Chapitre 2

Espaces métriques

2.1 Definition

Définition 1. *Une distance (ou métrique) sur un ensemble X est une application :*

$$\begin{array}{rcl} d : X \times X & \to & \mathbb{R}^+ \\ (x, y) & \mapsto & d(x, y) \end{array}$$

possédant pour tout $x, y, z \in X$ les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{rcl} d(x, y) = 0 & \Leftrightarrow & x = y, \\ d(x, y) & = & d(y, x) \text{ (symétrie)} \\ d(x, z) & \leq & d(x, y) + d(y, z) \text{ (inégalité triangulaire)}. \end{array}$$

Muni de la distance d l'espace X est appelé espace métrique.

Exemple
L'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la distance $|x - y|$ est un espace métrique.

2.2 Propriétés de la distance

Proposition 1. *1. Pour tout $x, y \in X$, $d(x, y) \geq 0$.*

2. Pour tout $x, y, z \in X$, on a $|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(x, z)$.

Démonstration. 1. $0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y)$.

2. On a :

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

donc

$$d(x, y) - d(x, z) \leq d(z, y)$$

et

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

donc

$$d(x,z) - d(x,y) \leq d(y,z).$$

□

2.3 Boules

Définition 2. *On appelle boule ouverte de centre a et de rayon r et on note $B(a,r)$ l'ensemble des points x dont la distance entre a et x est strictement inférieure à r :*

$$B(a,r) = \{x \in X, d(a,x) < r\}.$$

On appelle boule fermée de centre a et de rayon r et on note $B_f(a,r)$ l'ensemble des points x dont la distance entre a et x est inférieure ou égale à r :

$$B_f(a,r) = \{x \in X, d(a,x) \leq r\}.$$

2.4 Topologie des espaces métriques

Soit $X,d)$ un espace métrique.

Définition 3. *On appelle ouvert de (X,d) toute partie O de X qui est vide ou qui vérifie :*

$$\forall x \in O, \exists r > 0, B(x,r) \subset O.$$

On vérifie que les axiomes $(O1)$, $(O2)$ et $(O3)$ sont respectés. Une distance définit donc une topologie.

Proposition 2. *Soit (X,d) un espace métrique..*

1. *Toute boule ouverte est un ouvert.*
2. *Toute boule fermée est un fermé.*

Démonstration. 1. Soient $x_0 \in X$ et $r > 0$. Soit $x \in B(x_0,r)$. On pose :

$$\mu = r - d(x_0,x).$$

Soit $y \in B(x,\mu)$. Alors

$$\begin{aligned} d(x_0,y) &\leq d(x_0,x) + d(x,y) \\ &< d(x_0,x) + r - d(x_0,x) \\ &= r. \end{aligned}$$

2. Soient $x_0 \in X$ et $r > 0$. On veut montrer que $B(x_0, r)^c$ est fermé. Soit $x \notin B(x_0, r)$. On pose :

$$\mu = d(x_0, x) - r.$$

Soit $y \in B(x, \mu)$. Alors

$$d(x_0, x) \leq d(x_0, y) + d(y, x)$$

donc

$$\begin{aligned} d(x_0, y) &\leq d(x_0, x) - d(y, x) \\ &> d(x_0, x) - (d(x_0, x) - r) \\ &= r. \end{aligned}$$

□

Proposition 3. *1. Tout point x de X admet une base dénombrable de voisinages :*

$$\{B(x, \frac{1}{n+1}), n \in \mathbb{N}\}$$

2. L'ensemble

$$\{B(x, \frac{1}{n+1}), x \in X, n \in \mathbb{N}\}$$

est une base d'ouverts de (X, d).

2.5 Quelques propriétés

Proposition 4. *Tout espace métrique (X, d) est séparé.*

Démonstration. Soit $x \neq y$ et $r = \frac{d(x,y)}{2} > 0$. Alors $B(x, r) \cap B(y, r) = \emptyset$. En effet, si $z \in B(x, r)$ alors,

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y),$$

donc,

$$\begin{aligned} d(z, y) &\geq d(x, y) - d(z, x) \\ &> 2r - r = r. \end{aligned}$$

□

Proposition 5. *Soient (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques et $f : X \to Y$ une application. Alors f est continue en a si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\mu > 0$ tel que $B(a, \mu) \subset B(f(a), \epsilon)$ ou encore si :*

$$\forall \epsilon > 0 \exists \mu > 0 \text{ tel que } d(x, a) < \mu \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

