Propriétés d'expansion pour un modèle de réaction-diffusion non-local décrivant la propagation et l'adaptation d'une espèce invasive
Proposé par A. Ducrot et D. Manceau

Dans ce mémoire, nous allons étudier les propriétés de propagation pour le système suivant

$$\partial_t u = \partial_x^2 u + \varepsilon \partial_y^2 u + u \left(W(y) - \int_{\mathbb{R}} k(y,y') u(t,x,y') dy \right), \ t > 0, \ (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

complété par une donnée initiale à support compact

$$u(0,x,y) = u_0(x,y),$$

et où ε est un petit paramètre positif.
Ce problème intervient pour décrire l'invasion spatiale dans l'espace (physique) $x \in \mathbb{R}$ d'une population pouvant s'adapter à l'environnement par mutation dans l'espace des traits phénotypiques $y \in \mathbb{R}$. Les mutations sont décrites par l'opérateur de diffusion $\varepsilon \partial_y^2$. Ici, le taux de croissance de la population, $W = W(y)$, dépend du trait phénotypique, le terme intégrale décrit une compétition inter-spécifique dans la population à travers les différents traits phénotypiques dans la population.

L'objet de ce mémoire est d'étudier la propagation spatiale pour ce problème et ainsi étudier l'influence de l'adaptation phénotypique (mutations sur la variable y) sur la dynamique de propagation de la solution quand $t \to \infty$ et $\varepsilon \ll 1$.
Le modèle sera tout d'abord simulé numériquement pour identifier différents régimes de propagation spatiale, principalement en fonction des propriétés de la fonction W. Ces régimes seront ensuite analysés théoriquement. Cette étude sera alors fortement reliée aux propriétés spectrales de l'opérateur elliptique

$$\mathcal{L}_\varepsilon \varphi := \left(\varepsilon \partial_y^2 + W(y) \right) \varphi.$$