Chapitre 5

Espaces fonctionnels

On note $\mathcal{F}(X, Y)$ l'ensemble des applications de X dans Y.

5.1 La convergence simple et la convergence uniforme

Définition 1. *Soit X un ensemble muni ou non d'une topologie, et Y un espace topologique. On dit qu'une suite d'applications $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X dans Y converge simplement vers une application $f : X \to Y$ si pour tout $x \in X$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$ dans Y*

Définition 2. *Soit X un ensemble et (Y, d) un espace métrique. On dit qu'une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ d'applications de X dans Y converge uniformément vers une application $f : X \to Y$ si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; n > N \Rightarrow \forall x \in X\, d(f_n(x), f(x)) < \epsilon.$$

5.2 Topologie produit et convergence simple

L'ensemble des applications de X dans Y n'est rien d'autre que l'espace prosuit Y^X. On a :

Proposition 1. *Une suite d'applications $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X dans Y converge simplement vers une application $f : X \to Y$ si et seulement si elle converge vers f pour la topologie produit.*

5.3 Distance de la convergence uniforme

Lemme 1. *Soit X un ensemble, (Y, d) un espace métrique, $f \in Y^X$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans Y^X. Soit d' une distance sur Y uniformément équivalente à d. Alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f pour la distance d si et seulement si elle converge uniformément vers f pour la distance d'.*

Démonstration. Supposons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f pour la distance d, et montrons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f pour la distance d'. Soit $\epsilon > 0$. On sait qu'il existe $\mu > 0$ tel que $d(f_n(x), f(x)) < \mu \Rightarrow d'(f_n(x), f(x)) < \epsilon$. Mais d'après la continuité uniforme de f pour d, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n > N \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \mu \forall x \in X$. D'où le résultat. □

Définition 3. *Soient X un ensemble et (Y, d) un espace métrique. On pose $d' = \min(1, d)$ et pour $f, g \in Y^X$, on pose $D'(f, g) = \sup_{x\in X} d'(f(x), g(x))$. On appelle topologie de la convergence uniforme et on note $\mathcal{T}_{cu}$ la topologie sur Y^X associée à la distance D'. La topologie ne dépend que de la classe d'équivalence de d.*

Définition 4. *On note $C(X, Y)$ l'ensemble des applications continues de X dans Y et $B(X, Y)$ l'ensemble des applications bornées de X dans Y.*

Proposition 2. *Soient X un ensemble quelconque et (Y, d) un espace métrique. Une suite d'applications $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X dans Y converge uniformément vers une application f de X dans Y si et seulement si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $(Y^X, \mathcal{T}_{cu})$.*

Démonstration. Il suffit d'écrire les définitions. □

Théorème 1. *Soient X un espace topologique, (Y, d) un espace métrique et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X dans Y qui converge uniformément vers une application f de X dans Y. Alors si toutes les fonctions f_n sont continues en $a \in X$, alors f est continue en a. C'est à dire que l'ensemble des fonctions continues en a est un ensemble fermé de $(Y^X, \mathcal{T}_{cu})$. De même, $C(X, Y)$ est un sous-ensemble fermé de $(Y^X, \mathcal{T}_{cu})$.*

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. On écrit :

$$d(f(x), f(a)) \leq d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(a)) + d(f_n(a), f(a)).$$

Or, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n > N$ implique $(d(f_n(x), f(x)) < \frac{\epsilon}{3}$ pour tout $x \in X$. Soit donc $n > N$. Puisque f_n est continue en a, il existe un voisinage V_a de a tel que pour tout $x \in V_a$ $d(f_n(x), f_n(a)) < \frac{\epsilon}{3}$. D'où le résultat. □

Proposition 3. *Soit (X, d_1), (Y, d) des espaces métriques et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite d'applications uniformément continues de X dans Y. Si la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers une application f, alors f est uniformément continue.*

Démonstration. Puisque (f_n) converge uniformément ves f, il existe N tel que pour tout $n > N$, $\sup_{x\in X} d(f_n(x), f(x)) \leq \frac{\epsilon}{3}$. Soit $n > N$ fixé. Puisque f_n est uniformément continue, il existe μ tel que $d_1(x, y) < \mu$ implique $d(f(x), f(y)) < \frac{\epsilon}{3}$. Alors,

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &\leq d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(y)) + d(f_n(y), f(y)) \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} & \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Ce qui montre que f est uniformément continue. □

Théorème 2 (Dini). *Soit X un espace compact et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications continues de X dans $\mathbb{R}$. On suppose que :*

1. *la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, c'est à dire que pour tout $x \in X$, la suite $f_n(x)$ est croissante.*
2. *La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une application continue f de X dans $\mathbb{R}$.*

Alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.