Démonstration. Cela est dû au fait que les boules ouvertes sont une base d'ouverts de la topologie des espaces métriques. En effet, si f est continue en a alors pour tout voisinage W de $f(a)$ il existe un voisinage V de a tel que $f(V) \subset W$. Soit $\epsilon > 0$, $B(f(a), \epsilon)$ est un voisinage de $f(a)$. Donc il existe un voisinage V de a tel que $f(V) \subset B(f(a), \epsilon)$. Comme V est un voisinage de a, il existe $\mu > 0$ tel que $B(a, \mu) \subset V$. Donc $f(B(a, \mu)) \subset B(f(a), \epsilon)$.
Réciproquement, supposons que pour tout $\epsilon > 0$ il existe μ tel que $f(B(a, \mu)) \subset B(f(a), \epsilon)$. Soit W un voisinage de $f(a)$. Alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(f(a), \epsilon) \subset W$. Donc il existe μ tel que $f(B(a, \mu)) \subset B(f(a), \epsilon) \subset W$. Or $B(a, \mu)$ est un voisinage de a. □

Proposition 6. *Soit X un espace métrique.*

1. *Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de X. Soit $a \in X$. Le point a est valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si et seulement si il est limite d'une sous-suite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.*
2. *Soit $A \subset X$. Alors $a \in \bar{A}$ si et seulement si il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers a.*
3. *Soit $A \subset X$. Alors A est fermé dans X si et seulement si, pour toute suite d'éléments de A convergeant dans X, la limite est dans A.*
4. *Soit Y un espace topologique et $f : X \to Y$ une application. Alors l est limite de f en a si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers a, $f(x_n)$ converge vers l.*
5. *Soit Y un espace topologique et $f : X \to Y$ une application. Alors f est continue en a, si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers a, $f(x_n)$ converge vers $f(a)$.*

Démonstration. Cela résulte des résultats du chapitre 1, et du fait que dans un espace métrique tout point x possède une base dénombrable de voisinages : $(B(x, \frac{1}{n}))_{n \in \mathbb{N}^*}$. A des fins pédagogiques, on donne ici une démonstraction directe du 1.

1. On construit la sous-suite $x_{\varphi(n)}$ de la manière suivante :

$$x_{\varphi(n)} \in B(a, \frac{1}{n}) \text{ et } \varphi(n) > \varphi(n-1).$$

Alors la sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a. Réciproquement si il existe une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers a, alors pour tout voisinage V de a et pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n > N$ tel que $x_{\varphi(n)} \in V$.

□

2.6 Distance entre deux parties, diamètre

Définition 4. *Soient A et B des parties non vides d'un espace métrique (X, d).*

1. *La distance de x à A est $d(x, A) = \inf_{y\in A} d(x, y)$.*
2. *La distance entre A et B est $d(A, B) = \inf_{x\in A, y\in B} d(x, y)$.*
3. *Le diamètre de A est le nombre $\delta(A) = \sup_{x,y\in A} d(x, y)$.*
4. *La distance d est dite bornée si $\delta(X) < +\infty$.*
5. *Un sous-ensemble de X est dit borné si son diamètre est fini.*

Proposition 7.
1. *Pour tout $x, y \in X$, on a $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$ donc l'application $x \to d(x, A)$ est continue de X dans $\mathbb{R}$.*
2. *On a $\bar{A} = \{x \in X; d(x, A) = 0\}$ et $\mathring{A} = \{x \in X; d(x, A^c) > 0\}$.*
3. *Si A est fermé dans X et si $x \notin A$ alors $d(x, A) > 0$.*

Démonstration.
1. On a,

$$\begin{aligned} d(x, A) &= \inf_{z\in A} d(x, z) \\ &\leq \inf_{z\in A} d(x, y) + d(y, z) \\ &\leq d(x, y) + \inf_{z\in A} d(y, z) \\ &= d(x, y) + d(y, A). \end{aligned}$$

Donc,

$$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y),$$

et de même,

$$d(y, A) - d(x, A) \leq d(y, x).$$

Donc,

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$

2. Soit $x \in \bar{A}$. Alors il existe une suite $x_n \in A$ qui tend vers x lorsque $n \to +\infty$. Alors,

$$\begin{aligned} d(x,A) &\leq d(x,x_n) \\ &\longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Donc $d(x,A) = 0$. Réciproquement si x vérifie $d(x,A) = 0$ alors il existe une suite $x_n \in A$ telle que $d(x,x_n) \longrightarrow d(x,A) = 0$, autrement dit x_n converge vers x donc $x \in \bar{A}$. Par ailleurs, $\mathring{A} = (\overline{A^c})^c = \{x \in X; d(x,A^c) > 0\}$.

