Chapitre 4

Espaces Connexes

4.1 Défintions et exemple fondamental

4.1.1 Définitions

Définition 1. *On dit qu'un espace topologique X est connexe s'il n'est pas réunion de deux ensembles ouverts non vides disjoints. Autrement dit si U et V sont deux ouverts de X tels que $X = U \cup V$ et $U \cap V = \emptyset$ alors $U = \emptyset$ ou $V = \emptyset$.*

Proposition 1. *soit X un espace topologique. les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *L'espace X est connexe.*
2. *L'espace X n'est pas réunion de deux ensembles fermés non vides disjoints.*
3. *Il n'existe pas dans X d'autres parties qui soient à la fois ouvertes et fermées que X et $\emptyset$.*

Démonstration. $1 \Leftrightarrow 2$
Supposons que X ne soit pas connexe. Alors par définition X est réunion de deux ouverts non vides disjoints :$X = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$, $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$. Par passage au complémentaire il est équivalent de dire que, $\emptyset = U^c \cap V^c$, $U^c \cup V^c = X$, $U^c \supset V \neq \emptyset$, $V^c \supset U \neq \emptyset$. C'est à dire que X est réunion de deux fermés non vides disjoints.
$1 \Leftrightarrow 3$
Soit A une partie de X, différente de X et de l'ensemble vide. Supposons que A soit à la fois ouverte et fermée. Alors $X = A \cup A^c$ donc X est réunion de deux ouverts. $A \cap A^c = \emptyset$. Et A et A^c sont non vides. Donc X n'est pas connexe. Réciproquement, si $X = U \cup V$ avec U, V ouverts de X et $U \cap V = \emptyset$, alors $V = U^c$. Donc U est à la fois ouvert et fermé donc $U = \emptyset$ ou $U = X$. $\square$

Définition 2. *On dit qu'une partie A d'un espace topologique est connexe, si A muni de la topologie induite est connexe.*

Proposition 2. *Soit X un espace topologique. Soit A une partie de X. Alors A est connexe si et seulement si pour tout ouverts U et V vérifiant $A \subset U \cup V$, et $A \cap U \cap V = \emptyset$, on a $A \subset U$ ou $A \subset V$.*

Démonstration. Laissée en exercice. □

4.1.2 Exemple fondamental

Théorème 1. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Les propriétés suivantes son équivalentes.*

1. *A est connexe.*
2. *A est un intervalle. En particulier, $\mathbb{R}$ est connexe.*

Démonstration. $1 \Rightarrow 2$
Supposons que A est connexe. Si A n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$, alors il existe, $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x < z < y$ et $x \in A$, $y \in A$ et $z \notin A$.Soit $U =]-\infty, z[$ et $V =]z, +\infty[$. Alors $A \subset U \cup V$, $A \cap U \cap V = \emptyset$ et, $A \cap U \neq \emptyset$, $A \cap V \neq \emptyset$. Ce qui contredit le fait que A est une partie connexe de $\mathbb{R}$. Donc A est un intervalle.
$2 \Rightarrow 1$
Supposons que A ne soit pas connexe. Alors, il existe deux ouverts de $\mathbb{R}$, U et V, tels que $A \subset U \cup V$, $A \cap U \cap V = \emptyset$ et, $A \cap U \neq \emptyset$, $A \cap V \neq \emptyset$. Soit $x \in A \cap U$ et $y \in A \cap V$. On suppose sans perte de généralité que $x < y$. Alors puisque A est un intervalle $[x, y] \subset A$. Et, $[x, y] = [x, y] \cap U \cup [x, y] \cap V$, $[x, y] \cap U \cap V = \emptyset$. Soit $B = [x, y] \cap U$. B contient x donc c'est une partie non vide de $\mathbb{R}$ bornée par y. Soit $x_0 = \sup(B)$. $x_0 \in \bar{B} \subset [x, y]$. On distingue deux cas : $x_0 \in B$ et $x_0 \notin B$.
Si $x_0 \in B$, alors $x_0 < y$ car $y \in V$ et $V \cap U = \emptyset$. Comme U est un ouvert de $\mathbb{R}$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[\subset U$. Alors il existe $z > x_0$ et $z \in B$ ce qui est impossible.
Si $x_0 \notin B$ alors $x_0 \in [x, y] \cap V$. Alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[\subset V$. Et par définition du sup il existe $z \in B$ tel que $x_0 - \epsilon < z \leq x_0$. Donc $z \in B \cap V$ ce qui est une contradiction.

