



Normandie Université

THESE

Pour obtenir le diplôme de doctorat

Spécialité Mathématiques

Préparée au sein de L'Université Le Havre Normandie

Équation de diffusion généralisée pour un modèle de croissance et de dispersion d'une population incluant des comportements individuels à la frontière des divers habitats

**Présentée et soutenue par
Alexandre THOREL**

**Thèse soutenue publiquement le 24 mai 2018
devant le jury composé de**

M. Moulay AZIZ ALAOUI	Professeur à l'Université Le Havre Normandie	Président
Mme Danielle HILHORST	Directrice de Recherche au CNRS, Université Paris-Sud	Rapporteur
M. Alain MIRANVILLE	Professeur à l'Université de Poitiers	Rapporteur
M. Ahmed MEDEGHRI	Professeur à l'Université de Mostaganem	Examineur
M. Stéphane MAINGOT	Professeur à l'Université Le Havre Normandie	Directeur de thèse
M. Rabah LABBAS	Professeur à l'Université Le Havre Normandie	Codirecteur de thèse
M. Yannick CUVILLY	Co-gérant de Qualiom-Eco à Barentin	Invité
M. Nicolas TIPHAGNE	Co-gérant de Qualiom-Eco à Barentin	Invité

Thèse dirigée par Stéphane MAINGOT et codirigée par Rabah LABBAS, laboratoire LMAH



Remerciements

Je tiens à remercier tout particulièrement mes deux directeurs de thèse, Stéphane Maingot et Rabah Labbas pour avoir cru en moi et m'avoir permis de réaliser cette thèse. J'ai passé trois excellentes années en leur compagnie à faire de la recherche mathématique. Grâce à leur patience, leur soutien et leur grande disponibilité, j'ai pu atteindre ce niveau. Leur encadrement et leur implication ont été exceptionnels et je suis très fier d'avoir été leur élève. Je tiens aussi à les remercier pour toutes ces heures passées à relire mes écrits et à répondre à mes questions.

Je remercie infiniment mes patrons, Nicolas Tiphagne et Yannick Cuvilly, d'avoir cru en mon projet et de m'avoir permis de le réaliser. Je me suis toujours sentis bien intégré au sein de l'entreprise et j'ai vraiment beaucoup apprécié les nombreux échanges que j'ai eu avec mes collègues de Qualiom éco que je remercie chaleureusement.

Le Professeur Aziz Alaoui me fait un grand honneur en acceptant de présider ce jury. Je lui suis aussi reconnaissant pour avoir, en tant que directeur de notre laboratoire, su créer un climat et des conditions matérielles favorables à la recherche.

Je remercie chaleureusement la Directrice de Recherche Danielle Hilhorst et le Professeur Alain Miranville avec qui j'ai eu de nombreux échanges fructueux et qui ont acceptés d'être rapporteur de ma thèse.

Je remercie aussi le Professeur Ahmed Medeghri d'avoir accepté d'être examinateur de ma thèse. Sa gentillesse et son expérience m'ont été profitables.

Merci aussi à mes amis Achraf Berrajaa, Guillaume Cantin et Mohamed Hemmidy, doctorants au LMAH, sans oublier Khellaf Ould Melha, doctorant au LMDM, ainsi que mes amis du LITIS, avec qui j'ai passé de très bon moments.

Enfin, j'ai une pensée toute particulière pour ma famille et ma très chère Élodie qui m'ont toujours soutenu. Sans eux, jamais je n'aurais pu accomplir autant de choses.

Merci à tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin à réaliser cette thèse.

Table des matières

Introduction	1
1 Préambule	1
2 Modèle EDP 1 et sa formulation opérationnelle	4
3 Modèle EDP 2 et sa formulation opérationnelle	5
4 But de l'étude de ces modèles et résultats essentiels	7
5 Historique	9
6 Descriptif des chapitres	11
7 Perspectives	18
1 Rappels	21
1.1 Opérateurs linéaires	21
1.1.1 Généralités	21
1.1.2 Opérateurs linéaires bornés	22
1.1.3 Opérateurs linéaires fermés	23
1.1.4 Opérateurs sectoriels	25
1.2 Espaces fonctionnels	26
1.2.1 Mesure et intégrale de Bochner	26
1.2.2 Espaces de Sobolev à valeurs vectorielles	28
1.3 Calcul fonctionnel	30
1.3.1 Calcul fonctionnel pour les opérateurs linéaires bornés	30
1.3.2 Calcul fonctionnel pour les opérateurs sectoriels	30
1.3.3 Puissances d'opérateurs	34
1.3.4 Opérateurs BIP	35
1.4 Semi-groupes	36
1.4.1 Semi-groupes fortement continus	36
1.4.2 Générateurs infinitésimaux	36
1.4.3 Semi-groupes analytiques	38
1.5 Sommes d'opérateurs	40
1.6 Espaces d'interpolation	42
1.6.1 Espaces intermédiaires	42
1.6.2 Espaces de moyenne	42
1.6.3 Interpolation et domaine d'opérateurs	43

Table des matières

1.7	Problème de Cauchy	44
1.7.1	Définitions générales	45
1.7.2	Problème de Cauchy inhomogène	45
2	L'équation biharmonique dans un habitat	47
2.1	Introduction	47
2.2	Hypothèses	48
2.3	Résultats préliminaires	49
2.3.1	Solution particulière	50
2.3.2	Formule de représentation	53
2.3.3	Régularité des termes polynomiaux exponentiels	55
2.4	Le Théorème principal	58
2.4.1	Preuve du 1. du Théorème 2.4.2 (Conditions aux bords (CB2))	59
2.4.2	Preuve du 2. du Théorème 2.4.2 (Conditions aux bords (CB3))	61
2.4.3	Preuve du 3. du Théorème 2.4.2 (Conditions aux bords (CB4))	69
2.4.4	Application	74
3	Diffusion généralisée dans un habitat	77
3.1	Introduction	77
3.2	Hypothèses	79
3.3	Résultats préliminaires	80
3.3.1	Solution particulière	80
3.3.2	Formule de Représentation	83
3.3.3	Régularité de la différence de semi-groupes	84
3.4	Le Théorème principal	88
3.4.1	Preuve du 1. du Théorème 3.4.1 (Conditions aux bords (CB2))	88
3.4.2	Preuve du 2. du Théorème 3.4.1 (Conditions aux bords (CB3))	91
3.4.3	Preuve du 3. du Théorème 3.4.1 (Conditions aux bords (CB4))	96
3.4.4	Application	99
4	Généralisation	103
4.1	Introduction	103
4.2	Hypothèses	104
4.3	Résultats préliminaires	105
4.3.1	Solution particulière	105
4.3.2	Formule de Représentation	108
4.3.3	Régularité de la différence de semi-groupes	112
4.4	Le Théorème principal	117
4.4.1	Preuve du 1. du Théorème 4.4.1 (Conditions aux bords (CB2))	118
4.4.2	Preuve du 2. du Théorème 4.4.1 (Conditions aux bords (CB3))	121
4.4.3	Preuve du 3. du Théorème 4.4.1 (Conditions aux bords (CB4))	125
5	Problème de transmission lié au biharmonique	131
5.1	Introduction	131
5.2	Formulation opérationnelle	133
5.3	Hypothèses	134
5.4	Résultats préliminaires	135