3. C'est une conséquence du 2.

$\square$

Proposition 8. *Soient A et B deux parties non vides d'un espace métrique (X,d).*

1. *Si $A \subset B$ alors $\delta(A) \leq \delta(B)$.*
2. *On a $\delta(\bar{A}) = \delta(A)$.*
3. *On a $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B) + d(A,B)$.*

Démonstration. 1. Immédiat.

2. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \bar{A}$ tels que $d(x_n,y_n) \to \delta(\bar{A})$. Alors il existe $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\tilde{y}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tels que $d(x_n,\tilde{x}_n) < \frac{1}{n}$ et $d(y_n,\tilde{y}_n) < \frac{1}{n}$. Alors,

$$\begin{aligned} |\delta(\bar{A}) - d(\tilde{x}_n)\tilde{y}_n)| &\leq |\delta(\bar{A}) - d(x_n,y_n)| + |d(x_n,y_n) - d(\tilde{x}_n),\tilde{y}_n)| \\ \leq |\delta(\bar{A}) - d(x_n,y_n)| &+ |d(x_n,y_n) - d(\tilde{x}_n),y_n)| + |d(\tilde{x}_n,y_n) - d(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n)| \\ &\leq |\delta(\bar{A}) - d(x_n,y_n)| + d(\tilde{x}_n,x_n) + d(\tilde{y}_n,y_n) \\ &\to 0 \text{ quand } n \to +\infty. \end{aligned}$$

On en déduit que $\delta(\bar{A}) \leq \delta(A)$.

3. Soient $x,y \in A \cup B$. Si $x,y \in A$ alors $d(x,y) \leq \delta(A) \leq \delta(A) + \delta(B) + d(A,B)$. De même si $x,y \in B$. Si $x \in A$ et $y \in B$, alors pour tout $a \in A, b \in B$, on a

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq d(x,a) + d(a,b) + d(b,y) \\ &\leq \delta(A) + d(a,b) + \delta(B) \end{aligned}$$

Donc, par passage à l'inf, on a

$$d(x,y) \leq \delta(A) + d(A,B) + \delta(B)$$

D'où le résultat.

$\square$

Exercice 1. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que :

1. Tout ouvert de X est une réunion dénombrable de fermés de X.
2. Tout fermé de X est une intersection dénombrable d'ouverts de X.

Solution

1. Soit O un ouvert de X. Soit $F = O^c$. Soit $F_n = \{x \in X$ tels que $d(x, F) \geq \frac{1}{n}\}$. Alors F_n est fermé dans X. Et $O = \{x \in X / d(x, F) > 0\} = \cup_{n \in \mathbb{N}^*} F_n$.
2. C'est une conséquence du 1 par passage au complémentaire.

2.7 Comparaison de distances

Définition 5. *Soient (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques et $f : X \to Y$ une application.*

1. *On dit que f est uniformément continue si :*
$$\forall \epsilon > 0, \exists \mu, d(x, y) < \mu \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \epsilon.$$
2. *On dit que f est lipchitzienne s'il existe une constante $k \geq 0$ telle que pour tout $x, y \in X$,*
$$d'(f(x), f(y)) \leq k d(x, y).$$
3. *On dit que f est isométrique si pour tout $x, y \in X$,*
$$d'(f(x), f(y)) = d(x, y).$$
On dit que f est une isométrie si elle est isométrique et surjective. Les espaces X et Y sont dits isométriques s'il existe une isométrie de X dans Y.

Définition 6. *Soient d_1 et d_2 deux distances sur un espace X.*

1. *On dit que d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes si $\mathcal{T}_{d_1}$=$\mathcal{T}_{d_2}$. Cela est équivalent à dire que les applications identités de $(X, \mathcal{T}_{d_1})$ dans $(X, \mathcal{T}_{d_2})$, et de $(X, \mathcal{T}_{d_2})$ dans $(X, \mathcal{T}_{d_1})$ sont continues.*
2. *On dit que d_1 et d_2 sont uniformément équivalentes si les applications identités de $(X, \mathcal{T}_{d_1})$ dans $(X, \mathcal{T}_{d_2})$, et de $(X, \mathcal{T}_{d_2})$ dans $(X, \mathcal{T}_{d_1})$ sont uniformément continues.*

3. *On dit que d_1 et d_2 sont équivalentes s'il existe $A > 0$ et $B > 0$ tels que, pour tout $x, y \in X$ on a,*

$$d_1(x,y) \leq Ad_2(x,y) \text{ et } d_2(x,y) \leq Bd_1(x,y).$$

Cela est équivalent à dire que les applications identités de $(X, \mathcal{T}_{d_1})$ dans $(X, \mathcal{T}_{d_2})$, et de $(X, \mathcal{T}_{d_2})$ dans $(X, \mathcal{T}_{d_1})$ sont lipchitziennes.