□

4.2 Fonctions continues et connexité

Théorème 2. *Soient X, Y des espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application continue. Si X est connexe alors $f(X)$ est connexe.*

Démonstration. Supposons que $f(X)$ ne soit pas connexe. Alors il existe U, V ouverts de Y tels que $f(X) \subset U \cup V$, $f(X) \cap U \cap V = \emptyset$, et $f(x)$ n'est ni inclus dans U ni dans V. Alors, $f^{-1}(U)$ et $f^{-1}(V)$ forment une partition d'ouverts disjoints non vides de X. □

Corollaire 1 (Théorème de la valeur intermédiaire)**.** *Soient X un espace topologique connexe et f une application continue de X dans $\mathbb{R}$ alors f est un intervalle.*

Corollaire 2. *Soient X un espace topologique connexe et compact et f une application continue de X dans $\mathbb{R}$ alors f est un intervalle fermé borné.*

Proposition 3. *Soit X un espace topologique. Alors X est connexe si et seulement si toute fonction continue de X dans $\{0, 1\}$ (muni de la topologie induite par $\mathbb{R}$ est constante.*

Démonstration. Supposons X connexe. Alors $f^{-1}(0)$ et $f^{-1}(1)$ forment une partition d'ouverts de X. Donc $f^{-1}(0) = \emptyset$ ou $f^{-1}(1) = \emptyset$. Réciproquement, supposons que X ne soit pas connexe. Alors X est réunion de deux ouverts non vides disjoints, U et V. Soit f la fonction indicatrice de U. Alors f est continue car l'image réciproque de tout ouvert de $\{0, 1\}$ est ouvert et non constante. □

Corollaire 3. *Si X et Y sont deux espaces topologiques homéomorphes, alors X est connexe si et seulement si Y est connexe.*

4.3 Union, adhérence, produit

4.3.1 Union

Théorème 3. *Soit X un espace topologique. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties connexes de X. Si pour i, j avec $i \neq j$, on a $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, alors $\cup_{i \in I} A_i$ est connexe. En particulier, si on a $\cap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ alors $\cup_{i \in I} A_i$ est connexe.*

Démonstration. Soit U et V deux ouverts de X tels que $\cup_{i \in I} A_i \subset U \cup V$ et tels que $(\cup_{i \in I} A_i) \cap U \cap V = \emptyset$. Alors pour tout $i \in I$, $A_i \subset U \cup V$ et $A_i \cap U \cap V = \emptyset$. Puisque A_i est connexe, ou bien $A_i \subset U$ ou bien $A_i \subset V$. Puisque $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, on en déduit que ou bien $\cup_{i \in I} A_i \subset U$ ou bien $\cup_{i \in I} A_i \subset V$, c'est à dire ou bien $\cup_{i \in I} A_i \cap V = \emptyset$ ou bien $\cup_{i \in I} A_i \cap U = \emptyset$, c'est à dire que $\cup_{i \in I} A_i$ est connexe. □

On montre de manière analogue :

Théorème 4. *Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille de parties connexes de X telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$, alors $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est connexe.*

Et :

Théorème 5. *Soit X un espace topologique et $(B_i)_{i\in I}$ une famille de parties connexes de X. S'il existe $\alpha \in I$ tel que $B_\alpha \cap B_i \neq \emptyset$ pour tout $i \in I$ alors $\cup_{i\in I} B_i$ est connexe.*

On déduit de ce résultat que pour tout x dans X, l'ensemble des parties connexes contenant x est un ensemble connexe. C'est le plus grand connexe au sens de l'inclusion contenant x. On l'appelle la composante connexe de x et on la note C_x.

