Une généralisation de l'inégalité de Poincaré en dimension 1

encadré par Gisella Croce

L'inégalité de Poincaré affirme que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |u|^2 \leq 4\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} |u'|^2$$

pour toutes les fonctions u dans $H^1(-\pi, \pi)$ qui prennent la même valeur en π et $-\pi$.

Si on se restreint aux fonctions à moyenne nulle alors

$$\int_{-\pi}^{\pi} |u|^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |u'|^2$$

(inégalité de Wirtinger). On remarquera qua la meilleure constante n'est pas pas même dans les deux inégalités ($4\pi^2$ dans la première et 1 dans la deuxième).

Le sujet de ce travail sera l'étude d'une généralisation de l'inégalité ci-dessus, qui consiste à calculer la meilleure constante (C_{pq}) dans l'inégalité

$$C_{p,q} \left[\int_{-\pi}^{\pi} |u'|^p \right]^{\frac{1}{p}} \geq \left[\int_{-\pi}^{\pi} |u|^q \right]^{\frac{1}{q}}$$

pour toutes les fonctions qui satisfont $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |u|^{q-2}u = 0$.

Bibliographie :

Dacorogna, B. ; Gangbo, W. ; Subía, N., Sur une généralisation de l'inégalité de Wirtinger, Annales de l'I.H.P. Analyse non linéaire, Tome 9 (1992) no. 1, pp. 29-50.