Proposition 9. *Soit (X, d) un espace métrique et $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction croissante telle que $\phi(0) = 0, \phi(t) > 0$ si $t > 0$ et $\phi(t+s) \leq \phi(t) + \phi(s)$. Alors*

1. *$d'(x,y) = \phi(d(x,y))$ est une distance sur X.*
2. *Si ϕ est continue en 0 alors d et d' sont uniformément équivalentes.*

Démonstration. On vérifie d'abord que d' est une distance sur X.

$$\begin{aligned} d'(x,y) = 0 &\Leftrightarrow \phi(d(x,y)) = 0 \\ &\Leftrightarrow d(x,y) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

On a également

$$d'(x,y) = d'(y,x)$$

Enfin,

$$\begin{aligned} d'(x,y) &= \phi(d(x,y)) \\ &\leq \phi(d(x,z) + d(z,y)) \text{ car } \phi \text{ est croissante} \\ &\leq \phi(d(x,z)) + \phi(d(z,y)) \\ &= d'(x,z) + d'(z,y). \end{aligned}$$

2. Soit $\epsilon > 0$, puisque ϕ est continue en 0, il existe μ tel que :

$$d(x,y) < \mu \Rightarrow d'(x,y) = \phi(d(x,y)) < \epsilon.$$

Réciproquement, supposons que l'identité de soit pas uniformément continue de (X, d') dans (X, d). Alors il existe $\epsilon > 0$ et deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$d'(x,y) = \phi(d(x_n, y_n)) < \frac{1}{n} \text{ et } d(x_n, y_n) \geq \epsilon.$$

Cela est une contradiction car dans ce cas :

$$\phi(d(x_n, y_n)) \geq \phi(\epsilon) > 0.$$

$\square$

Proposition 10. *Les fonctions* $\min(1, t)$ *et* $\frac{t}{1+t}$ *vérifient les hypothèses de la proposition précédente et sont continues.*

Démonstration. On vérifie que $\min(1, t)$ et $\frac{t}{1+t}$ vérifient $\phi(t + s) \leq t + s$.
$\underline{\phi(t) = \min(1, t)}$
Il y a deux cas possibles $t + s \leq 1$ ou $t + s > 1$.

1. Si $t + s \leq 1$ alors $t \leq 1$ et $s \leq 1$. Dans ce cas, on a $\phi(t + s) = t + s = \phi(t) + \phi(s)$.
2. Si $t + s > 1$, alors il y a trois cas possibles, soit $t < 1$, et $s < 1$, soit $t > 1$ et $s < 1$ (ou de manière symétrique $t < 1$ et $s > 1$) ou bien $t > 1$ et $s > 1$.
   (a) Si $t < 1$ et $s < 1$ alors $\phi(t + s) = 1 < t + s = \phi(t) + \phi(s)$.
   (b) Si $t > 1$ et $s < 1$ (ou de manière symétrique $t < 1$ et $s > 1$) alors $\phi(t + s) = 1 < 1 + s = \phi(t) + \phi(s)$.
   (c) Si $t > 1$ et $s > 1$ alors $\phi(t + s) = 1 < 2 = \phi(t) + \phi(s)$.

$\underline{\phi(t) = \frac{t}{1+t}}$
Dans ce cas on a :

$$\begin{array}{rcl} \phi(t+s) & \leq & \phi(t) + \phi(s) \\ \Leftrightarrow \frac{t+s}{1+t+s} & \leq & \frac{t}{1+t} + \frac{s}{1+s} \\ \Leftrightarrow (t+s)(1+t)(1+s) & \leq & t(1+t+s)(1+s) + s(1+t)(1+t+s) \\ \Leftrightarrow 0 & \leq & ts(1+s) + ts(1+t). \end{array}$$

$\square$

Remarque 1. *La fonction* $\phi(0) = 0$ *et* $\phi(t) = 1$ *si* $t > 0$ *vérifie les hypothèses du théorème précédent mais elle n'est pas continue en* 0*. Si* $X = \mathbb{R}$ *et* d *est la distance usuelle sur* $\mathbb{R}$ *alors* $\phi(d)$ *est la distance discrète sur* $\mathbb{R}$ *et les deux topologies ne sont pas topologiquement équivalentes.*