5.4.1	Le problème ($\mathbf{P}_-$)	136
5.4.2	Le problème ($\mathbf{P}_+$)	137
5.4.3	Le système de transmission	139
5.5	Le Théorème principal	145
5.5.1	Calcul du déterminant	145
5.5.2	Inversion du déterminant	147
5.5.3	Régularité de la solution	149
5.6	Application	151
6	Problème de transmission général	155
6.1	Introduction	155
6.2	Formulation opérationnelle	158
6.3	Hypothèses	160
6.4	Résultats préliminaires	161
6.4.1	Le problème ($\mathbf{P}_-$)	162
6.4.2	Le problème ($\mathbf{P}_+$)	163
6.4.3	Le système de transmission	164
6.4.4	Calcul fonctionnel	169
6.5	Le Théorème principal	172
6.5.1	Calcul du déterminant	173
6.5.2	Inversion du déterminant	175
6.5.3	Régularité de la solution	178
6.6	Application	180
	Bibliographie	183

Introduction

1 Préambule

Cette thèse est consacrée à l'étude d'une classe de problèmes en dynamique de population structurés **en temps et en espace**. Ces deux paramètres caractérisent l'évolution et la dispersion des individus de cette population dans le (ou les) habitat(s) considéré(s). On parle alors de dynamique spatio-temporelle. Un des principes essentiels de cette dynamique est donc de décrire les variations locales dans le temps de la densité spatiale de population $u(t, x)$ dans un domaine Ω .

Cette population peut être de différente nature :

- poussières (amiante, polluants, ...),
- cellules,
- insectes ravageurs...

Généralement, ces modèles sont décrits par le modèle de diffusion classique ayant la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x_1, \dots, x_n) = D\Delta u(t, x_1, \dots, x_n) + g(u(t, x_1, \dots, x_n)), & \text{sur }]0, T[\times \Omega \\ \text{Condition initiale en } t = 0 \\ \text{Conditions aux limites sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et D est le coefficient de diffusion (éventuellement variable) mais toujours supposé positif. Lorsque ce modèle est un problème de transmission posé dans des habitats juxtaposés, on ajoute des conditions de transmission sur les interfaces.

Dans ce modèle issu de la loi de Fick, $u(t, x_1, \dots, x_n)$ représente la densité de la population à l'instant t et au point $(x_1, \dots, x_n)$ et g représente la réaction à la diffusion qui est une fonction non linéaire de type :

$$g(u) = u(1 - u) \quad \text{ou} \quad g(u) = u(1 - u^p),$$

exprimant la croissance logistique qui peut signifier l'apport ou la perte dans la population.

D'autres modèles, comme celui étudié par J. Coville [8], utilisent un opérateur intégral, pour le déplacement et la dispersion, plutôt que la diffusion classique (1). Il s'agit de

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \int_{\Omega} K(x, y)u(t, y)dy + g(u(t, x)), \quad (2)$$

Introduction

où K est un noyau positif exprimant ainsi la parabolicité de (2). La dispersion ainsi exprimée est non locale.

Dans les systèmes écologiques complexes, il semble donc restrictif de considérer les effets spatiaux provenant uniquement de la dispersion exprimée dans les modèles de type Fick.

En 1980, A. Okubo et S. A. Levin [34] présente un modèle spatialement explicite de dispersion modélisant l'action de la chimiotaxie.

En 1981, D. S. Cohen et J. D. Murray [7] ont fourni un modèle décrivant cette situation sans qu'il y ait de prédation ou de compétition en utilisant des effets "diffusionnels" plus généraux que ceux produits par la loi de Fick. Ils ont introduit une équation différentielle ordinaire d'ordre 4 (en dimension 1) de diffusion généralisée décrivant la croissance et la dispersion dans une population (en lien avec la chimie moléculaire) qui tient compte de l'effet du gradient provenant de la fonctionnelle d'énergie libre de Landau-Ginzburg. Ce modèle permet de tenir compte du **maintien des hétérogénéités spatiales** qui apparaît dans beaucoup de situations concrètes comme par exemple dans la morphogenèse dans le monde animal ou végétal ou celle liée aux géo-systèmes (divers habitats géographiques).

En 1984, F. L. Ochoa [33] considère une équation aux dérivées partielles (en dimension 2) en lien avec la motilité de cellules qui simule correctement la structure spatiale formée par cette motilité. Cette étude est aussi basée sur la fonctionnelle d'énergie libre de Landau-Ginzburg dite aussi de Cahn-Hilliard. La dite fonctionnelle permet de généraliser les équations classiques de réaction-diffusion provenant de la loi de Fick.

