Chapitre 3

Espaces compacts

La compacité joue un rôle important en analyse car elle permet de tranposer des propriétés des espaces finis au espaces infinis. Dans un espace compact tout ensemble infini possède un point d'accumulation, c'est à dire que cette aprtie finit par s'accumuler en un endroit déterminé.

3.1 Espaces compacts

Définition 1 (Borel-Lebesgue)**.** *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. On dit que X est compact si X est séparé et si de tout recouvrement d'ouverts de X on peut extraire un sous-recouvrement fini :*

$$(X = \cup_{i \in I} U_i \, avec \, \forall i \in I \, U_i \in \mathcal{T}) \Rightarrow (\exists J \subset I, J \, fini; \, X = \cup_{i \in J} U_i)$$

Proposition 1. *Soit X un espace topologique séparé. Alors X est compact. si de toute famille de fermés dont l'intersection est vide, on peut extraire une sous-famille finie dont l'intersection est vide.*

$$(\cap_{i \in I} F_i = \emptyset \, avec \, \forall i \in I \, F_i^c \in \mathcal{T}) \Rightarrow (\exists J \subset I, J \, fini; \, \cup_{i \in J} F_i = \emptyset)$$

Démonstration. Supposons que $\cap_{i \in I} F_i = \emptyset$. Alors par passage au complémentaire, $\cup_{i \in I}(F_i)^c = X$. Donc il existe un sous-recouvrement fini $\cup_{j \in J}(F_j)^c$ de $\cup_{i \in I}(F_i)^c$ tel que $\cup_{j \in J}(F_j)^c = X$. Donc, $\cap_{j \in J} F_j = \emptyset$. La réciproque est analogue.

□

Proposition 2. *Soit X un espace topologique séparé. Alors X est compact si et seulement si toute famille de fermés dont toute sous-famille finie est d'intersection non vide est elle même d'intersection non vide.*

Démonstration. Cette proposition se déduit de la précedente par passage à la contraposée. □

Corollaire 1. *Soit X un espace compact. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés non vides de X. Alors $\cap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.*

Définition 2. *Soient X un espace topologique et A une partie de X. On dit que A est compacte si A, munie de la topologie induite par celle de X est un espace compact.*

Remarque 1. *Une partie A de $(X, \mathcal{T})$ est donc compacte si*

$$(A \subset \cup_{i\in I} U_i \, avec \, \forall i \in I \, U_i \in \mathcal{T}) \Rightarrow (\exists J \subset I, J \, fini; \, A \subset \cup_{i\in J} U_i)$$

ou encore si

$$(A \cap (\cap_{i\in I} F_i) = \emptyset \, avec \, \forall i \in I \, F_i^c \in \mathcal{T}) \Rightarrow (\exists J \subset I, J \, fini; \, A \cap (\cap_{i\in J} F_i) = \emptyset)$$

Définition 3. *Soient X un espace topologique et A une partie de X. On dit que A est relativement compacte si $\bar{A}$ est compacte.*

3.2 Propriétés des espaces compacts

3.2.1 Compacts et fermés

Proposition 3. *Soient X un espace topologique séparé. Soit$A$ une partie de X. Si A est compacte, alors A est fermée dans X.*

Démonstration. On va montrer que A^c est ouvert en montrant qu'il est voisinage de chacun de ses points. Soit donc $x \in A^c$. Puisque X est séparé, pour tout $a \in A$ il existe $V_a \in \mathcal{V}(a)$ et $U_{x,a} \in \mathcal{V}(x)$ tel que $V_a \cap U_{a,x} = \emptyset$. On a alors $A \subset \cup_{a\in A} V_a$. Et puisque A est compact, il existe $a_1, a_2, ...a_n$ tel que $A \subset \cup_{i=1}^n V_{a_i}$. Soit alors $U = \cap_{i=1}^n U_{x,a_i}$. On a alors $A \cap U \subset \cup_{i=1}^n V_{a_i} \cap U = (\cup_{i=1}^n V_{a_i}) \cap (\cap_{j=1}^n U_{x,a_j}) = \cup_{i=1}^n (V_{a_i} \cap (\cap_{i=1}^n U_{x,a_i})) = \emptyset$, et U est un voisinage de x, et qui est inclus dans A^c . D'où le résultat. □

