $x \in \bar{A}$. D'après ce qui précède, il existe une suite convergeant vers x. Ce qui implique d'après l'hypothèse que $x \in A$. Alors $\bar{A} \subset A$ et A est fermé dans X. Réciproquement, supposons que A est fermé, c'est à dire que $A = \bar{A}$. Alors toute suite convergente d'éléments de A converge dans $\bar{A} = A$.

□

1.3.4 Limites de fonctions

Définition 17. *Soient X et Y deux applications et f une application de X dans Y. Soit A une partie non vide de X et $a \in \bar{A}$. On dit que $l \in Y$ est limite de f quand*

x tend vers a selon A (ou encore simplement que l est une limite de f en a lorsque e $A = X$) si pour tout voisinage W de l dans Y, il existe un voisinage V de a dans X tel que $f(A \cap V) \subset W$. Lorsque Y est séparé, la limite est unique et on note :

$$\lim_{x \to a, x \in A} f(x) = l.$$

Proposition 15. *Avec les notations précédentes, $l \in \overline{f(A)}$.*

Démonstration. Soit W un voisinage de l. Alors de la définition 17 on déduit que $f(A) \cap W \neq \emptyset$. □

Théorème 2. *Soient X, Y des espaces topologiques, $A \subset X$, $a \in \bar{A}$, $l \in Y$ et $f : A \to Y$ une application.*

1. *Si l est une limite de f en a selon A, alors pour toute suite $(a_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de A convergeant vers a, la suite $(f(a_n))_{n \geq 0}$ converge vers l.*
2. *Si a admet une base dénombrable de voisinages et si pour toute suite $(a_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de A convergeant vers a, la suite $(f(a_n))_{n \geq 0}$ converge vers l alors l est une limite de f en a.*

Démonstration.

1. Soit W un voisinage de l. Il existe un voisinage V de a tel que $f(A \cap V) \subset W$. Soit a_n une suite d'éléments de A convergeant vers a. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $a_n \in V$. Cela implique que $f(a_n) \in W$.
2. Soit $V_n, n \in \mathbb{N}$ une base de voisinages de a. On pose,

$$W_n = \cap_{k=0}^{n} V_k.$$

On va démontrer la contraposée du résultat souhaité. Supposons que l ne soit pas une limite de f. Alors il existe un voisinage W de l, tel que pour tout voisinage U de a, $f(U \cap A)$ ne soit pas inclus dans W. En particulier pour tout n, il existe $a_n \in W_n \cap A$ tel que $f(a_n) \notin W$. Or la suite a_n converge vers a, le résultat est donc démontré.

□

1.4 Continuité

1.4.1 Continuité en un point

Définition 18. *Soient X, Y deux espaces topologiques, $x_0 \in X$ et $f : X \to Y$ une application. On dit que f est continue en x_0 si pour tout voisinage W de $f(x_0)$ dans Y, il existe un voisinage V de x_0 dans X tel que $f(V) \subset W$.*

Remarque 5. *De manière équivalente, f est continue en x_0 si pour tout voisinage W de $f(x_0)$ dans Y, $f^{-1}(W)$ est un voisinage de x_0 dans X.*

Proposition 16. *Sous les notations de la définition* **??***, l'application est continue en x_0 si et seulement si $f(x_0$ est limite de f en x_0.*

Démonstration. Dans ce cas, les définitions coincident. □

Proposition 17. *Soient X, Y, Z trois espaces topologiques, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ deux applications. Soit $x_0 \in X$. Si f est continue en x_0 et si g est continue en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est continue en x_0.*

Démonstration. Soit W un voisinage de $g(f(x))$ dans Z. Alors $(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$ est un voisinage de x par définition de la continuité. □

Proposition 18. *Soient f et g deux applications d'un espace topologique X dans $\mathbb{R}$, et continues en $x_0 \in X$, alors on a :*

1. *L'application $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$ est continue enx_0.*
2. *L'application $fg : x \mapsto f(x)g(x)$ est continue en x_0.*
3. *Si g ne s'annule pas en x_0, l'application $\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ est continue en x_0.*