Définition 3. *Soit X un espace topologique. On appelle composante connexe de x et on note C_x le plus grand ensemble connexe de X contenant x :*

$$C_x = \cup_{C connexe; x\in C} C.$$

Proposition 4. *Soit X un espace topologique. On note $x\mathcal{R}y$, s'il existe une partie A connexe de X telle que $x, y \in A$. Alors $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence de cette relation sont les composantes connexe de X.*

4.3.2 Adhérence

Proposition 5. *Soient X espace topologique et $A \subset X$. Si A est connexe alors $\bar{A}$ est connexe.*

Démonstration. Supposons qu'il existe deux ouverts U et V de X tels que $\bar{A} \subset U \cup V$, $\bar{A} \cap U \cap V = \emptyset$. Alors, $A \subset U \cup V$, $A \cap U \cap V = \emptyset$. Supposons que $U \cap \bar{A} \neq \emptyset$, $V \cap \bar{A} \neq \emptyset$. Soit $x \in U \cap \bar{A}$. Alors U est un voisinage de x et donc $U \cap A \neq \emptyset$. De même, si $V \cap \bar{A} \neq \emptyset$ alors $V \cap A \neq \emptyset$. Ce qui contredit le fait que A est connexe. □

Proposition 6. *Soit A une partie d'un espace topologique X. Si B est une partie connexe de X telle que $A \cap B \neq \emptyset$ et $B \cap A^c \neq \emptyset$ alors $B \cap Fr(A) \neq \emptyset$.*

Démonstration. Si $B \cap Fr(A) = B \cap \bar{A} \cap \bar{A^c} = \emptyset$, alors $\bar{A}$ et $\bar{A^c}$ sont deux fermés dont l'union contient B et donc l'intersection avec B est vide. Ceci contredit le fait que B est connexe. □

Corollaire 4. *Soient X un espace topologique connexe et A une partie de X telle que $A \neq \emptyset$ et $A \neq X$ alors $Fr(A) \neq \emptyset$.*

Démonstration. C'est la proposition précédente avec $B = X$. □

Théorème 6. *Soit X un espace topologique, alors les composantes connexes de X sont fermées dans X.*

Démonstration. Comme l'adhérence d'un connexe est connexe. On sait d'après le point précédent que $\bar{C}_x \subset C_x$. Donc C_x est fermé. □

Théorème 7. *Soit X un espace topologique, alors :*

1. *Si X possède un nombre fini de composantes connexes, alors chacune de ces composantes est ouverte dans X.*
2. *Si U est à la fois un ensemble ouvert et fermé dans X, alors pour tout $x \in U$, on a $C_x \subset U$.*
3. *Tout ensemble connexe de X est inclus dans une composante connexe.*
4. *Tout ensemble connexe non vide qui est à la fois ouvert et fermé dans X est une composante connexe.*
5. *Si $X = \cup_{i \in I} X_i$ tel que pour tout $i \in I$,X_i est connexe et ouvert non vide dans X, et tels que les X_i sont deux à deux disjoints, alors les X_i sont les composantes connexes de X.*

Démonstration.

1. Si $X = \cup_{i \in \{1,\ldots,N\}} C_{x_i}$, alors $C^c_{x_i} = \cup_{j \in \{1,\ldots,N\}, j \neq i} C_{x_j}$ est un fermé. Donc C_{x_i} est ouvert.
2. On $C_x \subset U \cup U^c$...
3. Découle de 1.
4. Découle de 4 et 5.
5. Dans ce cas, $X_i^c = \cup_{j \in I, j \neq i} X_j$ est ouvert. Donc X_i est à la fois ouvert et fermé. C'est donc une composante connexe d'après 6.

□

Remarque 1. *Les parties connexes de $\mathbb{Q}$ muni de la topologie induite par $\mathbb{R}$ sont les points de $\mathbb{Q}$. En effet, soit A une partie de Q contenant deux éléments distincts $a_1 < a_2$. Soit $y \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ vérifiant $a_1 < y < a_2$. Alors,*

$$A =]-\infty, y[\cap A \cup]y, +\infty[\cap A$$

est réunion de deux ouverts non vides disjoints, donc A n'est pas connexe. En particulier, on remarque que les parties connexes d'espace topologique ne sont pas nécessairement ouvertes.