Proposition 4. *Soient X un espace topologique compact et A une partie de X. Si A est fermée dans X, alors A est compacte.*

Démonstration. Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de X tels que $A \cap (\cap_{i\in I} F_i) = \emptyset$. Si A est fermé, puisque X est compact il existe un sous ensemble fini $J \subset I$ tel que $A \cap (\cap_{i\in I} F_i) = \emptyset$ recouvrement ouvert de A. Puisque A est fermé, A^c est ouvert, et donc $A^c \cup (\cup_{i\in J} F_i) = \emptyset$.

□

3.2.2 Union et intersection de compacts

Proposition 5. *Soit X un espace topologique séparé. Si $K_1, K_2, ..., K_n$ sont des parties compactes de X, alors la réunion $\cup_{i=1}^n K_i$ est compacte.*

Démonstration. Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts recouvrant $\cup_{i=1}^n K_i$. Alors pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ $K_i \subset \cup_{i\in I} U_i)$. Donc, il existe J_i tel que $K_i \subset \cup_{j\in J_i} U_j)$. Alors $\cup_{i=1}^n K_i \subset \cup_{i=1}^n \cup j \in J_i U_j$.

□

Proposition 6. *Soit X un espace topologique séparé. Si $(K_i)_{i\in I}$ est une famille de parties compactes de X, alors l'intersection $\cap_{i\in I} K_i$ est compacte.*

Démonstration. L'intersection de compacts est fermée. Donc compacte, car incluse dans un compact.

□

Proposition 7. *Soit X un espace topologique séparé, et A, B deux parties compactes de X telles que $A \cap B = \emptyset$. Alors il existe deux ouverts U et V tels que $A \subset U$, $B \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$.*

Démonstration. Soit $b \in B$. Alors, comme X est séparé, pour tout $a \in A$, il existe deux ouverts $U_{a,b}$ et $V_{a,b}$ tels que $a \in U_{a,b}$, $b \in V_{a,b}$ et $U_{a,b} \cap V_{a,b} = \emptyset$. Comme A est compact et que $A \subset \cup_{a\in A} U_{a,b}$, il existe une famille finie $\{a_1, ..., a_n\}$ telle que $A \subset \cup_{i\in\{1,...,n\}} U_{a_i,b}$. Soit

$$U_b = \cup_{i\in\{1,...,n\}} U_{a_i,b} \text{ et } V_b = \cap_{i\in\{1,...,n\}} V_{a_i,b}.$$

Alors,

$$U_b \cap V_b = \emptyset.$$

Puisque B est compact et que $B \subset \cup_{b\in B} V_b$, il existe une famille finie $\{b_1, ..., a_p\}$ telle que $B \subset \cup_{i\in\{1,...,p\}} V_{b_i}$. Soit

$$V = \cup_{i\in\{1,...,p\}} V_{b_i} \text{ et } U = \cap_{i\in\{1,...,p\}} U_{b_i}.$$

Alors U et V sont ouverts, $A \subset U$, $B \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$. □

3.2.3 Valeurs d'adhérence de suites et points d'accumulation dans les espaces compacts

Proposition 8. *Dans un espace métrique compact toute suite possède une valeur d'adhérence.*

Démonstration. D'après la définition **??**, on sait que l'ensemble des valeurs d'adhérence est :

$$A = \cap_{n \geq 0} \overline{\{x_p, p \geq n\}}.$$

Or $(\overline{\{x_p, p \geq n\}})_{n \geq 0}$ forme une suite décroissante de parties fermées non vides. Le résultat est donc une conséquence du corollaire **??**. □

Proposition 9. *Dans un espace métrique compact toute partie infinie possède au moins un point d'accumulation.*

Démonstration. Soit A une partie infinie de X. Supposons que A ne possède pas de point d'accumulation. Alors pour tout $x \in X$ il existe un voisinage V_x de x tel que $V_x \cap A = x$ ou $V_x \cap A = \emptyset$. Or $X = \cup_{x \in X}\{x\} = \cup_{x \in X} V_x$. Donc, puisque X est compact il existe $x_1, ..., x_n \in X$ tels que $X = \cup_{i=1}^n V_{x_i}$. Mais alors

$$A \cap X = A \subset \{x_1, ..., x_n\}.$$

Ce qui contredit le fait que A est une partie infinie.