Remarque 2. *Deux distances équivalentes donneront les mêmes fonctions continues et les mêmes suites convergentes. Deux distances uniformément équivalentes donneront les mêmes fonctions uniformément continues et les mêmes suites de Cauchy. Deux distances métriquement équivalentes donneront les mêmes fonctions lipchtiziennes.*

2.8 Distance produit

Proposition 11. *Soient* $(X_1, d_1), ..., (X_n, d_n)$ *des espaces métriques et* $X = X_1 \times ... \times X_n$ *l'ensemble produit. Pour* $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *et* $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$*, on pose :*

$$D_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i), D_2(x, y) = (\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)^2)^{\frac{1}{2}}, D_\infty(x, y) = \sup_{1 \leq i \leq n} d_i(x_i, y_i).$$

Alors D_1, D_2 *et* D_∞ *sont trois distances équivalentes sur* X *et la topologie asscociée à l'une de ces distances coïncide avec la topologie produit sur* X*.*

Démonstration. On commence par vérifier que D_1, D_2 et D_∞ sont des distances. Les deux premières propriétés se vérifient presque immédiatement. On détaille seulement la propriété de l'inégalité triangulaire pour D_2. On a :

$$\begin{aligned} D_2(x, y) =& \Big(\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \\ \leq& \Big(\sum_{i=1}^{n} (d_i(x_i, z_i) + d_i(z_i, y_i))^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \\ \leq& \Big(\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, z_i)^2 \Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\sum_{i=1}^{n} d_i(z_i, y_i)^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \text{ (Inégalité de Minkowski)} \\ =& D_2(x, z) + D_2(z, y). \end{aligned}$$

On peut ensuite vérifier que :

$$D_1 \leq \sqrt{n} D_2 \leq n D_\infty \leq n D_1,$$

ce qui montre l'équivalence des trois distances.
Pour clore la démonstration, on va montrer que la topologie associée à D_∞, (notée $\mathcal{T}_\infty$) est la topologie produit (notée $\mathcal{T}$). Soient $p_i, i \in \{1, ..., n\}$ les projections canoniques de X dans X_i. Alors pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ l'application p_i est continue de $(X, D_i nfty)$ dans (X_i, d_i) car, pour tout $x, y \in X$, on a $d_i(p_i(x), p_i(y)) \leq D_\infty(x, y)$. On en déduit d'après la proposition **??** que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_\infty$, puisque $\mathcal{T}$ est la topologie la moins fine rendant les projections canoniques continues. Il nous faut maintenant montrer que $\mathcal{T}_\infty \subset \mathcal{T}$. Soit O un ouvert de $\mathcal{T}_\infty$. Alors, pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in O$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(x, \epsilon) \subset O$. Or

$$B(x, \epsilon) = \prod_{i=1}^{n} B_i(x_i, \epsilon),$$

où $B_i(x_i, \epsilon) = \{z_i \in X_i; d_i(x_i, z_i) < \epsilon\}$, donc $B(x, \epsilon)$ est un ouvert de $\mathcal{T}$. Ce qui montre que O est voisinage de chacun de ses points pour la topoplogie $\mathcal{T}$, c'est donc un ouvert de $\mathcal{T}$. □

Proposition 12. *Soient $(X_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques et $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ l'ensemble produit. Pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on pose :*

$$D(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)},$$

et,

$$D_\infty = \sup_{n\leq 0} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}$$

Alors D et D_∞ sont des distances topologiquement équivalentes sur X et la topologie asscociée à l'une de ces distances coïncide avec la topologie produit sur X.

Démonstration. Le fait que D_∞ et D sont des distances est laissé en exercice. On commence par traiter le cas de la distance D_∞. Soit $\mathcal{T}$ la topologie produit sur X et $\mathcal{T}_\infty$ la topologie associée à la métrique D_∞ On pose $d'_n = \frac{d_n}{1+d_n}$. Puisque pour tout n, les distances d_n et d'_n sont uniformément équivalentes, elles définissent les mêmes ouverts sur X_n, la topologie $\mathcal{T}$ est donc indépendante du fait que l'on choisisse les distances d_n ou d'_n sur X_n. Pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a :

$$D_\infty(x,y) = \sup_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} d'_n(x_n, y_n).$$

Soient $p_n, n \in \mathbb{N}$ les projections canoniques. On a :

$$d'_n(x_n, y_n) \leq 2^n D_\infty(x,y).$$

On en déduit que p_n est continue de (X, D_∞) dans (X_n, d'_n) . D'après la proposition **??**, on en déduit que l'application $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_\infty$ puisque $\mathcal{T}$ est la topologie la moins fine rendant continue toutes les projections canoniques. On montre maintenant l'inclusion réciproque. Soit O un ouvert de $(X, \mathcal{T}_\infty)$. Pour tout $x \in O$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $B_\infty(x, \epsilon) \subset O$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\frac{1}{2^N} < \epsilon.$$