Démonstration. On traite le cas 1. Les autres sont laissés en exercice. Soit $\epsilon > 0$. Alors il existe un voisinage V_1 de x_0 tel que pour tout $x \in V_1$, $f(x) \in]f(x_0) - \frac{\epsilon}{2}, f(x_0) + \frac{\epsilon}{2}[$. De même, il existe un voisinage V_2 de x_0 tel que pour tout $x \in V_2$, $g(x) \in]g(x_0) - \frac{\epsilon}{2}, g(x_0) + \frac{\epsilon}{2}[$. Alors $V_1 \cap V_2$ est un voisinage de x, et pour tout $x \in V_1 \cap V_2$, $f(x) + g(x) \in]f(x) + g(x) - \epsilon, f(x) + g(x) + \epsilon[$. □

1.4.2 Continuité globale

Définition 19. *Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application. On dit que f est continue sur X si elle est continue en chaque point de X.*

Proposition 19. *Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application. Alors f est continue si et seulement si pour tout ouvert U de Y, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X.*

Démonstration. $\Rightarrow$
Puisque U est un ouvert de Y, U est voisinage de chacun de ses points. Donc pour tout $x \in f^{-1}(U)$, U est voisinage de $f(x)$, donc par définition de la continuité, $f^{-1}(U)$ est un voisinage de x. Donc $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X.
$\Leftarrow$

Soit $x \in X$. Et soit W un voisinage de $f(x)$. Alors W contient un ouvert O qui contient $f(x)$. Alors $f^{-1}(W)$ contient $f^{-1}(O)$ qui est un ouvert qui contient x. Donc $f^{-1}(W)$ est un voisinage de x.

□

Proposition 20 (*). *Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *f est continue.*
2. *Pour tout ouvert U de Y, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X.*
3. *Si $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de Y alors pour tout $U \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X.*
4. *Pour toute partie B de Y, on a $f^{-1}(\mathring{B}) \subset \overbrace{f^{-1}(B)}^{\circ}$.*
5. *Pour tout fermé F de Y, $f^{-1}(F)$ est un fermé de X.*
6. *Pour toute partie A de X, on a $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.*
7. *Pour toute partie B de Y, on a $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\bar{B})$.*

Démonstration. $1 \Leftrightarrow 2$
Voir proposition **??**.
$2 \Rightarrow 3$
Évident.
$3 \Rightarrow 1$
Idem que $2 \Rightarrow 1$
. $2 \Rightarrow 4$

On sait que $f^{-1}(\mathring{B})$ est un ouvert et $f^{-1}(\mathring{B}) \subset f^{-1}(B)$. Or $\overbrace{f^{-1}(B)}^{\circ}$ est le plus grand ouvert inclus dans $f^{-1}(B)$. Donc $f^{-1}(\mathring{B}) \subset \overbrace{f^{-1}(B)}^{\circ}$.
$4 \Rightarrow 2$
Puis que U est ouvert, on a que $\mathring{U} = U$. D'après 4) on sait que,

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(\mathring{U}) \subset \overbrace{f^{-1}(U)}^{\circ}.$$

Mais,

$$\overbrace{f^{-1}(U)}^{\circ} \subset f^{-1}(U).$$

Finalement, $\overbrace{f^{-1}(U)}^{\circ} = f^{-1}(U)$ donc $f^{-1}(U)$ est ouvert.
$2 \Rightarrow 5$
Soit F un fermé de Y. On a :

$$f^{-1}(F) = (f^{-1}(F^c))^c$$

$5 \Rightarrow 2$
Soit O un ouvert de Y. On a :

$$f^{-1}(O) = (f^{-1}(O^c))^c$$

$5 \Rightarrow 6$
$f^{-1}(\overline{f(A)})$ est un fermé qui contient A. Donc $\bar{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)}))$ donc $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.
$6 \Rightarrow 7$
On appliaque 6 avec $A = f^{-1}(B)$. Alors :

$$f(\overline{f^{-1}(B)}) = \subset \overline{f(f^{-1}(B))} \subset \bar{B}.$$

Donc, $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\bar{B})$.
$7 \Rightarrow 5$
Si F est fermé alors $F = \bar{F}$. Donc $\overline{f^{-1}(F)} \subset f^{-1}(F)$. Or $f^{-1}(F) \subset \overline{f^{-1}(F)}$. Donc $\overline{f^{-1}(F)} = f^{-1}(F)$ est fermé dans X. □

1.4.3 Homéomorphismes

Définition 20. *On dit que f est un homéomorphisme de X sur Y si elle est bijective et si f et f^{-1} sont continues. On dit que les espaces topologiques X et Y sont homéomorphes s'il existe un homéomorphisme de X sur Y.*

1.5 Quelques constructions topologiques

Définition 21. *Soient $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$, deux topologies sur un ensemble X. On dit que $\mathcal{T}_1$ est moins fine que $\mathcal{T}_2$ si $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$.*

1.5.1 Topologie induite

On s'intéresse à la topologie que l'on peut définir sur un sous-ensemble d'un espace topologique. Cela conduit naturellement à la définition de la topologie induite.

