Générer des colonnes par un algorithme de branch-and-cut : application au problème de couverture par des anneaux-étoiles multi-dépôts

Pierre Fouilhoux[1], Sophie Michel[2], Aurélien Questel[1]

[1] Laboratoire LIP6, UMR 7606, Université Pierre et Marie Curie,
4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France {pierre.fouilhoux, aurelien.questel}@lip6.fr

[2] Laboratoire LMAH, Université du Havre,
ISEL, Quai Frissard B.P. 1137, 76063 Le Havre Cedex {sophie.michel@univ-lehavre.fr}

Résumé : *Nous considérons une méthode de branch-and-price-and-cut pour le problème de couverture d'un graphe par des anneaux-étoiles non-disjoints dans le cas où plusieurs dépôts sont disponibles. Ce problème modélise directement la conception d'un réseau fiable en technologie SDH. Nous montrons expérimentalement qu'il est impossible d'utiliser les méthodes algorithmiques utilisées dans la littérature (tournées de véhicules,...) pour la génération des colonnes de cette formulation. Nous proposons de générer des colonnes en utilisant une formulation entière résolue par un algorithme de branch-and-cut. Afin de renforcer le programme maître, nous proposons également des inégalités valides pouvant être prises en compte lors de la génération de colonnes.*

Mots-clés : *génération de colonnes, algorithme de coupes et branchement, inégalités valides, topologie des réseaux SDH*

Nous considérons ici un problème de conception de réseaux de télécommunications fiables en technologie SDH. Soit $G = (V, E, A)$ un graphe connexe où l'ensemble V des sommets est partitionné entre l'ensemble N des *dépôts*, l'ensemble U des sommets *clients* et l'ensemble W des sommets Steiner d'interconnexion. Chaque client $i \in U$ est associé à une demande de ressources $d_i \in \mathbb{N}^*$ (bande passante,...). Pour un client $i \in U$ donné, l'ensemble des *affectations* possibles est donné par $L_i \subset \{(i,j), j \in V \setminus N\}$. On pose l'ensemble des arcs $A = \cup_{i \in U} L_i$. Chaque arête $e \in E$ représente un câble constitué de γ_e fibres optiques. Chaque arc $(i,j) \in A$ correspond à un *coût d'affectation* $c_{ij} \in \mathbb{R}^+$ et chaque arête $e \in E$ à un *coût de routage* $l_e \in \mathbb{R}^+$. Nous appelons ici *anneau-étoile* un couple $R = (E(R), A(R))$ où $E(R)$ est un cycle élémentaire de G passant par au moins un dépôt et $A(R)$ un ensemble non-vide d'affectations utilisées sur R, c'est-à-dire des affectations $(i,j) \in A$ telles que $j \in V(R)$, où $V(R)$ est l'ensemble des sommets par lesquels passe le cycle. On note $U(R)$ l'ensemble des clients *desservis* par l'anneau-étoile R. Un anneau-étoile $R = (E(R), A(R))$ est dit *Q-anneau-étoile* si $d_R = \sum_{i \in U(R)} d_i \leq Q$. Le Multi-Dépots Ring-Star Problem (MDRSP) consiste en la recherche d'un ensemble de Q-anneaux-étoiles tel que chaque arête $e \in E$ appartienne au plus à γ_e anneaux ; chaque client appartienne à un anneau ; et tel que la somme des coûts d'affectation et de routage soit minimale.

Dans [4], une méthode de branch-and-cut est proposée dans le cas où il y a un unique dépôt. A notre connaissance, la version multi-depôt n'a jamais été abordée de manière exacte dans la littérature, seules des métaheuristiques ont été proposées par Baldacci et M. Dell'Amico [1] pour le cas disjoint. Ce problème est proche des problèmes de tournées de véhicules, tels que le CVRP. Comme ces problèmes ont été abordés avec succès par des méthodes de génération de colonnes, nous présentons ici une approche par branch-and-price-and-cut pour le MDRSP.