□

3.3 Espaces métriques compacts

Définition 4. *Un espace métrique est dit précompact, si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un recouvrement fini par des boules de rayon ϵ.*

Proposition 10. *Soit X un espace métrique et A un sous ensemble de X. On a :*

1. *L'espace métrique X est précompact si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un recouvrement fini de X par des parties de diamètre inférieur ou égal à ϵ.*
2. *Si X est précompact, alors A est précompact.*
3. *Si A est précompact alors $\bar{A}$ est précompact.*

Démonstration.

1. Supposons que X est précompact. Soit $\epsilon > 0$. Alors X peut être recouvert par un ensemble fini de boules de rayon $\frac{\epsilon}{2}$ qui sont des parties de diamètre inférieure à 'ϵ. Réciproquement, si pour tout $\mu > 0$, X peut être recouvert par un ensemble fini $(A_i)_{i \in \{1,..,n\}}$ de parties de diamètre inférieur ou égal à μ. Alors soit $x_i \in A_i$, et $\mu < \epsilon$, alors X est inclus dans l'union des boules $B(x_i, \epsilon)$.
2. Evident.

3. Si $A \subset \cup_{i=1}^{n} B(x_i, \epsilon)$. Soit $x \in \bar{A}$. Alors il existe $i \in \{1, ..., n\}$ tel que $B(x, \epsilon) \cap B(x_i, \epsilon) \neq \emptyset$, et donc $d(x_i, x) < \epsilon$. On en dduit que $\bar{A} \subset \cup_{i=1}^{n} B(x_i, 2\epsilon)$.

□

Proposition 11. *Soit X un espace métrique précompact. Alors X est séparable. En particulier, tout espace métrique compact est séparable.*

Démonstration. Pour tout $n \geq 1$, il existe un ensemble fini D_n tel que $X = \cup_{x \in D_n} B(x, \frac{1}{n})$. On vérifie alors que $D = \cup_{n \geq 1} D_n$ est dense dans X. Puisque tout espace métrique compact est précompact, on en déduit que tout espace compact est séparable. □

Dans un espace métrique la compacité est équivalente au fait que toute suite possède une sous-suite qui converge. Ce résultat est connu sous le nom du théorème de Bolzano-Weiersrass. On va maintenant montrer ce théorème avec quelques résultats complémentaires. On a besoin pour cela du lemme de la maille.

Lemme 1 (Lemme de la maille)**.** *Soient X un espace métrique tel que toute suite dans X possède une sous-suite convergente. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X. Alors il existe un réel $r > 0$ tel que toute boule ouverte de rayon r soit contenue dans au moins un des U_i.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde. Supposons que pour tout $r > 0$, il existe x tel que $B(x, r)$ ne soit incluse dans aucun des U_i. Alors pour tout n, il existe x_n tel que $B(x_n, \frac{1}{n})$ ne soit incluse dans aucun des U_i. On extrait alors une sous-suite convergente $x_{\varphi(n)}$ de x_n. Soit a la limite de $x_{\varphi(n)}$. Alors il existe i tel que $a \in U_i$. Soit ϵ tel que $B(a, \epsilon) \subset U_i$. Soit n tel que $\frac{1}{\varphi(n)} < \frac{\epsilon}{2}$ et $d(a, x_{\varphi(n)}) < \frac{\epsilon}{2}$. Alors pour tout $y \in B(x_{\varphi(n)}, \frac{1}{\varphi(n)})$, on a que $d(y, a) \leq d(y, x_{\varphi(n)}) + d(x_{\varphi(n)}, a) < \epsilon$. Autrement dit $B(x_{\varphi(n)}, \frac{1}{\varphi(n)}) \subset B(a, \epsilon) \subset U_i$. Contradiction. □