Proposition 7. *Soit X un espace compact.Pour tout $x \in X$, la composante connexe de X est l'intersection des voisinages de X à la fois ouverts et fermés.*

Proposition 8. *Tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion d'une famille au plus dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.*

4.3.3 Produit

Théorème 8. *Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques non vides. Alors l'espace topologique produit $X = \prod_{i\in I} X_i$ est connexe si et seulement si pour tout $i \in I$, X_i est connexe.*

Démonstration. Admis. □

Corollaire 5. *$\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ munis de la topologie usuelle sont connexes.*

4.4 Espaces métriques bien enchaînés

Définition 4. *Soit (X, d) un espace métrique, $x, y \in X$ et $\epsilon > 0$. On appelle ϵ-chaîne joignant x et y une suite finie $(a_0, ..., a_n)$ de X telle que $a_0 = x, a_n = y$ et $d(a_{i-1}, a_i) \leq \epsilon$ pour tout $i \in \{1, ...n\}$. On note $x \sim_\epsilon y$ s'il existe une ϵ-chaîne joignant x et y.*

Lemme 1. *La relation $\sim_\epsilon$ est une relation d'équivalence et les classes d'équivalences pour cette relation sont ouvertes et fermées dans X.*

Démonstration. La relation $\sim_\epsilon$ est bien reflexive, symétrique et transitive. Soit $a \in X$ et A_ϵ la classe d'équivalence de a. Soit $x \in A_\epsilon$. Soit $y \in B(x, \epsilon)$, alors $y \sim_\epsilon x$, donc $y \sim_\epsilon a$ et $y \in A_\epsilon$. Donc A_ϵ est ouvert. Soit $y \in \bar{A}_\epsilon$. Alors $d(y, A_\epsilon) = 0$. Donc, il existe $x \in A_\epsilon$ tel que $d(y, x) < \epsilon$. Donc $y \in A_\epsilon$. Donc A_ϵ est fermé. □

Définition 5. *Soit (X, d) un espace métrique, on dit que (X, d) est bien enchainé si pour tout $\epsilon > 0$ et pour tous $x, y \in X$, il existe une ϵ-chaîne joignant x et y.*

Théorème 9. *Soit (X, d) un espace métrique.*

1. *Si (X, d) est connexe, alors (X, d) est bien enchaîné.*
2. *Si (X, d) est compact, alors (X, d) est connexe si et seulement si (X, d) est bien enchaîné.*

Démonstration.

1. Supposons X connexe. Alors, tout ouvert et fermé non vide de X est égal à X. Or d'après le lemme précédent les classes d'équivalences de la relation $\sim_\epsilon$ sont ouvertes et fermées, donc égales à X. Donc pour $x, y \in X$, il existe une ϵ chaîne joignant x et y.
2. Supposons X compact et bien enchaîné. Soit f une fonction continue de X dans $\{0, 1\}$. Puisque f est continue sur X compact, f est uniformément continue. Donc, il existe $\epsilon > 0$ tel que $d(x, y) \leq \epsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 1$. C'est à dire $f(x) = f(y)$. Or X est bien enchainé. Donc pour tout $x, y \in X$

il existe une ϵ-chaîne joignant x et y donc $f(x) = f(y)$. Donc f est constante et X est connexe.
On donne une seconde démonstration utilisant un raisonnement pas l'absurde. Supposons que X soit bien enchaîné mais non connexe. Alors on peut recouvrir X par deux ensembles fermés disjoints non vides E_1 et E_2. La distance entre ces deux fermés est non nulle, sinon, puisque la distance est continue, elle atteint ses bornes, alors il existerait un élément commun aux deux ensembles E_1 et E_2. Mais si la distance entre E_1 et E_2 est non nulle, X n'est pas bien-enchaîné.