En dimension 1, la fonctionnelle d'énergie libre est donnée par :

$$F(u) := \int_{x_1}^{x_2} \Psi(u(x), u'(x)) \, dx.$$

Il est alors connu que les u qui rendent extremum cette fonctionnelle sont celles qui vérifient l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial u'} \right) = 0.$$

On note

$$\frac{\delta F}{\delta u} := \frac{\partial \Psi}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial u'} \right).$$

Ce terme est souvent appelé "dérivée variationnelle". C'est donc la variation "infinitésimale" de l'énergie totale par rapport à la densité u qui est évaluée par la dérivée de Gâteaux prise sur des u vérifiant certaines conditions de régularité et de conditions aux limites. C'est par définition un potentiel chimique :

$$P(u) := \frac{\delta F}{\delta u}.$$

Si u dépend de plusieurs variables, on a une formule d'Euler-Lagrange analogue :

$$\frac{\delta F}{\delta u} := \frac{\partial \Psi}{\partial u} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)} \right).$$

Généralement, les effets de dispersion dans l'espace dans les problèmes de diffusion liés à une dynamique de populations sont basés sur la loi de Fick qui ne fait intervenir que l'ordre 2 de dérivation en espace.

L'énergie totale effectuée par les interactions de la dynamique de populations (entre cellules par exemple) dans un volume V est donnée par :

$$F(u) = \int_V \Psi_1(u(x)) \, dx + \int_V \Psi_2(\nabla u(x)) \, dx.$$

Cette forme de fonctionnelle d'énergie libre, tient compte de toutes les densités d'énergie intérieures et de leurs densités-gradients. Le terme

$$\int_V \Psi_1(u(x)) \, dx,$$

correspond à l'énergie standard de l'état homogène qui induit la loi de Fick. Le terme à l'intérieur de l'intégrale est quadratique. Le terme

$$\int_V \Psi_2(\nabla u(x)) \, dx,$$

représente l'énergie produite dans les interactions entre les individus de la population et leurs gradients de concentration. Ce deuxième terme est très important dans l'explication de stabilité des compositions non-homogènes et même lorsque le coefficient de diffusion est négatif.

Prenons par exemple

$$\Psi_1(u) := \frac{u^2}{2} \quad \text{et} \quad \Psi_2(\nabla u) := K \frac{(\nabla u)^2}{2},$$

où $K > 0$. Dans ce cas on obtient

$$P(u) = \frac{\delta F}{\delta u} = \frac{\partial \Psi}{\partial u} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)} \right) = u - K \Delta u.$$

Le gradient de ce potentiel induit un flux $J(u)$ qui est proportionnel au potentiel. Ainsi,

$$J = -D \nabla(P),$$

où D est la constante de proportionnalité. Ensuite la loi de conservation de masse (ou de continuité) amène à l'équation

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\operatorname{div}(J) = D \operatorname{div}(\nabla(P)) \\ &= D \operatorname{div}(\nabla(u - K \Delta u)) \\ &= -DK \Delta^2 u + D \Delta u. \end{aligned}$$

Le coefficient de diffusion peut être négatif, ce qui correspond à des situations de chimiotaxie.

Si on utilise la forme classique de Landau-Ginzburg pour la fonction $\Psi_1(u)$, à savoir

$$\Psi_1(u) = K_1 \frac{u^2}{2} + K_2 \frac{u^4}{4},$$

(notons que les puissances sont paires et les constantes K_1 et K_2 sont positives car l'énergie est toujours positive), on obtient alors :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -DK \Delta^2 u + K_1 D \Delta u + K_2 D \Delta(u^3) + R(u),$$

Introduction

où R est non linéaire. En supposant une situation de croissance logistique on arrive à l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -DK\Delta^2 u + K_1 D\Delta u + 3K_2 Du^2 \Delta u + 6K_2 Du\Delta u + au - bu^2,$$

où $au - bu^2$ est le terme de croissance logistique avec a et b positifs. Cette équation doit être complétée par des conditions aux limites et une condition initiale.

D'une façon générale, on en déduit que l'équation s'écrit

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}(t, x)}_{\text{taux de variation dans le temps}} = \underbrace{l\Delta u(t, x)}_{\text{diffusion}} - \underbrace{k\Delta^2 u(t, x)}_{\substack{\text{terme maintenant} \\ \text{l'hétérogénéité}}} + \underbrace{g(u(t, x))}_{\text{interaction locale}}, \quad (3)$$

où g est le terme de croissance logistique non linéaire, le terme $l\Delta u$ modélise la dispersion induite par les interactions locales (dans un voisinage proche) et $k\Delta^2 u$ modélise la dispersion induite par les interactions non locales (au voisinage du voisinage proche). Dans cette équation, l est le coefficient de diffusion classique (local) issu de la loi de Fick et k est le coefficient de diffusion à longue portée. Or, si $k > 0$, alors il a un effet stabilisateur. Par contre, si $k < 0$, alors il a un effet déstabilisateur pour l'équation d'évolution car, en général, l'équation aux dérivées partielles linéarisée est parabolique lorsque k est positif.

Dans ce travail de thèse, on s'intéressera aux équations de type (3). Il est connu que le traitement de telles équations nécessite une étude précise de l'équation linéaire stationnaire correspondante dans les espaces adaptés au non linéaire tels que les espaces $L^p(\Omega)$, $p \in]1, +\infty[$. Plus précisément, on se focalisera essentiellement sur l'étude des deux modèles décrits ci-dessous.

2 Modèle EDP 1 et sa formulation opérationnelle

Dans le cylindre $\Omega :=]a, b[\times \omega$ où ω est un ouvert régulier de $\mathbb{R}^{n-1}$ ($n \geq 2$) on considère le problème

$$\begin{cases} k\Delta^2 u - l\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \text{Conditions aux Limites sur le bord,} \end{cases} \quad (4)$$

où $f \in L^p(\Omega) = L^p(a, b; L^p(\omega))$, $p \in]1, +\infty[$, $k \in \mathbb{R}^*$ et $l \in \mathbb{R}$. Les variables spatiales sont notées (x, y) , $x \in]a, b[$ et $y \in \omega$.

On définit alors A_0 , l'opérateur laplacien dans $\mathbb{R}^{n-1}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

$$\begin{cases} D(A_0) := \{\psi \in W^{2,p}(\omega) : \psi = 0 \text{ sur } \partial\omega\} \\ \forall \psi \in D(A_0), \quad A_0\psi = \Delta_y \psi. \end{cases} \quad (5)$$

Ainsi, on réécrit le problème (4) sous forme opérationnelle :

$$\begin{cases} u^{(4)}(x) + (2A_0 - rI)u''(x) + (A_0^2 - rA_0)u(x) = f(x), & \text{p.p. } x \in]a, b[\\ \text{Conditions aux Limites en } a \text{ et en } b, \end{cases}$$

où $r := l/k$. Notons qu'on a changé f pour f/k et caché la variable y .