Définition 22. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et A un sous-ensemble de X. On appelle topologie induite sur A par $\mathcal{T}$ la topologie $\mathcal{T}_A$ dont la famille d'ouverts est donnée par :*

$$\mathcal{T}_A = \{O \cap A; O \in \mathcal{T}\}. \tag{1.1}$$

Un sous-ensemble de X muni de la topologie induite par $\mathcal{T}$ est appelé un sous-espace topologique.

Proposition 21. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et A un sous-ensemble de X. On munit A de la topologie induite $\mathcal{T}_A$.*

1. *Les fermés de A, sont les ensembles de la forme $F \cap A$ où F est un fermé de X.*
2. *Soit $a \in A$. Les voisinages de a dans A, sont les ensembles de la forme $V \cap A$ où V est un voisinage de a dans X.*

Démonstration. 1. Soit F_A un fermé de A. Alors $F_A = (U_A)^c_A$ où U_A est un ouvert de A. Or $U_A = U \cap A$ où U est un ouvert de X. Donc $F_A = (U \cap A)^c_A = U^c \cap A = F \cap A$ où F est un fermé de X. Réciproquement, si $F_A = F \cap A$, où F est un fermé de X, alors $(F_A)^c_A = U^c \cap A = (U \cap A)^c \cap A = (U \cap A)^c_A$. D'où le résultat.

2. Soit V_A un voisinage de a dans A. Alors il existe un ouvert U de X contenant a tel que $a \in U \cap A \subset V_A \subset A$. Alors $V_A = (U \cup V_A) \cap A$. Or $U \cup V_A$ est voisinage de a dans X. D'où le résultat en prenant $V = U \cup V_A$. Réciproquement, pour tout voisinage V de a dans X, $V \cap A$ est un voisinage de a dans A.

□

On définit l'injection canonique $\iota : A \hookrightarrow X$, l'application qui à x associe x.

Proposition 22. *L'injection canonique est continue. Par ailleurs, la topologie induite est la topologie la moins fine qui rend continue l'injection canonique.*

Démonstration. Soit O un ouvert de X. Alors $\iota^{-1}(O) = \{x \in A ; x \in O\} = \{O \cap A\}$ est un ouvert de A. Ce qui montre que ι est continue.
Soit maintenant une topologie $\mathcal{T}'$ sur A telles que ι soit continue. Alors, pour tout ouvert O de X, $\iota^{-1}(O) = \{O \cap A\}$ est un ouvert de A, et donc $\mathcal{T}'$ contient la topologie induite. □

Proposition 23 (*)**.** *Soit X et Y deux espaces topologiques. Soit A une partie de X. Soit $a \in A$ et soit $f : X \to Y$ une application. On munit A de la topologie induite et on note $f_{|A}$ la restriction de f à A. Alors :*

1. *Si f est continue en a, $f_{|A}$ est continue en a.*
2. *Si f est continue, $f_{|A}$ est continue.*
3. *Si A est voisinage de a dans X et $f_{|A}$ est continue en a, alors f est continue en a.*
4. *Si U est un ouvert de X, et si $f_{|U}$ est continue en tout point de U, alors f est continue en tout point de U.*

Démonstration. 1. On a $f_{|A} = f \circ \iota$. Donc $f_{|A}$ est continue comme composée de fonctions continues.

2. Résulte de 1.

3. Soit W un voisinage de $f(a)$ dans Y. Alors $f^{-1}(W) \cap A = f_{|A}^{-1}(W)$. Or $f_{|A}^{-1}(W)$ est un voisinage de a, donc il existe un voisinage V de a dans X tel que $f_{|A}^{-1}(W) = V \cap A$ c'est donc un voisinage de a dans X, donc $f^{-1}(W)$ contient un voisinage de a, c'est donc un voisinage de a.