□

Remarque 2. *Un contre-exemple montrant qu'il existe des espaces métriques bien-enchaînés mais non connexes est fourni par l'ensemble $\mathbb{Q}$. En effet, on a :*

$$\mathbb{Q} =]-\infty, \sqrt{2}[\cap\mathbb{Q} \cup]\sqrt{2}, +\infty[\cap\mathbb{Q}$$

donc $\mathbb{Q}$ est réunion de deux ouverts disjoints non vides.

4.5 Espaces connexes par arc

Définition 6. *Soit X un espace topologique et $x, y \in X$. On appelle chemin ou arc dans X reliant x à y toute application continue $\varphi : [0,1] \to X$ telle que $\varphi(0) = x$ et $\varphi(1) = y$. Le point x est alors appelé l'origine du chemin et le point y son extrémité.*

Définition 7. *Soit X un espace topologique. On dit que X est connexe par arcs si pour tout $x, y \in X$ il existe un chemin reliant x et y.*

Proposition 9. *Si X est connexe par arcs alors il est connexe.*

Démonstration. Soit $a \in X$. Puisque X est connexe par arcs, pour tout $x \in X$, il existe une application ϕ_x, continue, définie sur $[0,1]$ telle que $\phi_x(0) = a$ et $\phi_x(1) = x$. Alors, puisque $[0,1]$ est connexe $A_x = \phi([0,1])$ est également connexe. D'après le théorème **??**, on sait que $X = \cup_{x\in X} A_x$ est connexe. □

Proposition 10. *Il existe des espaces connexes qui ne sont pas connexes par arcs.*

Démonstration. En effet, l'ensemble $F = \{(0,y); -1 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, \sin(\frac{1}{x})); x \in]0,1]\} \subset \mathbb{R}^2$ est connexe mais non connexe par arcs.

1. Montrons que F est connexe. Soit $B = \{(x, \sin(\frac{1}{x})); x \in]0,1]\}$. $A \subset F$. Alors B est connexe comme image par une application continue de l'ensemble connexe $]0,1]$. Par ailleurs, $F \subset \bar{B}$. En effet, soit $a = (0,y)$, $-1 \leq$

$y \leq 1$. Soit $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\sin(\theta) = y$ et soit $x_n = \frac{1}{\theta + 2\pi n}\}$. Alors $(x_n, \sin(x_n))$ tend vers a lorsque n tend vers $+\infty$. Donc $a \in \bar{B}$, donc $B \subset F \subset \bar{B}$ donc F est connexe.

2. Montrons que F n'est pas connexe par arcs. Soit $a = (0, \frac{1}{2})$ et $b = (\frac{1}{2}, \sin(2)$. Nous allons montrer qu'il n'existe pas de chemin reliant a à b dans X. En effet, supposons le contraire. Soit $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ une application continue de $[0, 1]$ dans X vérifiant $\phi(0) = a$ et $\phi(1) = b$. Soit $A = \{(0, y); -1 \leq y \leq 1\}$, F est fermé dans X. Donc, $\phi^{-1}(F)$ est fermé dans $[0, 1]$, donc compact. Soit $s = \sup \phi^{-1}(F)$. Puisque $\phi^{-1}(F)$ est compact, $s \in \phi^{-1}(F)$. C'est à dire que $\phi(s) = (0, \phi_2(s))$ où $\phi_2(s) \in [-1, 1]$. Soit ϵ vérifiant $0 < \epsilon << 1$. Puisque, ϕ est continue, il existe μ tel que pour tout $t \in [s, s + \mu]$ on ait $||\phi(s) - \phi(t)|| < \epsilon$. Comme, ϕ_1 est continue, $[0, \phi_1(s + \mu) \subset \phi_1([s, s + \mu])$ (théorème des valeurs intermédiares). Pour p et q assez grand, il existe donc t_p et t_q dans $]s, s + \mu$ tels que $\phi_1(t_p) = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2p\pi}$ et $\phi_1(t_q) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2q\pi}$. Alors, $\phi_2(t_p) = -1$ et $\phi_2(t_q) = 1$. On a donc $||\phi(s) - \phi(t)|| > \epsilon$ ou $||\phi(s) - \phi(t)|| > \epsilon$ ce qui est une contradiction.