On considère ensuite une généralisation de cette équation en utilisant $(-A, D(-A))$, au lieu de $(-A_0, D(-A_0))$, un opérateur BIP d'angle $\theta_A \in [0, \pi[$ sur un espace de Banach complexe

UMD noté X (voir Définition 1.3.17 et Théorème 1.5.4) et $f \in L^p(a, b; X)$. Notons que dans notre cas, $X = L^p(\omega)$.

De ce fait, dans les chapitres 2, 3 et 4, on étudiera, sous certaines hypothèses, l'équation

$$u^{(4)}(x) + (2A - rI)u''(x) + (A^2 - rA)u(x) = f(x), \quad \text{p.p. } x \in]a, b[, \quad (6)$$

sous chacune des conditions aux limites suivantes

$$\begin{cases} u(a) = \varphi_1, & u(b) = \varphi_2, \\ u''(a) = \varphi_3, & u''(b) = \varphi_4, \end{cases} \quad (\text{CB1})$$

$$\begin{cases} u'(a) = \varphi_1, & u'(b) = \varphi_2, \\ u''(a) + Au(a) = \varphi_3, & u''(b) + Au(b) = \varphi_4, \end{cases} \quad (\text{CB2})$$

$$\begin{cases} u(a) = \varphi_1, & u(b) = \varphi_2, \\ u'(a) = \varphi_3, & u'(b) = \varphi_4, \end{cases} \quad (\text{CB3})$$

$$\begin{cases} u'(a) = \varphi_1, & u'(b) = \varphi_2, \\ u''(a) = \varphi_3, & u''(b) = \varphi_4, \end{cases} \quad (\text{CB4})$$

et

$$\begin{cases} u(a) = \varphi_1, & u(b) = \varphi_2, \\ u''(a) + Au(a) = \varphi_3, & u''(b) + Au(b) = \varphi_4, \end{cases} \quad (\text{CB5})$$

où $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \in X$.

Ici la condition sur le bord de ω est incorporée dans le domaine de A .

3 Modèle EDP 2 et sa formulation opérationnelle

On considère un problème de transmission dans l'ouvert cylindrique $\Omega = \Omega_- \cup \Omega_+$ de $\mathbb{R}^n$ constitué des deux habitats juxtaposés

$$\begin{cases} \Omega_- :=]a, \gamma[\times \omega \\ \Omega_+ :=]\gamma, b[\times \omega, \end{cases}$$

d'interface

$$\Gamma = \{\gamma\} \times \omega,$$

où ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^{n-1}$, $n \geq 2$.

Soient $k_+, k_-, l_+, l_- \in \mathbb{R}_+^*$. On considère les équations de dispersion linéaires stationnaires suivantes

$$(EQ_{edp}) \begin{cases} k_- \Delta^2 u_- - l_- \Delta u_- = f_- & \text{dans } \Omega_- \\ k_+ \Delta^2 u_+ - l_+ \Delta u_+ = f_+ & \text{dans } \Omega_+, \end{cases}$$

où

$$u = \begin{cases} u_- & \text{dans } \Omega_- \\ u_+ & \text{dans } \Omega_+ \end{cases} \quad \text{et} \quad f = \begin{cases} f_- & \text{dans } \Omega_- \\ f_+ & \text{dans } \Omega_+, \end{cases}$$

avec $f_- \in L^p(\Omega_-) = L^p(a, \gamma; L^p(\omega))$, $f_+ \in L^p(\Omega_+) = L^p(\gamma, b; L^p(\omega))$ et $p \in]1, +\infty[$. Les variables spatiales sont désignées par (x, y) , où $x \in]a, \gamma[$ (ou $x \in]\gamma, b[$) et $y \in \omega$.

On considère le problème de transmission suivant

$$(P_{edp}) \left\{ \begin{array}{l} k_- \Delta^2 u_- - l_- \Delta u_- = f_- \quad \text{dans } \Omega_- \\ k_+ \Delta^2 u_+ - l_+ \Delta u_+ = f_+ \quad \text{dans } \Omega_+ \\ u_-(x, \zeta) = 0, \quad x \in]a, \gamma[, \zeta \in \partial\omega \\ u_+(x, \zeta) = 0, \quad x \in]\gamma, b[, \zeta \in \partial\omega \\ \Delta u_-(x, \zeta) = 0, \quad x \in]a, \gamma[, \zeta \in \partial\omega \\ \Delta u_+(x, \zeta) = 0, \quad x \in]\gamma, b[, \zeta \in \partial\omega \\ u_-(a, y) = \varphi_1^-(y), \quad y \in \omega \\ u_+(b, y) = \varphi_1^+(y), \quad y \in \omega \\ \frac{\partial u_-}{\partial x}(a, y) = \varphi_2^-(y), \quad y \in \omega \\ \frac{\partial u_+}{\partial x}(b, y) = \varphi_2^+(y), \quad y \in \omega \\ u_- = u_+ \quad \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial u_-}{\partial x} = \frac{\partial u_+}{\partial x} \quad \text{sur } \Gamma \\ k_- \Delta u_- = k_+ \Delta u_+ \quad \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} (k_- \Delta u_- - l_- u_-) = \frac{\partial}{\partial x} (k_+ \Delta u_+ - l_+ u_+) \quad \text{sur } \Gamma, \end{array} \right.$$

avec $\varphi_1^\pm$ et $\varphi_2^\pm$ données dans des espaces appropriés. Le problème précédent est composé des conditions aux bords et de transmission suivantes

$$(CB_{edp}) \left\{ \begin{array}{l} (1) \left\{ \begin{array}{l} u_-(x, \zeta) = 0, \quad x \in]a, \gamma[, \zeta \in \partial\omega \\ u_+(x, \zeta) = 0, \quad x \in]\gamma, b[, \zeta \in \partial\omega \\ \Delta u_-(x, \zeta) = 0, \quad x \in]a, \gamma[, \zeta \in \partial\omega \\ \Delta u_+(x, \zeta) = 0, \quad x \in]\gamma, b[, \zeta \in \partial\omega \end{array} \right. \\ (2) \left\{ \begin{array}{l} u_-(a, y) = \varphi_1^-(y), \quad u_+(b, y) = \varphi_1^+(y), \quad y \in \omega \\ \frac{\partial u_-}{\partial x}(a, y) = \varphi_2^-(y), \quad \frac{\partial u_+}{\partial x}(b, y) = \varphi_2^+(y), \quad y \in \omega, \end{array} \right. \end{array} \right.$$

et

$$(CT_{edp}) \left\{ \begin{array}{l} u_- = u_+ \quad \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial u_-}{\partial x} = \frac{\partial u_+}{\partial x} \quad \text{sur } \Gamma \\ k_- \Delta u_- = k_+ \Delta u_+ \quad \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} (k_- \Delta u_- - l_- u_-) = \frac{\partial}{\partial x} (k_+ \Delta u_+ - l_+ u_+) \quad \text{sur } \Gamma. \end{array} \right.$$