Théorème 1. *Soit X un espace métrique. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *L'espace topologique X est compact.*
2. *L'espace métrique X est précompact et complet.*
3. *Toute partie infinie de X possède au moins un point d'accumulation.*
4. *Toute suite de X possède une sous-suite convergente.*
5. *Pour toute suite décroissante de $(F_n)_{n \geq 0}$ de parties fermées non vides de X, on a $\cap_{n \geq 0} F_n \neq \emptyset$.*

Démonstration. $1) \Rightarrow 2)$
Tout espace compact est précompact. Par ailleurs puisque X est compact, toute suite possède une valeur d'adhérence. Or toute suite de Cauchy possédant une valeur d'adhérence converge vers cette valeur d'adhérence. Donc tout espace compact est complet.
$2) \Rightarrow 3)$
Soit A une partie infinie de X. On va construire une suite $(A_n)_{n\geq 0}$ de parties infinies décroissante de X, telles que $\delta(A_n) \leq \frac{2}{n}$. On pose $A_0 = A$. Supposons A_n construit. Puisque X est précompact, on peut recouvrir X par une famille finie de boules de rayon $\frac{1}{n+1}$: $X = \cup_{x\in I} B(x, \frac{1}{n+1})$. Puisque A_n est infinie et recouvert par un nombre fini de boules, il existe au moins une des boules contenant une infinité d'éléments de A_n. Soit $B(x, \frac{1}{n+1})$ cette boule. On pose alors $A_{n+1} = A_n \cap B(x, \frac{1}{n+1})$. Alors $\delta(A_{n+1}) \leq \frac{2}{n+1}$. Puisque X est complet, d'après le théorème de Cantor, il existe un unique $z \in X$ tel que $z = \cap_{n\geq 0} \bar{A}_n$. On va montrer que z est un point d'accumulation de A. Soit V un voisinage de z. Alors pour n assez grand $B_f(z, \frac{2}{n}) \subset V$. Puisque $z \in \bar{A}_n$, pour tout $y \in A_n$ on a que $d(y, z) \leq \frac{2}{n}$. Ceci montre que $A_n \subset V$, et donc que V contient une infinité d'éléments. Ceci montre que z est un point d'accumulation.
$3) \Rightarrow 4)$
Soit x_n une suite de X. Si la suite ne prend qu'un nombre fini de valeurs, c'est évident. Considérons que la suite prend une infinité de valeurs. Soit z un point d'accumulation de la suite. On construit une application φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ de la manière suivante. On pose $\varphi(0) = 0$. Puis, $\varphi(n+1)$ tel que $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ et $x_{\varphi(n+1)} \in B(z, \frac{1}{n+1})$. Cela est toujours possible quitte à choisir $\varphi(n+1)$ tel que $x_{\varphi(n+1)} \in B(z, \epsilon)$ et $\epsilon < \min(d(x_{\varphi(0)}, z), d(x_{\varphi(1)}, z), ..., d(x_{\varphi(n)}, z), \frac{1}{n+1})$. Alors la suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers z.
$4) \Rightarrow 1)$
X est séparé car c'est un espace métrique. Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts recouvrant X. D'après le lemme de la maille, il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in X$, il existe $i \in I$ tel que $B(x, r) \subset U_i$. Supposons que l'on ne puisse pas extraire une sous-famille finie recouvrant X. Alors pour tout sous-ensemble fini A de X, on a :

$$\bigcup_{x\in A} B(x, r) \neq X,$$

on peut donc trouver $y \in X$ tel que $d(x, y) > r$ pour tout $x \in A$. On construit alors une suite y_n par récurrence vérifiant $d(y_0, y_1) > r$ puis $d(y_0, y_2) > r$ et $d(y_1, y_2) > r$...On a alors $d(y_p, y_q) > r$ dès que $p \neq q$. Ce qui montre que l'on ne peut pas extraire de sous-suite qui converge. Contradiction.
$1) \Rightarrow 5)$