Démonstration. On pose $F_n = \{x \in X; |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\} = \{x \in X; f(x) - f_n(x) \geq \epsilon\}$. Alors comme $f_n - f$ est continue, $F_n = (f - f_n)^{-1}([\epsilon, +\infty[)$ est un sous-ensemble fermé de X. Puisque $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$, F_n est une suite décroissante au sens de l'inclusion. Soit $x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) - f_n(x) \geq \epsilon$. Ce qui est impossible puisque $f_n(x)$ tend vers $f(x)$. Donc $\cap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$. Donc $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de fermés d'intersection vide. Or X est un espace compact, donc il existe une sous-famille finie d'intersection vide. Dans ce cas, cela signifie qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $F_N = \emptyset$. C'est à dire que :

$$\exists N \in \mathbb{N} / \forall n > N, \forall x \in X, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Donc la suite f_n converge uniformément vers f. □

Lemme 2. *Soient X un ensemble, (Y, d) un espace métrique et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(Y^X, \mathcal{T}_{cu})$. Si pour tout $x \in X$ la suite $(f_n)(x)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x) \in Y$, alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.*

Démonstration. On peut supposer que la distance d est majorée par 1 et que la topologie $\mathcal{T}_{cu}$ est donnée par la distance $D_\infty(f,g) = \sup_{x\in X} d(f(x), g(x))$. Alors,

$$(f_n) \text{ est de Cauchy dans } (Y^X, \mathcal{T}_{cu}) \Rightarrow \exists N/p,q > N \Rightarrow D_\infty(f_p, f_q) < \epsilon.$$

Donc,

$$\exists N/p,q > N \Rightarrow d(f_p(x), f_q(x)) < \epsilon \,\forall x \in X.$$

Par passage à la limite lorsque $q \to +\infty$ on obtient,

$$\exists N/p > N \Rightarrow D_\infty(f_p(x), f(x)) < \epsilon \forall x \in X.$$

C'est à dire que f_n converge uniformément vers f. □

Théorème 3. *Soient X un ensemble, (Y,d) un espace métrique complet. Alors les espaces métriques $(Y^X, \mathcal{T}_{cu})$ et $(B(X,Y), \mathcal{T}_{cu})$ sont complets. Si X est un espace topologique $(C_b(X,Y), \mathcal{T}_{cu})$ est complet.*

Démonstration. Soit (f_n) une suite de Cauchy de $(Y^X, \mathcal{T}_{cu})$. Alors :

$$\exists N; p,q > N \Rightarrow \;\forall x \in X d'(f_p(x), f_q(x)) < \epsilon,$$

avec $d' = min(1,d)$. Donc pour tout x fixé, $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy de (Y,d'). Or (Y,d') est complet, donc il existe $l(x)$ tel que $f_n(x) \to l(x)$. On pose $f(x) = l(x)$. Alors D'après le lemme précédent (f_n) converge uniformément vers f.
Soit (f_n) une suite de Cauchy de $(B(X,Y), \mathcal{T}_{cu})$. Alors, d'après ce qui précède (f_n) converge uniformément vers une fonction f. Soit n tel que $\forall x \in X$,$d(f_n(x), f(x)) \leq \epsilon)$. Alors $d(f(x), f(y) \leq d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(y)) + d(f_n(y), f(y)) \leq M + 2\epsilon$.
Enfin, soit (f_n) une suite de Cauchy de $(B(X,Y), \mathcal{T}_{cu})$. Alors, d'après ce qui précède (f_n) converge uniformément vers une fonction f. Mais on avait vu que f était aussi continu. D'où le résultat. □

Théorème 4 (Inversion des limites)**.** *Soient X un espace topologique, A une partie de X, $x_0 \in \bar{A}$, (Y,d) un espace métrique complet et f_n une suite dans Y^A convergeant uniformément vers $f \in Y^A$. Si pour tout n, f_n admet en x_0 une limite $l_n \in Y$, alors il existe $l \in Y$ tel que :*