Alors on a :

$$B_\infty(x, \epsilon) = \{z \in X; \forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2^n} d'_n(x_n, z_n) < \epsilon\} = \bigcap_{n=0}^{N-1} p_n^{-1}(B(x_n, 2^n\epsilon))$$

Or $\bigcap_{n=0}^{N-1} p_n^{-1}(B(x_n, 2^n\epsilon))$ est un ouvert de $\mathcal{T}$. Donc $O \in \mathcal{T}$, ce qui montre que $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}_\infty$ coïncident.
On traite maintenant le cas de la distance D. En utilisant les mêmes notations que précédemment, on a :

$$d'_n((x_n, y_n) \leq 2^n D(x, y).$$

Donc par le même raisonnement que précédemment on en déduit que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$, où $\mathcal{T}'$ est la topologie associée à D. Réciproquement, soit O un ouvert de $\mathcal{T}'$. Soit $x \in O$. Il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(x, \epsilon) = \{z \in X; D(x, z) < \epsilon\} \subset O$. Avec,

$$D(x, z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d'(x_n, z_n)}{2^n}.$$

On partage la somme en deux. On a :

$$\sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2 - 2(1 - \frac{1}{N+1)}) = \frac{1}{2^N}.$$

Soit N tel que $\frac{1}{2^N} < \frac{\epsilon}{2}$. Alors :

$$\{z \in X; \sum_{n=0}^{N} \frac{d'(x_n, z_n)}{2^n} < \frac{\epsilon}{2}\} \subset B(x, \epsilon).$$

Or,

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{d'(x_n, z_n)}{2^n} < 2.$$

Donc, si pour tout $n \in \{0, ..., N\}$, $d(x_n, z_n) < \frac{\epsilon}{4}$, on a :

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{d'(x_n, z_n)}{2^n} < \frac{\epsilon}{2}.$$

On en déduit que :

$$\bigcap_{n=0}^{N} p_n^{-1}(B_n(x_n, \frac{\epsilon}{4})) \subset B(x, \epsilon).$$

Ainsi, tout ouvert de $\mathcal{T}'$ est un voisinage de ses points pour la topologie $\mathcal{T}$. Donc $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$. $\square$

2.9 Suites de Cauchy et espaces métriques complets

Définition 7. *Soit (X, d) un espace métrique. Une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de X est dite de Cauchy, si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n, p > N \Rightarrow d(x_n, x_p) < \epsilon.$$

Proposition 13. *Soit (X, d) un espace métrique. Alors :*

1. *Toute suite convergente dans X est de Cauchy.*
2. *Toute suite de Cauchy dans X est bornée.*
3. *Toute sous-suite d'une suite de Cauchy de X est de Cauchy.*

Démonstration.

1. Soit $\epsilon > 0$, et soit x la limite de la suite. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n > N$ implique $d(x, x_n) > \frac{\epsilon}{2}$. Alors pour $n, p > N$, on a : $d(x_p, x_n) \leq d(x_p, x) + d(x, x_n) < \epsilon$.
2. Soit $\epsilon > 0$ et soit N tel que $n, p > N$ implique $d(x_n, x_p) < \epsilon$. Soit $R = \max_{p\in\{1,\ldots,N\}} d(x_p, x_{N+1})$. Alors pour tout $m, n \in \mathbb{N}$,

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{N+1}) + d(x_{N+1}, x_m) \leq 2\max(\epsilon, R).$$

3. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de X. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que $n > N$ et $p > N$ impliquent que $d(x_n, x_p) < \epsilon$. Soit ϕ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ alors on $\phi(n) \geq n$ et $\phi(p) \geq p$. Donc $d(x_{\phi(n)}, x_{\phi(p)}) < \epsilon$.