Déjà démontré. $5) \Rightarrow 4)$
On écrit que l'ensemble des valeurs d'adhérence A vérifie :

$$A = \cap_{n\geq 0}\overline{\{x_p, p \geq n\}}.$$

Ce qui montre le résultat, car dans un espace métrique la suite x_n possède une valeur d'adhérence si et seulement si x_n possède une sous-suite qui converge. □

Proposition 12. *Soient X un espace métrique et A une partie de X. Si A est compacte, alors A est bornée.*

Démonstration. Soit d la distance associée à X. Puisque $A \subset \cup_{a\in A}B(a, 1)$ et A compact, il existe $a_1, ..., a_n$ tels que $A \subset \cup_{i=1}^n B(a_i, 1)$. On pose alors $\alpha = \max_{i,j=1}^n d(a_i, a_j)$. Pour tout $x, y \in A$, il existe $i_1, i_2 \in 1, ..., n$ tel que $x \in B(a_{i_1}, 1)$ et $y \in B(a_{i_2}, 1)$. Donc $d(x, y) \leq d(x, a_{i_1}) + d(a_{i_1}, a_{i_2}) + d(a_{i_2}, y) \leq \alpha + 2$.

□

Exercice
Montrer que tout sous-ensemble fini d'un espace topologique est compact.

Théorème 2 (Heine)**.** *Tout intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$ est compact.*

Démonstration. On utilise une méthode de dichotomie. On pose $a_0 = a$, $b_0 = b$. Puis $c_k = \frac{a_k+b_k}{2}$. Si $[a_k, c_k]$ possède une infinité d'éléments de la suite, on pose $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = c_k$, sinon, on pose $a_{k+1} = c_k$, $b_{k+1} = b_k$. Et $\varphi(k + 1)$ tel que $\varphi(k + 1) > \varphi(k)$, et $x_\varphi(k + 1) \in [a_{k+1}, b_{k+1}$. Alors les suites (a_k) et (b_k) sont adjacentes et convergent vers une même limite. Ce qui implique la convergence de $(x_{\varphi(k)})$. □

Corollaire 2. *Les compacts de $\mathbb{R}$ sont les ensembles fermés et bornés.*

Corollaire 3. *Soi X un espace métrique et A une partie de X. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *A est relativement compacte.*
2. *Il existe une partie compacte de X contenant A.*
3. *Toute suite dans A possède une sous-suite convergente dans X.*

Démonstration. 1. $1) \Rightarrow 2)$. $\bar{A}$ convient.

2. $2) \Rightarrow 3)$. Résulte du théorème précédent.

3. $3) \Rightarrow 1)$. Soit x_n une suite de $\bar{A}$. Alors il existe $a_n \in A$ tel que $d(a_n, x_n) < \frac{1}{n}$. On extrait de a_n une sous-suite a_{n_k} convergeant vers $a \in X$. Alors $d(x_{n_k}, a) \leq d(x_{n_k}, a_{n_k}) + d(a_{n_k}, a) \to 0$ lorsque $k \to +\infty$. Ce qui implique que $\bar{A}$ est compact.

□

On a également le corollaire suivant.

Corollaire 4. *Soit X un espace métrique et A une partie de X.*

1. *Si A est relativement compacte, A est précompacte.*
2. *Si X est complet et si A est précompacte alors A est relativement compacte.*

3.4 Applications continues et espaces compacts

Théorème 3. *Soit X et Y deux espaces topologiques avec Y séparé, et $f : X \to Y$ une application continue. Alors l'image par f de toute partie compacte de X est une partie compacte de Y.*

Démonstration. Soit A une partie compacte de X. Soit $\cup_{i \in I} U_i$ un recouvrement ouvert de $f(A)$. Alors $\cup_{i \in I} f^{-1}(U_i)$ est un recouvrement ouvert de A. Donc on peut en extraire un sous-recouvrement fini, $\cup_{i \in J} f^{-1}(U_i)$. Alors $f(A) \subset f(\cup_{i \in J} f^{-1}(U_i)) = \cup_{i \in J} f(f^{-1}(U_i)) \subset \cup_{i \in J} U_i$. Donc $f(A)$ est une partie compacte.