1. $$\lim_{n\to+\infty} l_n = l.$$
2. $$\lim_{x\to x_0} f(x) = l.$$

Autrement dit, on a :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)) = \lim_{n\to+\infty}(\lim_{x\to x_0} f_n(x))$$

Démonstration. On montre d'abord le 1. Pour cela on va montrer que la suite $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans Y. Soit $\epsilon > 0$ fixé. On sait que la suite f_n converge uniformément vers f. Donc il existe N, tel que $n, m > N$ implique que pour tout $x \in A$, $d(f_n(x), f_m(x)) < \frac{\epsilon}{3}$. Puisque f_m et f_n convergent vers l_m et l_n lorsque x tend vers x_0, il existe un voisinage V de x_0 tel que pour tout $x \in V \cap A$, $d(f_m(x), l_m) < \frac{\epsilon}{3}$ et $d(f_n(x), l_n) < \frac{\epsilon}{3}$. On a alors, pour $x \in V \cap A$:

$$d(l_m, l_n) \leq d(l_m, f_m(x)) + d(f_m(x), f_n(x)) + d(f_n(x), l_n) \leq \epsilon.$$

La suite $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy dans Y, or Y est complet, donc elle converge vers une limite l. Montrons maintenant le 2. On sait que la suite f_n converge uniformément vers f et que la suite l_n tend vers l. Donc il existe N, tel que $n > N$ implique que pour tout $x \in A$, $d(f_n(x), f(x)) < \frac{\epsilon}{3}$ et $d(l_n, l) < \frac{\epsilon}{3}$. Soit donc $n > N$ fixé. On sait qu'il existe un voisinage V de x_0 tel que pour tout $x \in V \cap A$, $d(f_n(x), l_n) \leq \frac{\epsilon}{3}$. Alors pour tout $x \in V \cap A$, on a :

$$d(f(x), l) \leq d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), l_n) + d(l_n, l) \leq \epsilon.$$

□

Théorème 5. *Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $C([a, b], \mathbb{R})$ convergeant uniformément vers une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Alors :*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Théorème 6. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}$. on suppose que :*

1. *(f_n) converge simplement vers une fonction f.*
2. *(f_n') converge uniformément vers une fonction g.*

Alors f est dérivable sur I et sa dérivée est g.

5.4 Théorème d'Ascoli

Soient X un espace toplogique et (Y, d) un espace métrique. Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la caractérisation des parties compactes de $C(X, Y)$.

Définition 5. *Soit X un espace toplogique, (Y,d) un espace métrique et $\mathcal{H}$ une partie de Y^X.On dit que $\mathcal{H}$ est équicontinue en un point x_0 si pour tout $\epsilon > 0$,*

$$\exists V \in \mathcal{V}(x_0); \forall x \in V, \forall f \in \mathcal{H},\ d(f(x_0), f(x)) < \epsilon. \tag{5.1}$$

On dit que $\mathcal{H}$ est équicontinue si pour tout point x_0 de X, la propriété (4.1) *est vérifiée.*

Proposition 4. *Soit X un espace topologique et (Y,d) un espace métrique.*

1. *Si $\mathcal{H}$ est une partie précompacte dans $(C(X,Y), \mathcal{T}_{cu})$, alors $\mathcal{H}$ est équicontinue.*
2. *Si $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite dans $C(X,Y)$ qui converge uniformément vers une application f, alors $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinue.*

Démonstration. 1. Soit $x_0 \in X$ et soit $\epsilon > 0$ fixé. Puisque $\mathcal{H}$ est une partie précompacte de $(C(X,Y), \mathcal{T}_{cu})$, $\mathcal{H}$ peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon $\frac{\epsilon}{3}$: $B(f_1, \frac{\epsilon}{3}), B(f_2, \frac{\epsilon}{3}), ..., B(f_N, \frac{\epsilon}{3})$. Puisque les f_i sont continues et en nombre fini, il existe un voisinage V de x_0 tel que pour tout $x \in V$ et pour tout $i \in \{1, ..., N\}$, on ait $d(f_i(x), f_i(x_0)) \leq \frac{\epsilon}{3}$. On donc pour tout $x_0 \in X$, pour toute fonction f dans $\mathcal{H}$, il existe $i \in \{1, ..., N\}$ et un voisinage V de x_0 tel que pour tout $x \in V$ on ait :

$$d(f(x), f(x_0)) \leq d(f(x), f_i(x)) + d(f_i(x), f_i(x_0)) + d(f_i(x_0), f(x_0)) \quad \leq \epsilon.$$

Ce qui montre que $\mathcal{H}$ est équicontinue.