Les deux premières conditions aux bords de (1) dans (CB_{edp}) signifient simplement que les individus meurent quand ils atteignent les autres côtés des bords $]a, b[\times \partial\omega$ (ce qui signifie que l'on a un bord inhospitalier); les deux dernières conditions de (1) signifient qu'il n'y a pas de dispersion dans la direction de la normale. On en déduit que la dispersion s'annule sur $]a, b[\times \partial\omega$, qui est $\Delta u_- = 0$ sur $]a, \gamma[\times \partial\omega$ et $\Delta u_+ = 0$ sur $] \gamma, b[\times \partial\omega$.

Dans (2) de (CB_{edp}) , la densité de population et le flux sont donnés, par exemple sur $\{a\} \times \omega$ et sur $\{b\} \times \omega$. Cela signifie que les habitats ne sont pas séparés.

Dans (CT_{edp}) , les deux premières conditions de transmission signifient qu'il y a continuité de la densité et de son flux à l'interface, alors que les deux secondes modélisent (en un certain sens) la continuité (ou proportionnalité) de la dispersion et de son flux sur Γ .

Notons que lorsque l'on considère différents types d'habitats, la réponse des individus à l'interface est importante pour le comportement du mouvement général.

Grâce à l'opérateur A_0 défini dans (5), on obtient une formulation opérationnelle que l'on généralise en utilisant $(-A, D(-A))$, un opérateur BIP d'angle $\theta_A \in [0, \pi[$ sur X , $f_- \in L^p(a, \gamma; X)$ et $f_+ \in L^p(\gamma, b; X)$, afin d'obtenir le problème opérationnel plus général :

$$(P) \begin{cases} (EQ) \begin{cases} u_-^{(4)}(x) + (2A - \frac{l_-}{k_-} I)u_-''(x) + (A^2 - \frac{l_-}{k_-} A)u_-(x) = f_-(x), & \text{p.p. } x \in]a, \gamma[\\ u_+^{(4)}(x) + (2A - \frac{l_+}{k_+} I)u_+''(x) + (A^2 - \frac{l_+}{k_+} A)u_+(x) = f_+(x), & \text{p.p. } x \in]\gamma, b[\end{cases} \\ (CB) \begin{cases} u_-(a) = \varphi_1^-, & u_+(b) = \varphi_1^+ \\ u'_-(a) = \varphi_2^-, & u'_+(b) = \varphi_2^+ \end{cases} \\ (CT) \begin{cases} u_-(\gamma) = u_+(\gamma) \\ u'_-(\gamma) = u'_+(\gamma) \\ k_+u_+''(\gamma) + k_+Au_+(\gamma) = k_-u_-''(\gamma) + k_-Au_-(\gamma) \\ k_+u_+^{(3)}(\gamma) + k_+Au'_+(\gamma) - l_+u'_+(\gamma) = k_-u_-^{(3)}(\gamma) + k_-Au'_-(\gamma) - l_-u'_-(\gamma). \end{cases} \end{cases}$$

Notons qu'on a changé f_- pour f_-/k_- , f_+ pour f_+/k_+ et caché la variable y .

Les conditions de transmission (CT) se divisent en

$$(CT1) \begin{cases} u_-(\gamma) = u_+(\gamma) \\ u'_-(\gamma) = u'_+(\gamma), \end{cases}$$

et

$$(CT2) \begin{cases} k_+u_+''(\gamma) + k_+Au_+(\gamma) = k_-u_-''(\gamma) + k_-Au_-(\gamma) \\ k_+u_+^{(3)}(\gamma) + k_+Au'_+(\gamma) - l_+u'_+(\gamma) = k_-u_-^{(3)}(\gamma) + k_-Au'_-(\gamma) - l_-u'_-(\gamma). \end{cases}$$

4 But de l'étude de ces modèles et résultats essentiels

On analysera les problèmes précédents dans leurs formulations opérationnelles en montrant existence, unicité et régularité optimale pour les solutions. De plus on donnera des représentations explicites des solutions dans les divers cas. Cela nécessitera l'utilisation de puissants outils d'analyse fonctionnelle (voir Chapitre 1 : Rappels) tels que :

1. la théorie des semi-groupes,
2. celle des opérateurs linéaires fermés sectoriels et leurs puissances complexes,
3. les espaces d'interpolation réels,
4. les espaces de Banach UMD,
5. le calcul fonctionnel d'une manière générale.

Introduction

La régularité de la densité de population par rapport à la variable spatiale est démontrée dans tous les cas considérés. Elle est essentielle dans l'étude de l'équation d'évolution linéarisée et ensuite dans l'équation d'évolution globale non linéaire.

En effet, si par exemple on se restreint au cas de l'opérateur de dispersion généralisée avec des conditions aux limites homogènes :

$$\begin{cases} D(\mathcal{L}) &= \{u \in L^p(\Omega) : \Delta u_{\pm}, \Delta^2 u_{\pm} \in L^p(\Omega_{\pm}) \text{ et } u_{\pm} \text{ satisfait } (CB_0) \text{ et } (CT_{edp})\} \\ \mathcal{L}u &= \begin{cases} -k_- \Delta^2 u_- + l_- \Delta u_- & \text{dans } \Omega_- \\ -k_+ \Delta^2 u_+ + l_+ \Delta u_+ & \text{dans } \Omega_+, \end{cases} \end{cases} \quad (7)$$

où (CB_0) correspond à (CB_{edp}) avec $\varphi_1^+ = \varphi_1^- = \varphi_2^+ = \varphi_2^- = 0$, alors $\mathcal{L}$ est bien défini et est inversible à inverse borné ; cela permet l'analyse de l'équation spectrale

$$\mathcal{L}u - \lambda u = f,$$

qui caractérisera la nature du semi-groupe généré par $\mathcal{L}$.