□

Exercice 1. Soit X et Y deux espaces topologiques avec Y séparé, et $f : X \to Y$ une application continue. Montrer que :

1. Si X est compact, alors l'image par f de toute partie fermée de X est une partie fermée de Y.
2. Si X est compact et si f est bijective, alors f est un homéomorphisme.

Correction

1. Soit F un fermé de X. Alors F est compact. Donc $f(F)$ est compact. Donc $f(F)$ est fermé.
2. Puisque f est bijective l'image d'un ouvert par f est un ouvert grâce à $2)$ Ceci montre la continuité de f^{-1}.

Corollaire 5. *Soit X un espace compact, Y un espace topologique séparé et $f : X \to Y$ une application continue, alors pour toute partie A de X, on a $\overline{f(A)} = f(\bar{A})$.*

Démonstration. Résulte du fait que $\overline{f(A)} \subset f(\bar{A})$ car l'image d'un fermé est un fermé par la proposition précédente et que $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ puisque f est continue. □

Théorème 4. *Soit X un espace compact et $f : X \to \mathbb{R}$ une application continue. Alors f est bornée et atteint sur X ses bornes inférieure et supérieure.*

Démonstration. D'après le théorème **??**, on sait que $f(X)$ est un compact. En particulier, $f(X)$ est fermé et borné. Puisque $f(X)$ est borné, il admet une borne inférieure et une borne supérieure. Puisque $f(X)$ est fermé les bornes inférieure et supérieure appartiennent à $f(X)$. □

Théorème 5. *Soient X et Y deux espaces métriques munis respectivement des distances d et d', et $f : X \to Y$ une application continue. Si X est compact alors f est uniformément continue.*

Démonstration. Première démonstration, par l'absurde.
Supposons que f ne soit pas uniformément continue. Alors il existe $\epsilon > 0$, et deux suites x_n, y_n vérifiant $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ et $d(f(x_n), f(y_n)) > \epsilon$. Puisque X est compact, on peut extraire une sous-suite $x_{\varphi(n)}$ qui converge vers l. Alors $y_{\varphi(n)}$ converge aussi vers l. Puisque f est continue, $f(x_{\varphi(n)})$ et $f(y_{\varphi(n)})$ convergent vers $f(l)$. Ce qui contredit le fait que $d(f(x_n), f(y_n)) > \epsilon$.
Deuxième démonstration.
$\cup_{y\in Y} f^{-1}(B(y, \frac{\epsilon}{2}))$ est un recouvrement ouvert de X. Donc d'après le lemme de Lebesgue, il existe $r_\epsilon > 0$ tel que toute boule de rayon $r\epsilon$ soit incluse dans un des $U_y = f^{-1}(B(y, \frac{\epsilon}{2}))$. Soit $x, z \in X$ vérifiant $d(x, z) < r_\epsilon$ alors il existe y tel que $x, z \in U_y = f^{-1}(B(y, \frac{\epsilon}{2}))$, donc $f(x), f(z) \in B(y, \frac{\epsilon}{2})$, donc $d(f(x), f(z)) < \epsilon$. Ce qui montre que f est uniformément continue. □