2. Puisque la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, l'ensemble $\cup_{n\in N]} f_n$ est précompact. En effet, soit f la limite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n > N \Rightarrow d(f_n, f) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Soit $n > N$, on a alors pour tout $p > N$:

$$d(f_n, f_p) \leq d(f_n, f) + d(f, f_p) < \epsilon.$$

On a alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \cup_{i=1^N} B(f_i, \epsilon) \cup B(f_n, \epsilon)$. On applique ensuite le 1. □

Théorème 7. *Soit X un espace topologique, (Y,d) un espace métrique et $\mathcal{H}$ une partie de $C(X,Y)$. Si $\mathcal{H}$ est relativement compacte dans $(C(X,Y), \mathcal{T}_{cu})$, alors $\mathcal{H}$ est équicontinue et pour tout $x \in X$, $\mathcal{H}(x)$ est relativement compact dans Y.*

Démonstration.

Si $\mathcal{H}$ est relativement compacte dans $(C(X,Y),\mathcal{T}_{cu})$ alors $\mathcal{H}$ est précompact dans $(C(X,Y),\mathcal{T}_{cu})$ donc $\mathcal{H}$ est équicontinue. Par ailleurs l'application $f \to f(x)$ est une application continue, donc $\{f(x), f \in \bar{\mathcal{H}}\}$ est une partie compacte de Y. □

Théorème 8 (Ascoli)**.** *Soit X un espace topologique compact compact, (Y,d) un espace métrique et $\mathcal{H}$ une partie de $C(X,Y)$. Alors $\mathcal{H}$ est relativement compacte dans $(C(X,Y),\mathcal{T}_{cu})$, si et seulement si $\mathcal{H}$ est équicontinue et pour tout $x \in X$, $\mathcal{H}(x)$ est relativement compact dans Y.*

Démonstration. **Le cas où X est un espace métrique** Soit d_1 la métrique de X. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{H}$. On veut montrer qur l'on peut extraire une sous-suite convergente de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $(C(X,Y),\mathcal{T}_{cu})$. Puisque X est compact, on sait qu'il est séparable. Soit $D = \{x_k; k \in \mathbb{N}\}$ un sous-semble dense dans X. Alors $(f_n(x_k)_{k\in\mathbb{N}})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\bar{\mathcal{H}}(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Or $\mathcal{H}(\bar{x_k})$ est compact, donc $\prod_{k\in\mathbb{N}} \bar{\mathcal{H}}(x_k)$ est un compact. On peut donc extraire de $(f_n(x_k)_{k\in\mathbb{N}})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(f_{\varphi(n)}(x_k)_{k\in\mathbb{N}})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge. On pose alors $f(x_k) = \lim_{n\to+\infty} f_{\varphi(n)}(x_k)$.
On s'intéresse maintenant à la convergence de $(f_{\varphi(n)}(x_k)_{k\in\mathbb{N}})_{n\in\mathbb{N}}$ pour x quelconque. Soit $\epsilon > 0$, il existe μ tel que $d_1(x,y) < \mu \Rightarrow d(g(x),g(y)) < \frac{\epsilon}{3}$ pour tout $g \in \mathcal{H}$. Soit k tel que si $d_1(x,x_k) < \mu$ alors $d(f_{\varphi(n)}(x), f_{\varphi(n)}(x_k))) < \frac{\epsilon}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier :

$$d(f_{\varphi(n)}(x), f_{\varphi(p)}(x))) \leq \quad d(f_{\varphi(n)}(x), f_{\varphi(n)}(x_k))) + d(f_{\varphi(n)}(x_k), f_{\varphi(p)}(x_k))) + d(f_{\varphi(p)}(x_k), f_{\varphi(p)}(x))) <$$

pour n,p assez grands. On en déduit que $f_{\varphi(n)}(x)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\bar{\mathcal{H}}(x)$ et donc qu'elle converge. On pose $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_{\varphi(n)}(x)$.
On montre maintenant la convergence uniforme. Soit $\epsilon > 0$. Il existe μ_k tel que $d_1(x,x_k) < \mu_k$ alors $d(g(x),g(x_k))) < \frac{\epsilon}{3}$ pour tout $g \in \mathcal{H}$. Or $(B(x_k,\mu_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est un recouvrement de X. On peut donc en extraire un sous-recouvrement fini : $(B(x_{k_i},\mu_{k_i}))_{i\in\{1,\dots,N\}}$. Alors on a : En particulier :