On donne maintenant un résultat essentiel pour chacun des modèles. Concernant le modèle EDP 1, on obtient, le résultat suivant :

Théorème 1. *On considère un domaine cylindrique $\Omega :=]a, b[\times \omega$ de $\mathbb{R}^n$, où $n \geq 2$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^{n-1}$, avec un bord de classe C^2 . Soit $f \in L^p(\Omega)$ avec $p \in]1, +\infty[$ et $p > \frac{n}{2}$; soit $l, k \in \mathbb{R}^*$ tels que $l > k C_{\omega}$, où $C_{\omega} > 0$ est la constante de Poincaré relative à un problème de Dirichlet dans ω . Alors, il existe une unique solution $u \in W^{4,p}(\Omega)$ de*

$$\begin{cases} k \Delta^2 u(x, y) - l \Delta u(x, y) &= f(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = \Delta u(x, y) &= 0, & (x, y) \in]a, b[\times \partial\omega \\ u(a, y) &= \varphi_1(y), & y \in \omega \\ u(b, y) &= \varphi_2(y), & y \in \omega \\ \Delta u(a, y) &= \varphi_3(y), & y \in \omega \\ \Delta u(b, y) &= \varphi_4(y), & y \in \omega, \end{cases}$$

si et seulement si

$$\varphi_1, \varphi_2 \in W^{2,p}(\omega) \cap W_0^{1,p}(\omega) \quad \text{et} \quad \Delta \varphi_1, \Delta \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \in W^{2-\frac{1}{p},p}(\omega) \cap W_0^{1,p}(\omega).$$

Pour le modèle EDP 2, on montrera le résultat :

Théorème 2. *On suppose que ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^{n-1}$ où $n \geq 2$ avec un bord de classe C^2 . Soient $f_+ \in L^p(\Omega_+)$ et $f_- \in L^p(\Omega_-)$ avec $p \in]1, +\infty[$ et $p > n$ ainsi que $k_+, k_-, l_+, l_- \in \mathbb{R}_+^*$. Alors il existe une unique solution u de (P_{pde}) , telle que*

$$u_- \in W^{4,p}(\Omega_-) \quad \text{et} \quad u_+ \in W^{4,p}(\Omega_+),$$

si et seulement si

$$\varphi_1^{\pm}, \varphi_2^{\pm} \in W^{2,p}(\omega) \cap W_0^{1,p}(\omega), \quad \Delta \varphi_1^{\pm} \in W^{2-\frac{1}{p},p}(\omega) \cap W_0^{1,p}(\omega) \quad \text{et} \quad \Delta \varphi_2^{\pm} \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\omega) \cap W_0^{1,p}(\omega).$$

Les deux Théorèmes précédents seront donnés dans les chapitres 3 et 6 comme des Corollaires de Théorèmes opérationnels.

5 Historique

L'historique ci-dessous est loin d'être exhaustif et permet simplement de citer certains travaux importants liés aux équations différentielles abstraites.

Les équations différentielles abstraites (ou EDA) sont des équations différentielles dont les coefficients sont des opérateurs linéaires, généralement non bornés, sur un espace de Banach. L'étude de ces équations a commencé entre les années 1930 et 1940 dans un cadre hilbertien. En 1948, E. Hille et K. Yosida, ont séparément résolu le problème de Cauchy abstrait

$$\begin{cases} u'(t) - Au(t) = 0, & t \in [0, +\infty[\\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

où A est un opérateur linéaire fermé sur un espace de Banach complexe X et $u_0 \in X$. Comme dans le cas scalaire, la résolution de ce problème nécessite la construction de " e^{tA} ", $t > 0$. C'est ainsi qu'est née la théorie des semi-groupes qui se développa entre 1930 et 1960 grâce aux travaux de M.H. Stone, E. Hille, K. Yosida, G. Lumer, W. Feller, I. Miyadera et R.S. Phillips.

En 1953, T. Kato étudie les équations non autonomes de la forme

$$u'(t) = L(t)u(t), \quad t \geq 0$$

en utilisant la théorie des semi-groupes et des puissances fractionnaires d'opérateurs.

Entre 1960 et 1962, J.L. Lions et J. Peetre s'intéressent aux espaces d'interpolations, aux puissances fractionnaires d'opérateurs et aux équations opérationnelles.

En 1975, G. Da Prato et P. Grisvard se sont intéressés à l'équation

$$(A + B)u = f,$$

où A et B sont des opérateurs linéaires fermés sur un espace de Banach complexes X et où f appartient à un espace d'interpolation. Cela a permis, en 1987, à G. Dore et A. Venni, de considérer des sommes d'opérateurs développées par dans un espace de Banach ayant une géométrie particulière, celle d'espace UMD.

En 2004, A. Favini, H. Tanabe, R. Labbas, A. Yagi et S. Maingot ont étudié les équations différentielles abstraites du second ordre :

$$u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x), \quad x \in]a, b[.$$

Ils ont d'abord étudié le problème aux limites avec les conditions de Dirichlet

$$\begin{cases} u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x), & x \in]0, 1[, \\ u(0) = u_0, \\ u(1) = u_1, \end{cases} \quad (8)$$

où A et B sont des opérateurs linéaires fermés garantissant l'ellipticité de l'équation (en particulier $-(B^2 - A)^{1/2}$ sera défini) sur un espace de Banach complexe X de type UMD et $u_0, u_1 \in X$. Cette étude fût réalisée dans deux types d'espace : les espaces de Hölder et les espaces L^p . Grâce à la théorie des puissances imaginaires bornées d'opérateurs, des puissances fractionnaires d'opérateurs et celle des espaces d'interpolation (réels), ils ont ensuite considéré un cas plus général de problèmes aux limites d'ordre 2 :

$$\begin{cases} u''(x) + (L - M)u'(x) - LM u(x) = f(x), & x \in]0, 1[, \\ u(0) = u_0, \\ u(1) = u_1, \end{cases}$$

Introduction

où L et M sont des opérateurs linéaires fermés sur X . En particulier, si

$$L = B - (B^2 - A)^{1/2} \quad \text{et} \quad M = -B - (B^2 - A)^{1/2},$$

alors on retrouve le problème (8).

