$\boxed{\text{L}^p \text{ régularité pour le problème de Cauchy}}$

S. Maingot

Dans ce sujet nous proposons de reprendre la résolution du problème de Cauchy dans le cadre fonctionnel $L^p\left(I_T;X\right)$, où $p\in[1,+\infty]$ et $T\in\mathbb{R}_+^*\cup\{+\infty\}$. Ici $I_T=[0,T]$ si $T\in\mathbb{R}_+^*$ et $[0,+\infty[$ si $T=+\infty$.

Plus précisement si A est un opérateur linéaire fermé, on écrit qu'on a la L^p régularité sur I_T pour le problème de Cauchy

$$(C_{A,f,T})\quad\begin{cases}u'(t)=Au(t)+f(t), & \text{p. p. } t\in I_T,\\ u(0)=0,\end{cases}$$

si pour tout $f=L^p\left(I_T;X\right)$ il existe une unique solution

$$u_{A,f,T}\in W^{1,p}\left(I_T;X\right)\cap L^p\left(I_T;D(A)\right),$$

du problème $\left(C_{A,f,T}\right)$.

Il s'agira :

- d'étudier la notion d'intégration vectorielle au sens de Bochner permettant d'introduire les espaces $L^p\left(I_T;X\right),\quad p\in[1,+\infty]$,
- de résoudre $\left(C_{A,f,T}\right)$ dans certains cas simples,
- de donner des conditions nécessaires sur A pour avoir la L^p régularité sur I_T pour le problème de Cauchy $\left(C_{A,f,T}\right)$ quand $T\in\mathbb{R}_+^*$ et $T=+\infty$,
- de donner, quand on a la L^p-régularité sur I_T, des estimations de

  $$\left\|u_{A,f,T}\right\|_{L^p(I_T;X)},\left\|u'_{A,f,T}\right\|_{L^p(I_T;X)},\left\|Au_{A,f,T}\right\|_{L^p(I_T;X)},$$

  en fonction de$\left\|f\right\|_{L^p(I_T;X)}$.

Bibliographie

[1] G. Dore, *L^p Regularity for Abstract Differential Equations,* Functional Analysis and Related Topics Kyoto, 1991, Lecture Notes in Math. vol. 1540, Springer-Verlag, Berlin (1993), pp. 25-38.

[2] G. Dore, *Maximal Regulatity in Lp Spaces for an Abstract Cauchy Problem*, Advances in Differential Equations Vol. 5, 2000, pp. 293-322.

[3] J. Droniou, *Intégration et Espaces de Sobolev à Valeurs Vectorielles,* (ressource internet).

[4] J-E Rakotoson et J-M Rakotoson, *Analyse fonctionnelle appliquée aux équations aux dérivées partielles,* P. U. F., Paris 1999.

[5] I. I. Vrabie, *C_0-Semigroups and Applications*, North-Holland Mathematics Studies, Amsterdam, 2003.

[6] C. Wagschall, *Dérivation, intégration*, Hermann, Paris, 1999.