$$d(f_{\varphi(n)}(x), f_{\varphi(p)}(x))) \leq \quad d(f_{\varphi(n)}(x), f_{\varphi(n)}(x_{k_i}))) + d(f_{\varphi(n)}(x_{k_i}), f_{\varphi(p)}(x_{k_i}))) + d(f_{\varphi(p)}(x_{k_i}), f_{\varphi(p)}(x)))$$

dès que $n,p > N$ assez grand (car $i \in \{1,....,N\}$ fini donc on peut choisir N indépendamment de i en prenant un max). Ainsi la suite est de Cauchy dans $(C(X,Y),\mathcal{T}_{cu})$ et elle converge simplement vers f donc elle converge uniformément.

Le cas où X est un espace topologique Si $\mathcal{H}$ est relativement compacte dans $(C(X,Y),\mathcal{T}_{cu})$ alors $\mathcal{H}$ est précompact dans $(C(X,Y),\mathcal{T}_{cu})$ donc $\mathcal{H}$ est équicontinue. Par ailleurs l'application $f \to f(x)$ est une application continue, donc $\{f(x), f \in \bar{\mathcal{H}}\}$ est une partie compacte de Y. Donc, $\mathcal{H}(x)$ est inclus dans un compact. Donc $\mathcal{H}(x)$ est relativement compact puisque tout fermé inclus dans un compacte est compact.

Puisque X est compact, toute fonction continue est bornée. Dans ce cas, la topologie de $(C(X,Y),\mathcal{T}_{cu})$ est donnée par la métrique D_∞. On sait que tout espace métrique précompact et complet est compact. Pour montrer que $\mathcal{H}$ est relativement compact, il suffit donc de montrer que $\bar{\mathcal{H}}$ est précompact et $\bar{\mathcal{H}}$ est complet, ou encore que $\mathcal{H}$ est précompact et $\bar{\mathcal{H}}$ complet, car l'adhérence de tout espace précompact est précompact. On montre d'abord que $\mathcal{H}$ est précompact. Soit $\epsilon > 0$.

$$\mathcal{H} \text{ équicontinue } \Rightarrow \forall z \in X, \exists V_z \in \mathcal{V}(z); \forall x \in V_z, d(f(x), f(z)) < \frac{\epsilon}{4}.$$

$$X \text{ compact } \Rightarrow \exists A \subset X/|A| < +\infty \text{ et } X = \cup_{z\in A} V_z.$$

Soit $K = \cup_{z\in A}\mathcal{H}(z)$. Comme A est fini, $\bar{K} = \overline{\cup_{z\in A}\mathcal{H}(z)} = \cup_{z\in A}\overline{\mathcal{H}(z)}$ est compact. Donc K est relativement compact donc précompact. Donc,

$$\exists B = (y_1, ..., y_p) \subset K \subset Y/K \subset \cup_{i=1}^p B(y_i, \frac{\epsilon}{4}).$$

Pour toute application ϕ de A dans B, on pose :

$$C_\phi = \{f : X \to Y; \forall z \in A, \forall x \in V_z, d(f(x), \phi(z)) < \frac{\epsilon}{2}\}.$$

Alors $\delta(C_\phi) < \epsilon$. En effet, soit $f, g \in C_\phi$, alors pour tout $x \in X$, $\exists z \in A$ tel que $x \in V_z$ et alors $d(f(x), g(x)) \leq d(f(x), \phi(z)) + d(\phi(z), g(x)) < \epsilon$. Et, $\mathcal{H} \subset \cup_{\phi\in B^A} C_\phi$. En effet, soit $f \in \mathcal{H}$. Alors, pour tout $x \in X$, il existe $z \in A$ tel que $x \in V_z$. Par définition, $f(z) \in K$, soit alors i_z le plus petit indice dans $\{1, ..., p\}$ tel que $d(y_{i_z}, f(z)) < \frac{\epsilon}{4}$. On définit ϕ comme l'application qui à $z \in A$ associe $y_{i_z} \in B$. Alors,