4. Résulte de 3 car un ouvert est un voisinage de chacun de ses points.

□

Remarque 6. *Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in \mathbb{Q} \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

On munit $\mathbb{Q}$ de la topologie induite. Alors f est continue sur $\mathbb{Q}$ mais n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.

1.5.2 Topologie produit

Soit $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques. On considère le produit cartésien $X = \prod_{i \in I} X_i$ et l'ensemble $\mathcal{B}$ constitué des sous-ensembles de X de la forme $\prod_{i \in I} U_i$, où pour tout $i \in I$, U_i est un ouvert de X_i et $U_i = X_i$ sauf pour un nombre fini d'indices.

Définition 23. *La topologie produit sur X est topologie dont $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts. Les éléments de $\mathcal{B}$ sont appelés les ouverts élémentaires de la topologie produit.*

Remarque 7. *On peut remarquer que la topologie produit est ainsi définie de manière unique.*

Remarque 8. *Soit $\mathcal{B}_i$ une base d'ouverts de X_i. L'union des sous-ensembles de la forme $\prod_{i \in I} U_i$, où pour tout $i \in I$ U_i est un élément de $\mathcal{B}_i$ et $U_i = X_i$ sauf pour un nombre fini d'indices, est encore une base d'ouverts de la topologie produit.*

Exemple. *Les produits de n intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ sont une base d'ouverts de $\mathbb{R}^n$.*

On note $p_i : X \to X_i$ la projection canonique de X sur X_i, c'est à dire l'application qui à $(x_j)_{j \in I}$ associe x_i.

Proposition 24. *Soit $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques, on munit $X = \prod_{i\in I} X_i$ de la topologie produit $\mathcal{T}$. Alors :*

1. *Pour tout $i \in I$, la projection canonique p_i est continue, et $\mathcal{T}$ est la topologie la moins fine rendant continue toutes les projections canoniques p_i.*
2. *Soit $f : E \to X$ une application d'un espace topologique E dans X muni de la topologie $\mathcal{T}$, alors f est continue en un point a de E si et seulement si pour tout $i \in I$ l' application $p_i \circ f$ est continue de E dans X_i.*

Démonstration. 1. Soit U_i un ouvert de X_i. Alors,

$$p_i^{-1}(U_i) = \prod_{j\in I} O_j,$$

avec,

$$O_j = \begin{cases} X_j & \text{si} \quad i \neq j \\ U_j & \text{si} \quad i = j. \end{cases}$$

qui est un ouvert de la topologie produit. On en déduit que les projections canoniques sont continues. Montrons maintenant que la topologie produit est la topologie la moins fine rendant continues les projections canoniques.
Soit $\mathcal{T}'$ une telle topologie. Soit $O \in \mathcal{T}$. Alors O s'écrit comme union d'ouverts de $\mathcal{B}$. Or tout élément de $\mathcal{B}$ peut s'écrire comme intersection finie de parties de la forme :

$$p_i^{-1}(U_i) = \prod_{j\in I} O_j,$$

avec,

$$O_j = \begin{cases} X_j & \text{si} \quad i \neq j \\ U_j & \text{si} \quad i = j. \end{cases}$$

Mais, $p_i^{-1}(U_i) \in \mathcal{T}'$. Donc O également comme union d'intersetions finies d'éléments de $\mathcal{T}'$. On en déduit que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$.

2. Si f est continue en a alors $p_i \circ f$ est continue comme composée d'applications continues. Réciproquement, supposons que pour tout i, $p_i \circ f$ soit continue en a. Soit W un voisinage de $f(a)$ dans X. Alors, par définition de la topologie produit, il existe un ouvert O tel que :

$$O = \prod_{i\in I} O_i$$

avec O_i ouvert de X_i et $O_i = X_i$ sauf pour un ensemble fini $J \subset I$ d'indices et qui vérifie :

$$f(a) \in O \subset W.$$

Alors :

$$\begin{aligned} f^{-1}(O) &= \cap_{j \in J} f^{-1}(p_j^{-1}(O_j)) \\ &= \cap_{j \in J} (p_j \circ f)^{-1}(O_j) \end{aligned}$$

ce qui montre que $f^{-1}(O)$ est ouvert. Cela montre que $f^{-1}(V)$ est un voisinage de a, et donc que f est continue en a.

$\square$