1 Approche par génération de colonnes

1.1 Problème maître

Soit Ω l'ensemble des Q-anneaux-étoiles. Etant donné un anneau-étoile $r_k \in \Omega$, on dénote $y^k_{ij} = 1$ si et seulement si le client i est connecté au noeud j et $x^k_e = 1$ si et seulement si r_k emprunte l'arête e. On note c_k le coût de r_k, *i.e.* $c_k = \sum_{(i,j)\in A} y^k_{ij} c_{ij} + \sum_{e\in E} x^k_e l_e$. Le MDRSP est équivalent à la formulation $MP(\Omega)$ suivante :

$$
\begin{array}{llll}
(MP(\Omega)) & \min \sum_{r_k\in\Omega} c_k\theta_k & & \\
s.t. & \sum_{r_k\in\Omega}\sum_{(i,j)\in A} y^k_{ij}\theta_k = 1 & \forall i \in U & (1)\\
 & \sum_{r_k\in\Omega} x^k_e\theta_k \le \gamma_e & \forall e \in E & (2)\\
 & \theta_k \in \mathbb{N} & \forall r_k \in \Omega & (3)
\end{array}
$$

où θ_k est une variable binaire associée à l'utilisation de l'anneau-étoile $r_k \in \Omega$. Les contraintes (1) assurent que chaque client est connecté dans la solution et les contraintes (2) permettent de respecter la capacité de chaque arête. L'ensemble Ω étant exponentiel en le nombre de noeuds, la relaxation linéaire de $MP(\Omega)$ doit être résolue par génération de colonnes.

Nous considérons $MP(\Omega_1)$, la restriction du problème maître à un sous-ensemble $\Omega_1 \subset \Omega$. Nous ajoutons itérativement de nouvelles colonnes et résolvons le modèle restreint jusqu'à ce qu'aucune colonne de coût réduit négatif ne soit trouvée. Alors, une solution optimale de la relaxation linéaire a été trouvée.

Soit π_i la variable duale associée à la contrainte d'affection (1) du client i, et ω_e la variable duale non positive associée à la contrainte de capacité (2) de l'arête e. Le coût réduit $\hat{c_k}$ du ring-star r_k dans le problème maître est alors :

$$\hat{c_k} = c_k - \sum_{i\in U}\sum_{(i,j)\in A} y^k_{ij}\pi_i - \sum_{e\in E} x^k_e\omega_e$$

L'objectif du problème auxiliaire est alors de trouver un anneau-étoile $r_k \in \Omega$ tel que $\hat{c_k}$ soit strictement négatif. Il est équivalent de rechercher un anneau-étoile de coût minimal sur le graphe G où le coût d'une arête e devient : $\hat{l_e} = l_e - \omega_e$ et le coût d'un arc (i,j) devient $\hat{c_{ij}} = c_{ij} - \pi_i$. Si un tel anneau-étoile n'existe pas, la solution du problème $MP(\Omega_1)$ est optimale pour $MP(\Omega)$. Une telle recherche est NP-difficile puisqu'elle contient le Problème du Voyageur de Commerce en cas particulier. Cependant, nous montrons dans la prochaine sous-section comment nous pouvons la traiter.

1.2 Un branch-and-cut pour le problème auxiliaire

Le problème de Plus Court Chemin Elémentaire avec Contraintes de Ressources (PCCECR) a été l'élément central d'un grand nombre de résolutions par génération de colonnes et a été intensivement étudié. Nous avons montré que notre problème auxiliaire pouvait se ramener à un PCCECR, cependant, dans notre cas, une tournée n'est pas seulement un ordre de visite, mais doit correspondre à un cycle dans le graphe d'origine. De ce fait, nous ne pouvons nous placer dans un graphe complet et devons utiliser un graphe étendu construit à partir de notre graphe d'origine. De plus, toutes les relaxations et techniques qui ont permis d'accélérer nettement la résolution du problème auxiliaire ne sont plus applicables ici ([2], [3]). Nos premières expérimentations ont montré que l'utilisation de l'algorithme de label classiquement utilisé était trop consommateur en mémoire et en temps. Puisque cette approche algorithmique n'était pas envisageable, nous proposons une approche par programmation mathématique basée sur nos précédents travaux [4] : la recherche d'un anneau-étoile de coût minimal est équivalente à la résolution du PLNE (AP) suivant dans lequel une variable binaire x_e est associée à toute arête $e \in E$ et une variable binaire y_{ij} est associée à tout arc $(i,j) \in A$:

$$(AP) \qquad \min \sum_{e\in E}(l_e-\omega_e)x_e + \sum_{(i,j)\in A}(c_{ij}-\lambda_i)y_{ij}$$

$$\sum_{(i,j)\in A} y_{ij} \geq 1 \tag{4}$$

$$\sum_{(i,j)\in A} d_i y_{ij} \leq Q \tag{5}$$

$$\sum_{(i,j)\in A} y_{ij} \leq 1 \qquad \forall i \in U \tag{6}$$

$$\sum_{e\in\delta(\{i\})} x_e \leq 2 \qquad \forall i \in V \tag{7}$$

$$\sum_{e\in\delta(S)} x_e \geq 2 \sum_{(i,j)\in A} y_{ij} \quad \forall S, \emptyset \neq S \subseteq V \setminus N,\ \forall i \in U \tag{8}$$

$$\sum_{e\in\delta(S)} x_e \geq \sum_{e\in\delta(\{i\})} x_e, \qquad \forall S \subseteq V \setminus \{0\}, \forall i \in S \tag{9}$$

Les contraintes (4) et (5) assurent que l'anneau contienne au moins un client et que sa capacité soit respectée. Les contraintes (6) limitent le nombre d'affectation possible pour les clients. Les contraintes (8) sont les contraintes de 2-connexité, associées aux contraintes de degré (7), elles assurent la structure en cycle. Enfin, les contraintes (9) interdisent la présence d'arête isolée dans la solution. Les contraintes (8) et (9) sont en nombre exponentiel mais leur séparation reste polynomiale. La relaxation linéaire peut donc être déterminée grâce à un algorithme de coupe.

2 Renforcement du Problème Maître et branchement

2.1 Inégalités de capacité

Soit $\mathcal{U} \subset U$ un sous-ensemble de clients, $\left\lceil \frac{d(\mathcal{U})}{Q} \right\rceil$ donne une borne inférieure du nombre d'anneaux nécessaires pour servir ces clients. Soit $\Omega_{(\mathcal{U})} = \{r_k \in \Omega : \sum_{i\in\mathcal{U}} \sum_{(i,j)\in A} y_{ij}^k \geq 1\}$. $\Omega_{(\mathcal{U})}$ est l'ensemble d'anneaux desservant au moins un des clients de $\mathcal{U}$. La contrainte de capacité peut être exprimée directement de la manière suivante :

$$\textstyle\sum_{r_k\in\Omega_{(\mathcal{U})}} \theta_k \geq \left\lceil \frac{d(\mathcal{U})}{Q} \right\rceil \tag{10}$$

Ces contraintes, qui dans notre cas dominent les contraintes de coupes utilisées classiquement dans les problèmes de tournées de véhicules, doivent être prises en compte dans le problème auxiliaire. Soit $\sigma_{\mathcal{U}}$ la variable duale non-négative associée à la contrainte (10) définie sur $\mathcal{U}$. Nous ajoutons à (AP) une variable binaire $z_{\sigma_{\mathcal{U}}}$ de coût $-\sigma_{\mathcal{U}}$ ainsi que les contraintes suivantes : $z_{\sigma_{\mathcal{U}}} \geq \sum_{(i,j)\ \in A} y_{ij}, \forall i \in \mathcal{U}$. Ces dernières assurent que la variable $z_{\sigma_{\mathcal{U}}}$ prenne la valeur 1 si au moins un client de $\mathcal{U}$ est desservi par l'anneau-étoile. Par ailleurs, la contrainte $z_{\sigma_{\mathcal{U}}} \leq \sum_{i\in\mathcal{U}} \sum_{(i,j)\ \in A} y_{ij}$ forcera la variable à être égale à 0 si aucun client de $\mathcal{U}$ n'est desservi.