$$d(f(x), \phi(z)) \leq d(f(x), f(z)) + d(f(z), \phi(z)) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Donc, $f \in C_\phi$. Et $\mathcal{H}$ est précompact puisque B^A est fini.
On montre maintenant que $\bar{\mathcal{H}}$ est complet.
Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans $\bar{\mathcal{H}}$. Alors pour tout n il existe $g_n \in \mathcal{H}$ tel que $d_\infty(f_n, g_n) \leq \frac{1}{n}$. Alors g_n est une suite de Cauchy et $g_n(x)$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{H}(x)$. Or $\bar{\mathcal{H}}(x)$ est compact donc complet. Donc $g_n(x)$ converge vers un élément $g(x)$ dans Y. Dans ce cas, on sait que la convergence est uniforme et que g est continue. Par ailleurs $d_\infty(f_n, g) \leq d_\infty(f_n, g_n) + d_\infty(g_n, g)$. Donc f_n tend vers g.

□

5.5 Théorème de Stone-Weierstrass

Dans cette section $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 6. *Soit X un espace topologique et A un sous-ensemble non vide de $C(X,\mathbb{K})$. On dit que A sépare les points de X si pour tout $x, y \in X$ avec $x \neq y$, il existe $f \in A$ tel que $f(x) \neq f(y)$.*

Définition 7. *Soit X un espace topologique et A un sous-ensemble non vide de $C(X,\mathbb{K})$. On dit que A est une sous-algèbre de $C(X,\mathbb{K})$ si pour tout $f, g \in A$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $f + \lambda g \in A$ et $fg \in A$.*

Lemme 3. *Il existe une suite de polynômes à coefficients réels $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, vérifiant $P_n(0) = 0$ et qui converge uniformément vers la fonction $\sqrt{t}$ sur $[0,1]$.*

Démonstration. On considère la suite de polynômes suivante :

$$\begin{aligned} P_0(x) = &\quad 0 \\ P_{n+1}(x) = &\quad P_n(x) + \tfrac{1}{2}(x - P_n^2(x)) \end{aligned}$$

Alors on a,

$$0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}.$$

En effet, pour $n = 0$, c'est vrai. Supposons le résultat vrai jusqu'à l'ordre n. Alors,

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= P_n(x) + \frac{1}{2}(x - P_n^2(x)) \\ &\geq 0 + \frac{1}{2}(x - x) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Et,

$$\begin{aligned} \sqrt{x} - P_{n+1}(x) &= \sqrt{x} - P_n(x) - \frac{1}{2}(x - P_n^2(x))) \\ &= (\sqrt{x} - P_n(x))(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + P_n(x)) \\ &\geq (\sqrt{x} - P_n(x))(1 - \sqrt{x}) \text{ car } P_n(x) \leq \sqrt{x}. \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

On montre maintenant que :

$$\sqrt{x} - P_n(x) \leq \frac{2\sqrt{x}}{2 + n\sqrt{x}}.$$

En effet, cette dernière égalité est équivalente à,

$$nx \leq (2 + n\sqrt{x})P_n(x).$$

Le résultat est vrai à l'ordre 0. Supposons qu'il est vrai à l'ordre n, alors,

$$\begin{aligned}
(2 + (n+1)\sqrt{x})P_{n+1}(x) &= (2 + (n+1)\sqrt{x})(P_n(x) + \frac{1}{2}(x - P_n^2(x)) \\
&\geq (2 + n\sqrt{x})P_n(x) + \sqrt{x}P_n(x) + (n+1)\sqrt{x}\frac{1}{2}(x - P_n^2(x)) + x - P_n^2(x) \\
&\geq nx + x + (n+1)\sqrt{x}\frac{1}{2}(x - P_n^2(x)) + \sqrt{x}P_n(x) - P_n^2(x) \\
&\text{(hypothèse de récurrence)} \\
&\geq (n+1)x + (n+1)\sqrt{x}\frac{1}{2}(x - P_n^2(x))(\text{car } P_n(x) \leq \sqrt{x}) \\
&\geq (n+1)x(\text{car } P_n(x) \leq \sqrt{x}).
\end{aligned}$$

On a ainsi montré la convergence uniforme de la suite P_n vers $\sqrt{x}$ sur $[0, 1]$. □

Lemme 4. *Soit X un espace compact et A une sous-algèbre de $(C(X, \mathbb{R}), D_\infty)$. Alors,*

1. *$\bar{A}$ est une sous-algèbre de $C(X, \mathbb{R})$.*
2. *Pour tout $f, g \in \bar{A}$, $\sup(f, g)$, $\inf(f, g) \in \bar{A}$.*