□

Proposition 11. *Soit $n \geq 2$ et B une partie au plus dénombrable de $\mathbb{R}^n$, alors $\mathbb{R}^n/B$ est connexe par arcs.*

Corollaire 6. *Pour tout $n \geq 2$, les espaces $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas homéomorphes.*

4.6 Ensemble de Cantor

Définition 8. *L'espace topologique produit $\mathcal{C} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$, où chaque facteur est muni de la topologie discrète, est appelé ensemble de Cantor discret.*

Définition 9. *Soit X un espace topologique. Une partie A de X est dite totalement discontinue, si pour tout $x \in A$, la composante connexe de x est réduite à $\{x\}$.*

Proposition 12. *L'espace de Cantor $\mathcal{C}$ est compact et métrisable, infini non dénombrable, sans points isolés et totalement discontinu.*

Démonstration. Un élément de $\mathcal{C}$ est une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ où pour tout n, $x_n \in \{0, 1\}$. L'espace $\mathcal{C}$ compact comme produit d'une famille d'espaces compacts. Il est métrisable et une distance définissant sa topologie est définie par :

$$d((x_n)_{n \geq 1}, (y_n)_{n \geq 1}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}.$$

$\mathcal{C}$ est infini.
Supposons que $\mathcal{C}$ est dénombrable. Alors, on peut ordonner les éléments de $\mathcal{C}$ selon $\mathbb{N}^*$:

$$\mathcal{C} = \{x^p ; p \in \mathbb{N}^*.\}$$

Où ,

$$x^p = (x_n^p)_{n\in\mathbb{N}^*}, \quad x_n^p \in \{0,1\}.$$

Soit x définie par :

$$x(n) = 1 - x_n^n.$$

Alors pour tout n, $x_n \in \{0,1\}$ donc $x \in \mathcal{C}$. Mais pour tout p, $x \neq x^p$ donc $x \notin \mathcal{C}$. Contradiction. Donc $\mathcal{C}$ n'est pas dénombrable.
Montrons que $\mathcal{C}$ n'a pas de points isolés. C'est à dire que pour tout $x \in \mathcal{C}$, tout voisinage de x dans $\mathcal{C}$ contient un élément y différent de x. Soit donc $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un élément de $\mathcal{C}$. Soit V un voisinage x dans $\mathcal{C}$. Alors il existe un ouvert élémentaire O contenant x de la forme, $O = \prod_{n\in\mathbb{N}^*} U_n$ avec U_n ouvert de $\{0,1\}$ et $U_n = \{0,1\}$ sauf pour sous-ensemble fini d'indices $J \subset \mathbb{N}^*$. Soit alors $p \in \mathbb{N}^*/J$ et soit $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{C}$ tel que $y_n = x_n$ si $n \neq p$ et $y_p = 1 - x_p$. Alors $y \in V$ et $y \neq x$. Donc x n'est pas isolé.
Il reste à montrer que $\mathcal{C}$ est totalement discontinu. Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{C}$ et C_x sa composante connexe. Soit $y = (y_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}$ tel que $y \neq x$. Alors il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $x_p \neq y_p$. Pour tout $z \in \mathcal{C}$, on pose $\rho_p(z) = z_p$. Alors ρ_p est la projection canonique de $\mathcal{C}$ sur $\{0,1\}$ donc ρ_p est continue. Comme x_p est à la fois ouvert et fermé dans $\{0,1\}$, on en déduit que $U_p = \rho_p^{-1}(x_p)$ est la fois ouvert et fermé dans $\mathcal{C}$. Or $x \in U_p$. Donc $C_x \subset U_p$ (car $U_p \cup U_p^c$ forme une partition de $\mathcal{C}$). Or $y \notin U_p$, donc $y \notin C_x$, donc $c_x = \{x\}$. □

