Problème de Bitsadze–Samarskii de type elliptique dans Lp

Sujet du stage : Etude de l'équation différentielle opérationelle

$$-u''(x) + Au(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \tag{1}$$

avec des conditions aux limites opérationnelles de type Bitsadze–Samarskii

$$\left\{ \begin{array}{l} u(0) = u_0 \\ u(x_0) \in D(H) \text{ et } u(1) - Hu(x_0) = d_1, \end{array} \right. \tag{2}$$

où X est un espace de Banach complexe, H est un opérateur linéaire fermé sur X, f est une fonction de $[0,1]$ dans X, $x_0 \in [0,1[$ et $u_0, d_1 \in X$.

1. La motivation de cette étude tient dans le fait que de nombreuses classes d'E. D. P. peuvent se ramener, par un choix adéquat des opérateurs A et H, à l'équation différentielle (1).
2. La donnée f sera prise dans $L^p(0,1;X)$, $\;1 < p < \infty$ et on cherchera une solution u de (1)-(2) vérifiant $u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(A))$.
3. La difficulté réside notamment dans la condition aux limites non locale à coefficient "opérateur" : $u(1) + Hu(x_0) = d_1$.

Travail du stagiaire : Le stage pourra s'organiser de la façon suivante :

1. Dans un premier temps, il s'agira d'assimiler les différentes notions utiles à la résolution du problème proposé
   - ▶ Intégrale de Bochner
   - ▶ Espaces UMD et des Opérateurs BIP
   - ▶ Espaces d'interpolation
   - ▶ Puissances fractionnaires d'opérateurs.
2. Ensuite on étudiera le cas simple des conditions aux limites de type Dirichlet ($H = 0$).
3. Puis on étudiera (1)-(2), en s'appuyant sur [2], article récent sur le sujet.

Bibliographie

[1] D. L. Burkholder: *A Geometrical Characterisation of Banach Spaces in which Martingale Difference Sequences are Unconditional*, Ann. Probab., 9 (1981), 997-1011.

[2] Hamdi, B., Maingot, S. & Medeghri: *A. On general Bitsadze-Samarskii problems of elliptic type in Lp cases.* Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser (2021).

[3] G. Dore and A. Venni: *On the Closedness of the Sum of two Closed Operators,* Mathematische Zeitschrift, 196 (1987), 270-286.

[4] M. Haase.: *The Functional Calculus for Sectorial Operators.* Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 169, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2006.

[5] A. Lunardi: *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems,* Birkhäuser, Basel, 1995.