□

Proposition 14. *Soit (X, d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite convergente vers $l \in X$, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.*

Démonstration. Soit l tel que $\lim_{n\to+\infty} x_n = l$. Soit $\epsilon > 0$. Soit N_1 tel que $n > N_1$ et $p > N_1$ impliquent que $d(x_n, x_p) < \frac{\epsilon}{2}$. Soit N_2 tel que $n > N_2$ implique $d(x_{\phi(n)}, l) < \frac{\epsilon}{2}$. Soit $N = \max(N_1, N_2)$. Alors on a pour tout $n > N$:

$$d(x_n, l) \leq d(x_n, x_{\phi(n)}) + d(x_{\phi(n)}, l) < \epsilon.$$

□

Proposition 15. *Soient (X, d) et (Y, d') des espaces métriques. L'image d'une suite de Cauchy de X par une application de X dans Y uniformément continue est une suite de Cauchy dans Y.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Soit $\epsilon > 0$. Puisque f est uniformément continue, on sait que pour tout $x, y \in X$, il existe $\nu > 0$ tel que $d(x,y) < \nu$ implique $d(f(x), f(y)) < \epsilon$. Puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n, p > N$ implique $d(x_n, x_p) < \nu$. Alors, $d(f(x_n), (x_p)) < \epsilon$. □

Définition 8. *Soit X un espace métrique. Alors X est dit complet si toute suite de Cauchy converge.*

Proposition 16. *L'espace $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle est complet.*

Démonstration. On rappelle que $\mathbb{R}$ se caractérise comme un corps commutatif totalement ordonné dans lequel tout ensemble borné possède une borne supérieure et une borne inférieure. En particulier, cela implique que deux suites adajacentes réelles convergent vers la même limite. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Soit $b_n = \sup_{k\geq n}\{x_k\}$ et $a_n = \inf_{k\geq n}\{x_k\}$. Alors $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites respectivement décroissante et minorée, et croissante et majorée. Par ailleurs, puis que (x_n) est de Cauchy, pour tout $\epsilon > 0$ il existe N tel que $n > N$ implique $|b_n - a_n| \leq \epsilon$. On en déduit que a_n, b_n et x_n convergent vers une même limite. □

Proposition 17. *Soient (X, d) et (Y, d') des espaces métriques, $f : X \to Y$ un homéomorphisme. Si f est uniformément continue et si Y est complet alors X est complet.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de X. Alors $(f(x)_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de Y. Or Y est complet donc, il existe $y \in Y$ telle que $(f(x)_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y. Il s'en suit que $x_n = f^{-1}(f(x_n))$ converge vers $f^{-1}(y)$. □

Proposition 18. *Soient (X, d) un espaces métrique complet. Soit $A \subset X$. Alors (A, d) est complet si et seulement si A est fermé dans X.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de A convergeant dans X. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de A. Or A est complet donc la suite converge dans A. Donc A est fermé. Réciproquement, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de A. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de X or X est complet. Donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans X. Or A est fermé, donc la suite converge dans A, et A est complet. □

Théorème 1. *Soit (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques, A une partie dense de X et $f : A \to Y$ une application uniformément continue. Si (Y, d') est complet f se prolonge de manière unique en une application continue $\tilde{f} : X \to Y$. De plus, $\tilde{f}$ est elle même uniformément continue.*

Démonstration. **Existence**
Soit $x \in X$. Il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ qui converge vers x. Alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans X, et $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans (Y, d'). Or Y est complet, donc il existe $y \in Y$ telle que la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y. On aimerait poser $\tilde{f}(x) = y$ mais il faut vérifier que l'on a bien défini y de manière unique. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une autre suite qui converge vers x et soit z la limite de $(f(b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ dans Y. Alors $d'(y, z) \leq d'(y, f(x_n)) + d'(f(a_n), f(b_n)) + d'(f(b_n), z)$ ce qui montre que $d'(y, z) = 0$ puisqu'on peut rendre chacun des trois termes aussi petit que l'on souhaite pour n assez grand. Par construction $\tilde{f}$ est continue.
Uniforme continuité de $\tilde{f}$
Soit $\epsilon > 0$. On veut montrer qu'il existe $\mu > 0$ tel que $d(x, y) < \mu$ implique $d'(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) < \epsilon$. Or

$$\begin{aligned} d'(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) \leq & d'(\tilde{f}(x), f(a)) + d'(f(a), f(b)) + d'(\tilde{f}(y), f(b)) \\ \leq & \epsilon. \end{aligned}$$

Et il existe $\mu > 0$ tel que pour tout $a, b \in A$, $d(a, b) < 2\mu$ implique $d(f(a), f(b)) < \frac{\epsilon}{3}$. Soient $x, y \in X$ tels que $d(x, y) < \mu$. Il existe μ_x tel que pour tout $a \in A$, $d(x, a) < \mu_x$ implique $d'(\tilde{f}(x), f(a)) < \frac{\epsilon}{3}$, et il existe μ_y tel que pour tout $b \in A$, $d(y, b) < \mu_y$ implique $d'(\tilde{f}(y), f(b)) < \frac{\epsilon}{3}$. Soient maintenant $a, b \in A$ tels que $d(a, x) < \min(\mu_x, \frac{\mu}{2})$ et $d(b, y) < \min(\mu_y, \frac{\mu}{2})$. Alors, $d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, y) + d(y, b) < \mu$. Par ailleurs $\tilde{f}$ est continue par construction.
Unicité
Elle découle de la continuité de $\tilde{f}$ et de l'unicité de la limite dans un espace métrique. En effet, soit g une fonction définie sur X prolongant f par continuité. Soit $x \in X$, et (a_n) une suite convergeant vers x. Alors