En 2013, A. Favini, R. Labbas, K. Lemrabet, S. Maingot et H. Sidibé ont étudié un problème de transmission avec des équations différentielles opérationnelles du quatrième ordre :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_-^{(4)}(x) + 2Au_-''(x) + A^2u_-(x) = f_-(x), \quad x \in]-1, 0[\\ u_+^{(4)}(x) + 2Au_+''(x) + A^2u_+(x) = f_+(x), \quad x \in]0, \delta[\\ u_-(-1) = u'_-(-1) = 0 \\ u_+''(\delta) + \nu_+Au_+(\delta) = 0 \\ u_+^{(3)}(\delta) + (2 - \nu_+)Au'_+(\delta) = 0 \\ \frac{E_-}{1 - \nu_-^2} (u_-''(0) + \nu_-Au_-(0)) = \frac{E_+}{1 - \nu_+^2} (u_+''(0) + \nu_+Au_+(0)) \\ \frac{E_-}{1 - \nu_-^2} (u_-^{(3)}(0) + (2 - \nu_-)Au'_-(0)) = \frac{E_+}{1 - \nu_+^2} (u_+^{(3)}(0) + (2 - \nu_+)Au'_+(0)), \end{array} \right.$$

où

$$f_- \in L^p(-1, 0; X), \quad f_+ \in L^p(0, \delta; X), \quad p \in]1, +\infty[,$$

$E_{\pm}, \delta > 0, \nu_{\pm} \in]0, 1/2[$ et A est un opérateur linéaire fermé sur un espace de Banach complexe X de type UMD.

Cette étude fut réalisée dans les espaces L^p pour $p \in]1, +\infty[$. Grâce à la théorie des puissances imaginaires bornées d'opérateurs, des puissances fractionnaires d'opérateurs et celle des espaces d'interpolation (réels) ils ont obtenu des résultats d'existence, d'unicité et de régularité maximale de la solution du problème à δ fixé petit. De plus grâce à la théorie des semi-groupes analytiques, ils ont donné une formule de représentation explicite de la solution u^δ .

Suite à cela, ils ont étudié le problème limite ($\delta \rightarrow 0$) afin d'obtenir :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_-^{(4)}(x) + 2Au_-''(x) + A^2u_-(x) = f_-(x), \quad x \in]-1, 0[\\ u_-(-1) = u'_-(-1) = 0 \\ u_-''(0) + \nu_-Au_-(0) - 2\frac{1 - \nu_-^2}{1 + \nu_+}qAu'_-(0) = 0 \\ u_-^{(3)}(0) + (2 - \nu_-)Au'_-(0) - (1 - \nu_-^2)qA^2u_-(0) = m, \end{array} \right.$$

où $f_- \in L^p(-1, 0; X)$, $\nu_{\pm} \in]0, 1/2[$ et $m \in X$, avec l'hypothèse

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta E_+}{E_-} = q > 0.$$

Grâce aux mêmes outils, ils ont obtenu une formule de représentation explicite de la solution ainsi que des résultats d'existence, d'unicité et de régularité maximale de la solution du problème limite. Il est à noter que cela nécessite de prouver que $u_-(0) \in D(A^2)$.

6 Descriptif des chapitres

Cette thèse se compose de six chapitres et est organisée comme suit.

Chapitre 1

Il est consacré aux rappels fondamentaux ainsi qu'aux outils nécessaires à ce travail. On y présentera tout d'abord quelques généralités sur les opérateurs linéaires bornés ou seulement fermés, ou sectoriels. On fera ensuite une section sur les espaces fonctionnels composée d'une partie sur la mesure et l'intégrale de Bochner et d'une partie sur les espaces de Sobolev.

On expliquera dans la section suivante la notion de calcul fonctionnel. On présentera ensuite une section traitant des semi-groupes, dans laquelle, on parlera des semi-groupes fortement continus, puis des semi-groupes analytiques.

La section suivante traitera des sommes d'opérateurs, au sens de Dore-Venni [12], qui nécessite d'utiliser les espaces UMD. On décrira ensuite les espaces d'interpolation. Enfin, dans la dernière section, on parlera du problème de Cauchy.

Chapitre 2

On reprend ici l'équation (6) que l'on considère dans le cas où $r = 0$; ce qui donne

$$u^{(4)}(x) + 2Au''(x) + A^2u(x) = f(x), \quad \text{p.p. } x \in]a, b[. \quad (9)$$

On cherche alors à montrer qu'il existe une unique solution classique au problème (9)-(CBi), $i = 1, 2, 3, 4, 5$; c'est-à-dire une solution u de (9)-(CBi) telle que :

$$u \in W^{4,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(A^2)) \quad \text{avec} \quad u'' \in L^p(a, b; D(A)).$$

Afin de construire une telle solution avec uniquement $f \in L^p(a, b; X)$, on suppose que :

- (H₁) X est un espace UMD,
- (H₂) $0 \in \rho(A)$,
- (H₃) $-A \in \text{BIP}(X, \theta_A)$ pour un $\theta_A \in [0, \pi[$.