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f, g \in \bar{A}$. On veut montrer que $f + \lambda g$ et fg appartiennent à $\bar{A}$. Soit $f_n \in A$ et $g_n \in A$ deux suites qui convergent vers f et g dans $(C(X, \mathbb{R}), D_\infty)$. Alors $f_n + \lambda g_n$ et $f_n g_n$ appartiennent à A. On a alors pour tout $x \in X$,

$$|(f_n(x) + \lambda g_n(x)) - (f(x) + \lambda g(x))| \leq |f_n(x) - f(x)| + |\lambda||g_n(x) - g(x)|$$

Donc pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$ et tout $x \in X$,

$$|(f_n(x) + \lambda g_n(x)) - f(x) + \lambda g(x))| \leq \epsilon.$$

Ce qui montre que $f + \lambda g \in \bar{A}$. De même pour tout $x \in X$,

$$\begin{aligned}
|(f_n(x)g_n(x)) - f(x)g(x))| &= |(f_n(x) - f(x))g_n(x) + (g_n(x) - g(x))f(x)| \\
&\leq |f_n(x) - f(x)||g_n(x) - g(x)| + |f_n(x) - f(x)||g(x)| \\
&+ |g_n(x) - g(x)||f(x)| \\
&\leq |f_n(x) - f(x)||g_n(x) - g(x)| + |f_n(x) - f(x)|D_\infty(g, 0) \\
&+ |g_n(x) - g(x)|D_\infty(f, 0)
\end{aligned}$$

Ce qui montre la convergence uniforme de $f_n g_n$ vers fg.

On a $\sup(f(x), g(x)) = \frac{f+g+|f-g|}{2}$ et $\min(f(x), g(x)) = \frac{f+g-|f-g|}{2}$. Donc pour montrer le résultat il suffit de montrer que pour toute fonction $f \in \bar{A}$, $|f| \in \bar{A}$. Puisque X est compact il existe $a > 0$ tel que $a|f(x)| < 1$ pour tout $x \in X$. Or $|f(x)| = \sqrt{f^2(x)}$. D'après le lemme précédent il existe une suite de polynômes P_n vérifiant $P_n(0) = 0$ qui convergent tels que $P_n(a^2 f^2)$ convergent uniformément vers $a|f|$. Or puisque $f \in \bar{A}$, $P_n a^2 f^2 \in \bar{A}$. Donc, puisque $\bar{A}$ est fermé, $a|f| \in \bar{A}$.

□

Lemme 5. *Soit X un espace compact et A une partie de $(C(X,\mathbb{R}), D_\infty)$ telle que :*

1. *pour $f, g \in A$, $\max(f,g)$, $\min(f,g) \in A$.*
2. *Pour tout $x \in X$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe $f \in A$ telle que $f(x) = \lambda$.*
3. *Pour tous $x, y \in X$ tels que $x \neq y$ et pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, il existe $f \in A$ telle que $f(x) = \lambda$ et $f(y) = \mu$.*

Alors A est dense dans $(C(X,\mathbb{R}), D_\infty)$.

Démonstration. Soit $f \in C(X,\mathbb{R})$ et soit $\epsilon > 0$. Soit $x \in X$. Pour tout $y \in X$ il existe $g_{x,y} \in A$ tel que $g_{x,y}(x) = f(x)$ et $g_{x,y}(y) = f(y)$. Comme f et $g_{x,y}$ sont continues, $U_{x,y} = \{z \in X; g_{x,y}(z) < f(z) + \epsilon\} = (g_{x,y} - f)^{-1}(]-\infty, \epsilon[)$ est un ouvert de X qui contient x et y. Alors $X = \cup_{y \in X} U_{x,y}$. Comme X est compact, il existe $y_1, ..., y_p \in X$ tel que $X = \cup_{i=1}^{p} U_{x,y_i}$. Soit $g_x = \min(g_{x,y_1}, ..., g_{x,y_p})$. Alors, $g_x(x) = x$ et $g_x(z) < f(z) + \epsilon$ pour tout $z \in X$. Comme g_x et f sont continues, $V_x = \{z \in X; g_x(z) > f(z) - \epsilon\} = (g_x - f)^{-1}(]-\epsilon, +\infty[$ est un ouvert de X qui contient x. On a $X = \cup_{x \in X} V_x$. Or X est compact donc il existe $x_1, ..., x_n \in X$ tel que $X = \cup_{i=1}^{n} V_{x_i}$. Soit $g = \max(g_{x_1}, ..., g_{x_n})$. Alors $g \in A$ et $f(z) - \epsilon < g(z) < f(z) + \epsilon$ pour tout $z \in X$. D'où $D_\infty(f,g) < \epsilon$. □

Théorème 9 (Stone-Weierstrass)**.** *Soit X un espace compact et A une sous-algèbre de $C(X,\mathbb{R})$ telle que :*

1. *Pour tout $x \in X$, il existe $f \in A$ tel que $f(x) \neq 0$.*
2. *A sépare les points de X.*

Alors A est dense dans $(C(X,\mathbb{R}), D_\infty)$.