L'ensemble triadique de Cantor

Soit $I = [a, a+h]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. On pose $T(I) = [a + \frac{h}{3}, a + \frac{2h}{3}] \cup [a + \frac{2h}{3}, a+h]$. Si Y est une suite d'intervalles compacts disjoints $I_1, ..., I_p$, on pose :

$$T(Y) = \cup_{i=1}^p T(I_i).$$

Soit

$$K_1 = T([0,1]), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, K_{n+1} = T(K_n) \text{ et } K = \cap_{n\in\mathbb{N}^*} K_n.$$

Alors K est une partie compacte de K appelée ensemble triadique de Cantor. Pour tout $n \geq 1$, on a,

$$K_n = \cup_{\alpha\in\{0,2\}^n} I_n(\alpha),$$

où

$$I_n(\alpha) = [\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{3^i}, \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{3^i} + \frac{1}{3^n}].$$

En effet, pour $n = 1$, K_1 est constitué de deux intervalles de longueur $\frac{1}{3}$:

$$K_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1].$$

Ensuite, K_2 est constitué de quatre intervalles de longueur $\frac{1}{9}$, construits en appliquant la tranformation T aux deux précédents :

$$K_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{2}{9} + \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{3} + \frac{2}{9}, \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9}].$$

Supposons le résultat vrai jusqu'à l'ordre n, alors on obtient en appliquant T à K_n que K_{n+1} est la réunion de 2^{n+1} intervalles de longueur $\frac{1}{2^{n+1}}$:

$$K_{n+1} = \cup_{\alpha \in \{0,2\}^n} T(I_n(\alpha)).$$

Or pour α fixé,

$$\begin{aligned} T(I_n(\alpha)) &= T([\sum_{i=1^n} \frac{\alpha_i}{3^i}, \sum_{i=1^n} \frac{\alpha_i}{3^i} + \frac{1}{3^n}]) \\ &= [\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{3^i}, \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{3^i} + \frac{1}{3^{n+1}}] \cup [\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{3^i} + \frac{2}{3^{n+1}}, \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{3^i} + \frac{2}{3^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}}] \end{aligned}$$

D'où,

$$K_{n+1} = \cup_{\alpha \in \{0,2\}^{n+1}} I_{n+1}(\alpha).$$

Proposition 13. *Pour tout $x = (x_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{C}$ on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2x_n}{3^{n+1}}$. Alors f est un homéomorphisme de $\mathcal{C}$ sur K.*

Démonstration. On vérifie que pour tout $x, y \in \mathcal{C}$, $0 \leq f(x) \leq 1$, et $|f(x) - f(y)| \leq 2d(x, y)$. Donc f et continue. Montrons que f est injective. Soit $x \neq y$ et $N \in N^*$ le plus petit entier tel que $x_N \neq y_N$. On suppose $y_N = 1$ et $x_n = 0$, alors :

$$f(y) - f(x) \geq \frac{1}{23^N}.$$

Donc f est injective. Donc, comme $\mathcal{C}$ est compact, f est un homéomorphisme de $\mathcal{C}$ dans $f(\mathcal{C})$. Il reste à montrer que $f(\mathcal{C}) = K$. Soit $x = (x_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{C}$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha = 2(x_1, ..., x_N)$, alors $\alpha \in \{0, 2\}^N$. Et, on a :

$$0 \leq f(x) - \sum_{i=1}^{N} \frac{2x_i}{3^i} \leq \frac{1}{3^N}.$$

Donc, pour tout $N \in n^*$, $f(x) \in K_N$, donc $f(x) \in K$.
Réciproquement, soit $y \in K$, alors il existe $x \in \mathcal{C}$ tel que pour tout $N \geq 1$,

$$y \in [\sum_{i=1}^{N} \frac{2x_i}{3^i}, \sum_{i=1}^{N} \frac{2x_i}{3^i} + \frac{1}{3^N}].$$

Soit $z^N = (x_1, x_2, ..., x_N, 0, 0, ...)$. Alors z^N tend vers x dans $\mathcal{C}$ et

$$0 \leq y - f(z^N) \leq \frac{1}{3^N}.$$

Donc $f(z^N)$ converge vers y mais f est continue donc $y = f(x)$ et $y \in f(\mathcal{C})$.

$\square$