$$g(x) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \tilde{f}(x).$$

□

Contre-exemple

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Théorème 2 (Cantor)**.** *Soit (X, d) un espace métrique, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *L'espace (X, d) est complet.*
2. *L'intersection de toute suite de parties fermées non vides $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\delta(F_n)$ tend vers 0 contient un point et un seul.*

Démonstration. Suposons que (X, d) est complet. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties fermées non vides telle que $\delta(F_n)$ tend vers 0. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut choisir $x_n \in F_n$. Alors (x_n) est une suite de Cauchy. Or X est complet, donc il existe $x \in X$ tel que $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ Puisque pour tout n, F_n est fermé, $x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Par ailleurs, x est le seul point dans l'intersection des F_n car $\lim_{n\to} \delta(F_n) = 0$.
Supposons maintenant que 2 soit vérifié et montrons que dans ce cas (X, d) est complet. Soit (x_n) une suite de Cauchy. On pose

$$F_n = \overline{\{x_k; k \geq n\}}$$

Alors $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties fermées non vides. De plus, du fait que (x_n) est de Cauchy, on a $\delta(F_n)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Alors il existe un unique $x \in X$ tel que $x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Alors $d(x_n, x) \leq \delta(F_n) \to 0$ quand $n \to +\infty$. □

Proposition 19. *Soit $(X_n, d_n)_{n\in\{1,...,N\}}$ une suite finie d'espaces métriques. Alors l'epace métrique produit $X_1 \times .... \times X_N$ est complet si et seulement si pour tout $n \in \{1, ..., N\}$, l'espace (X_n, d_n) est complet. En particulier, $\mathbb{R}^N$ et $\mathbb{C}^N$ sont complets.*

Démonstration. On munit X de la distance D_∞. Soit $(x_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de X_n. Alors la suite $(a_1, a_2, ..., x_n^k, ..., a_N)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de X. Donc elle converge vers un élément $(a_1, .., x_n, ..., a_N)$, donc $(x_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers x_n. Réciproquement, supposons que pour tout $n \in \{1, ..., N\}$, (X_n, d_n) soit un espace métrique complet. Soit $(x^k)_{k\in N}$ une suite de Cauchy dans (X, D_∞). Alors pour tout $n \in \{1, ..., N\}$, $(x_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de X_n. Donc elle converge. Soit l_n sa limite. Soit $\epsilon > 0$, il existe N_n tel que $k > N_n$ implique $d_n(x_n^k, l_k) < \epsilon$. En choisissant $N = \max_{n\in\{1,...,N\}} N_n$, on en déduit $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $l = (l_1, ..., l_N)$. □

Proposition 20. *Soit $(X_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite finie d'espaces métriques. Alors l'epace métrique produit $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ est complet si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'espace (X_n, d_n) est complet.*

Théorème 3 (Theoreme du poinf fixe)**.** *Soit X, d un espace métrique complet et F une aplication de X dans X qui soit contractante (c'est à dire lipscitzienne de rapport $k < 1$. Alors, il existe un et un seul point fixe de F sur X. De plus, la suite (x_n) définie par $x_{n+1} = F(x_n)$ converge vers x.*

Démonstration. □

2.10 Complétion d'espaces métriques

Définition 9. *Soient (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques, on dit qu'une application f de X dans Y est isométrique si $d(x, y) = d'(f(x), f(y))$. Si de plus f est une surjection, on dit que f est une isométrie.*

Théorème 4. *Soit (X, d) un espace métrique. Alors il existe un espace métrique complet $(\hat{X}, \hat{d})$ et une application isométrique $u : X \to \hat{X}$ telle que $u(X)$ soit dense dans $\hat{X}$. Par ailleurs $\hat{X}$ est unique au sens suivant. Si $(\hat{X}_2, d')$ est un espace métrique complet et s'il existe une application isométrique $u_2 : X \to \hat{X}_2$ telle que $u_2(X)$ soit dense dans $\hat{X}_2$. Alors il existe une unique application ϕ telle que $u_2 = \phi \circ u$. De plus ϕ est une isométrie de $\hat{X}$ sur $\hat{X}_2$.*