3.5 Produit d'espaces compacts

Théorème 6 (Tykhonov)**.** *Un produit d'espaces compacts est compact.*

Démonstration. On ne traite que le cas de produit fini d'espaces topologiques compacts ou de produit dénombrable d'espaces métriques compacts.
Le cas fini
Rappelons que X et Y sont séparés si et seulement si $X \times Y$ est séparé. Puisque les projections canoniques sont continues, si $X \times Y$ est compact, X et Y sont compacts. Réciproquement supposons que X et Y sont compacts. Soit $(W_i)_{i\in I}$ un recouvrement d'ouverts de $X \times Y$. Soit $x \in X$. Pour tout $y \in Y$ il existe $i(x, y) \in I$ tel que $(x, y) \in W_{i(x,y)}$. Alors il existe $U_{(x,y)}$ ouvert de X contenant

x et $V_{(x,y)}$ ouvert de Y contenant y tels que $U_{(x,y)} \times V_{(x,y)} \subset W_{i(x,y)}$. Comme Y est compact et que $\cup_{y\in Y} V_{(x,y)}$ forme un recouvrement ouvert de Y, on peut en extraire un sous-recouvrement fini, $\cup_{y\in B_x} V_{(x,y)}$. Soit $U_x = \cap_{y\in B_x} U_{(x,y)}$. Alors U_x est un ouvert qui contient x tel que $U_x \times V_{(x,y)} \subset W_{i(x,y)}$. Par ailleurs $(U_x)_{x\in X}$ forme un recouvrement ouvert de X et on peut en extraire un sous-recouvrement fini, $\cup_{x\in A} U_x$. Alors, $\cup_{x\in A, y\in B_x} (U_x \times V_{(x,y)})$ forme un recouvrement fini d'ouverts et $\cup_{x\in A, y\in B_x} W_{i(x,y)}$ forme un sous-recouvrement

Le cas dénombrable d'epsaces métriques compacts

Puisque les projections canoniques sont continues, si X est compact alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'espace (X_n, d_n) est compact. On pose $\tilde{d}_n = \min(1, d_n)$ et l'on supprime les tilde pour simplifier les notations. On pose $D(x,y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n)$. On va montrer que de toute suite de (X, D), on peut extraire une sous-suite qui converge. Soit $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de X. C'est à dire que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$x_n^k = (x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Pour n fixé, (x_n^k) est une suite de l'espace métrique (X_n, d_n). Ainsi x_0^k est une suite de l'espace métrique (X_0, d_0). Donc on peut en extraire une sous-suite $(x_0^{\varphi}(k)_0)$ qui converge vers c_0 dans X_0. Ensuite, $(x_1^{\varphi_0(k)})$ est une suite de l'espace métrique (X_1, d_1), on peut donc en extraire une sous-suite $x_1^{\varphi_1(k)}$ qui converge, vers c_1 dans X_1. Noter que l'on peut écrire $\varphi_1 = \varphi_0 \circ \psi_1$. Supposant $(x_n^{\varphi_n(k)})$, construite et convergeant vers c_n dans X_n, on extrait de $(x_{n+1}^{\varphi_n(k)})$ une sous-suite $(x_{n+1}^{\varphi_{n+1}(k)})$ convergeant vers c_{n+1} dans X_{n+1}. Avec $\varphi_{n+1} = \varphi_n \circ \psi_{n+1}$. Soit $\varphi(k) = \varphi_k(k)$. On considère alors la suite $x^{\varphi(k)}$ dans X. Alors cette suite converge vers c dans X. En effet, on sait que la suite $x^{\varphi(k)}$ converge vers c si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n^{\varphi(k)}$ converge vers c_n. Par construction, la suite $x_n^{\varphi_n(k)}$ converge vers c_n quand k tend vers $+\infty$. Or pour $k \geq n$, $x_n^{\varphi(k)} = x_n^{\varphi_k(k)}$ est une sous-suite extraite de $x_n^{\varphi_n(k)}$. Donc, $x_n^{\varphi(k)}$ converge vers c_n quand k tend vers $+\infty$. $\square$

Corollaire 6. *Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *A est précompacte.*
2. *A est relativement compacte.*
3. *A est bornée.*
4. *Toute suite dans A possède une sous-suite convergente dans $\mathbb{R}^n$.*

Corollaire 7. *Les parties compactes de $\mathbb{R}^n$ sont les parties fermées et bornées.*