2.2 Inégalités de clique

Soit (Ω, T) le graphe de conflit où chaque noeud correspond à un anneau-étoile, et l'ensemble d'arêtes T contient toutes les paires (r_k, r'_k) telles que $U(r_k) \cap U(r'_k) \neq \emptyset$. Soit W une clique définie sur (Ω, T), on considère l'inégalité de clique suivante :

$$\textstyle\sum_{r_k\in W} \theta_k \leq 1 \tag{11}$$

Si ces inégalités sont connues dans la littérature, elles sont difficiles à prendre en compte par l'algorithme de label et sont donc rarement utilisées. Dans le cadre d'une génération de colonnes par PLNE, elles peuvent être prises en compte par l'introduction dans (AP) d'une variable binaire z_W de coût $-\mu_W$, où $-\mu_W$ désigne la variable duale associée à la contrainte (11). Deux familles d'inégalités doivent alors être ajoutées :

$$\sum_{i\in\mathcal{U}}\sum_{(i,j)\in A} y_{ij} - z_W \leq |\mathcal{U}| - 1, \quad \forall\, \mathcal{U} : \mathcal{U}\cap U(r_k) \neq \emptyset, \forall r^k \in W \tag{12}$$

$$z_W + \sum_{i\in\mathcal{U}}\sum_{(i,j)\in A} y_{ij} - \sum_{i\notin\mathcal{U}}\sum_{(i,j)\in A} y_{ij} \leq |\mathcal{U}|, \quad \forall\, \mathcal{U} : \exists\, r^k \in W, \mathcal{U}\cap U(r_k) = \emptyset \tag{13}$$

Ces contraintes sont en nombre exponentiel et le problème de séparation associé est **NP**-complet. Néanmoins, elles peuvent être séparées en temps polynomial lorsque $\sum_{(i,j)\in A} y_{ij}$ est entier pour tout client i. Or, en utilisant un branchement bien choisi pour (AP), cette condition est rapidement atteinte dans l'arbre de branchement.

2.3 Règle de branchement pour le problème maître

Nous utilisons un branchement de type Ryan and Foster [5]. Les contraintes de branchement sont prises en compte dans le problème auxiliaire en ajoutant à (AP) les contraintes $\sum_{(i,k)\in A} y_{ik} = \sum_{(j,k)\in A} y_{jk}$ (*resp.* $\sum_{(i,k)\in A} y_{ik} + \sum_{(j,k)\in A} y_{jk} \leq 1$) pour interdire les solutions ne contenant que l'un des deux clients (*resp.* les solutions contenant les deux clients). Dans le problème maître, les colonnes inappropriées sont supprimées.

3 Expérimentations et conclusions

Nous avons montré que, dans certains cas, le problème auxiliaire d'un algorithme de génération de colonnes peut être résolu par un algorithme de coupes et branchement. De plus, l'utilisation d'un programme mathématique permet de prendre en compte des contraintes additionnelles du problème maître, contraintes qui ne peuvent être utilisées avec les techniques algorithmiques classiques. Nous nous intéressons ainsi à des familles de contraintes, issues du polytope du stable, qui permettent une nette amélioration de la qualité de la relaxation linéaire de notre formulation. Les premières expérimentations sont très encourageantes : certaines instances jusque là non résolues optimalement en 2h de calcul ont pu être fermées en quelques minutes seulement. Les perspectives ouvertes par ces premiers résultats sont d'ajouter d'autres inégalités au problème maître, en particulier les contraintes de cycles impairs. Par ailleurs, il serait également intéressant de tester l'efficacité de cette approche sur des problèmes pour lesquels l'approche algorithmique a donné de très bons résultats, par exemple pour le problème de tournées de véhicules avec fenêtre de temps.

Références

[1] R. Baldacci and M. Dell'Amico. Heuristic algorithms for the multi-depot ring-star problem. *European Journal of Operational Research*, 203(1) :270-281, 2010.

[2] R. Baldacci, A. Mingozzi, and R. Roberti. New route relaxation and pricing strategies for the vehicle routing problem. *Operations research*, 59(5) :1269–1283, 2011.

[3] D. Feillet, P. Dejax, M. Gendreau, and C. Gueguen. An exact algorithm for the elementary shortest path problem with resource constraints : Application to some vehicle routing problems. *Networks*, 44(3) :216–229, 2004.

[4] P. Fouilhoux and A. Questel. The non-disjoint m-ring-star problem : polyhedral results and sdh/sonet network design. *Combinatorial Optimization*, pages 93–104, 2012.

[5] D.M. Ryan and B.A. Foster. An integer programming approach to scheduling. *Computer scheduling of public transport urban passenger vehicle and crew scheduling*, pages 269–280, 1981.