Démonstration. D'après les lemmes 4 et 5 il suffit de montrer que

a Pour tout $x \in X$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe $f \in A$ telle que $f(x) = \lambda$.

b Pour tous $x, y \in X$ tels que $x \neq y$ et pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, il existe $f \in A$ telle que $f(x) = \lambda$ et $f(y) = \mu$.

a Soit $x \in X$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par hypothèse, il existe $f \in A$ tel que $f(x) \neq 0$. Alors la fonction $\lambda \frac{f(z)}{f(x)}$ est égale à λ lorsque $z = x$.

b On va montrer que pour tous $x, y \in X$ tels que $x \neq y$, il existe $f \in A$ tels que les vecteurs $\begin{pmatrix} f(x) \\ f(y) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} f^2(x) \\ f^2(y) \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendant, de sorte que pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, il existe a et $b \in \mathbb{R}$ tels que,

$$a \begin{pmatrix} f(x) \\ f(y) \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} f^2(x) \\ f^2(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$

On a :

$$\begin{vmatrix} f(x) & f^2(x) \\ f(y) & f^2(y) \end{vmatrix} = f(x)f(y)(f(y) - f(x)).$$

On va montrer qu'il existe f telle que $f(x) \neq 0$, $f(y) \neq 0$ et $f(x) \neq f(y)$. Par hypothèse, on sait qu'il existe f tel que $f(x) \neq f(y)$. Si $f(x)$ et $f(y)$ sont non nuls c'est terminé. Sinon supposons que $f(x)$ est nul. Par hypothèse, il existe g tel que $g(x) \neq 0$. On choisit alors $f_1 = f + \epsilon g$. Alors pour ϵ assez petit f_1 convient. □

Théorème 10 (Stone-Weierstrass)**.** *Soit X un espace compact et A une sous-algèbre de $C(X, \mathbb{C})$ telle que :*

1. *Pour tout $x \in X$, il existe $f \in A$ tel que $f(x) \neq 0$.*
2. *A sépare les points de X.*
3. *Pour tout $f \in A$, le conjugué $\bar{f}$ de f appartient à A.*

Alors A est dense dans $(C(X, \mathbb{C}), D_\infty)$.

Démonstration. On pose $A_\mathbb{R} = A \cap C(X, \mathbb{R})$. Pour tout $f \in A$, on a $\operatorname{Re} f = \frac{f+\bar{f}}{2}$ et $\operatorname{Im} f = \frac{f-\bar{f}}{2i}$. Donc, $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f \in C(X, \mathbb{R})$. On vérifie que $A_\mathbb{R}$ vérifie les hypothèses du théorème précédent donc $A_\mathbb{R}$ est dense dans $(C(X, \mathbb{R}), D_\infty)$. Soit h_n une suite convergeant vers $\operatorname{Re} f$ dans $(C(X, \mathbb{R}), D_\infty)$ et g_n une suite convergeant vers $\operatorname{Im} f$ dans $(C(X, \mathbb{R}), D_\infty)$. Alors $h_n + i g_n$ converge vers f $(C(X, \mathbb{C}), D_\infty)$. □

Corollaire 1. *Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ fermé et borné. Alors l'espace des polynômes est dense dans $(C([a, b], \mathbb{R}), D_\infty)$. De manière analogue, soit X un fermé borné de $\mathbb{R}^N$, alors l'espace des polynômes à n variables est dense dans $C(X, \mathbb{R}), D_\infty$.*

On appelle polynôme trigonométrique une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ de la forme $t \to \sum_{n=N}^{N} c_n e^{int}$.

Corollaire 2. *Toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes, continue et périodique de période 2π est limite uniforme de polynômes trigonométriques. Autrement dit, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique $p(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on ait $|f(t) - p(t)| < \epsilon$.*