Certains de nos résultats nécessiteront une hypothèse supplémentaire :

$$(H_4) \quad \sigma(A) \subset]-\infty, 0[\quad \text{et} \quad \forall \theta \in [0, \pi[, \quad \sup_{\lambda \in \tilde{S}_\theta} \|\lambda(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty.$$

On donne ensuite quelques conséquences sur ces hypothèses dans lesquelles on définit l'opérateur $M := -\sqrt{-A}$, puis on établit quelques résultats préliminaires. Enfin, on démontre le résultat suivant, qui est le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 3. *Soit $f \in L^p(a, b; X)$ avec $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ et $p \in]1, +\infty[$. On suppose que (H₁), (H₂) et (H₃) sont vérifiées. Alors*

1. *il existe une unique solution classique u de (9)-(CB1) si et seulement si*

$$\varphi_1, \varphi_2 \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2p}, p} \quad \text{et} \quad \varphi_3, \varphi_4 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p},$$

2. il existe une unique solution classique u de (9)-(CB2) si et seulement si

$$\varphi_1, \varphi_2 \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p} \quad \text{et} \quad \varphi_3, \varphi_4 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p},$$

3. il existe une unique solution classique u de (9)-(CB5) si et seulement si

$$\varphi_1, \varphi_2 \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2p}, p} \quad \text{et} \quad \varphi_3, \varphi_4 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}.$$

Si, de plus, (H_4) est vérifiée, alors

4. il existe une unique solution classique u de (9)-(CB3) si et seulement si

$$\varphi_1, \varphi_2 \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2p}, p} \quad \text{et} \quad \varphi_3, \varphi_4 \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p},$$

5. il existe une unique solution classique u de (9)-(CB4) si et seulement si

$$\varphi_1, \varphi_2 \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p} \quad \text{et} \quad \varphi_3, \varphi_4 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}.$$

Ce chapitre se conclut par une application sous forme d'un corollaire qui donne un résultat d'existence et d'unicité au problème EDP correspondant.

Chapitre 3

L'ensemble des résultats de ce chapitre a fait l'objet d'un article publié (voir [27]).

On reprend ici l'équation (6) que l'on considère dans le cas où $r \in \mathbb{R}^*$. On cherche alors à montrer qu'il existe une unique solution classique au problème (6)-(CBi), $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Afin de construire une telle solution avec uniquement $f \in L^p(a, b; X)$, on suppose que :

- (H₁) X est un espace UMD,
- (H₂) $0 \in \rho(A)$,
- (H₃) $-A \in \text{BIP}(X, \theta_A)$ pour un $\theta_A \in [0, \pi[$,
- (H₄) $[r, +\infty[\subset \rho(A)$.

Certains de nos résultats nécessiteront une hypothèse supplémentaire :

$$(H_5) \quad \sigma(A) \subset]-\infty, 0[\quad \text{et} \quad \forall \theta \in]0, \pi[, \quad \sup_{\lambda \in S_\theta} \|\lambda(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty.$$

On donne ensuite quelques conséquences sur ces hypothèses dans lesquelles on définit les opérateurs $M := -\sqrt{-A}$ et $L := -\sqrt{-A} + rI$, puis on établit quelques résultats préliminaires. Enfin, on démontre le résultat suivant, qui est le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 4. Soit $f \in L^p(a, b; X)$ avec $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ et $p \in]1, +\infty[$. On suppose que (H_1) , (H_2) , (H_3) et (H_4) sont vérifiées. Alors

1. il existe une unique solution classique u de (6)-(CB1) si et seulement si

$$\varphi_1, \varphi_2 \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2p}, p} \quad \text{et} \quad \varphi_3, \varphi_4 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p},$$

2. il existe une unique solution classique u de (6)-(CB2) si et seulement si

$$\varphi_1, \varphi_2 \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p} \quad \text{et} \quad \varphi_3, \varphi_4 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p},$$

3. il existe une unique solution classique u de (6)-(CB5) si et seulement si

$$\varphi_1, \varphi_2 \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2p}, p} \quad \text{et} \quad \varphi_3, \varphi_4 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}.$$

Si, de plus, (H_5) est vérifiée, alors

4. il existe une unique solution classique u de (6)-(CB3) si et seulement si

$$\varphi_1, \varphi_2 \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2p}, p} \quad \text{et} \quad \varphi_3, \varphi_4 \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p},$$

5. il existe une unique solution classique u de (6)-(CB4) si et seulement si

$$\varphi_1, \varphi_2 \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p} \quad \text{et} \quad \varphi_3, \varphi_4 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}.$$

De même ici, ce chapitre se conclut par une application sous forme d'un corollaire qui donne un résultat d'existence et d'unicité au problème EDP correspondant.

Chapitre 4

On reprend l'équation (6) que l'on considère dans le cas où r est un opérateur borné noté B ; ce qui donne

$$u^{(4)}(x) + (2A - B)u''(x) + (A^2 - BA)u(x) = f(x), \quad \text{p.p. } x \in]a, b[,$$

On généralise ensuite cette équation en considérant P et Q , deux opérateurs linéaires sur X tels que :

$$u^{(4)}(x) + (P + Q)u''(x) + PQu(x) = f(x), \quad x \in]a, b[, \quad (10)$$

On cherche alors à montrer qu'il existe une unique solution classique au problème (10)-(CBi), $i = 1, 2, 3, 4, 5$; c'est-à-dire une solution u de (10)-(CBi) telle que :

$$u \in W^{4,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(PQ)) \quad \text{et} \quad u'' \in L^p(a, b; D(P) \cap D(Q)).$$

Afin de construire une solution du problème (10)-(CBi) avec uniquement $f \in L^p(a, b; X)$, on suppose que :

- (H₁) X est un espace UMD,
- (H₂) P et Q sont fermés et $0 \in \rho(P) \cap \rho(Q)$,
- (H₃) $D(P) = D(Q)$ et $P^{-1}Q^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$,
- (H₄) $-P, -Q \in \text{BIP}(X, \theta_0)$, pour un $\theta_0 \in [0, \pi[$,
- (H₅) $P - Q$ admet un prolongement inversible $B \in \mathcal{L}(X)$.

Introduction

Certains de nos résultats nécessiteront une hypothèse supplémentaire :

$$(H_6) \quad 0 \in \rho(U) \cap \rho(V),$$

où

$$\begin{cases} U := I - e^{(b-a)(L+M)} - B^{-1} (L+M)^2 \left(e^{(b-a)M} - e^{(b-a)L} \right) = I - T_- \in \mathcal{L}(X) \\ V := I - e^{(b-a)(L+M)} + B^{-1} (L+M)^2 \left(e^{(b-a)M} - e^{(b-a)L} \right) = I - T_+ \in \mathcal{L}(X), \end{cases}$$

avec $L := -\sqrt{-Q}$, $M := -\sqrt{-P}$.

On donne ensuite quelques conséquences sur ces hypothèses, puis on établit quelques résultats préliminaires. Notons que les conditions aux bords (CB2) et (CB5) s'écrivent

$$\begin{cases} u'(a) = \varphi_1, & u'(b) = \varphi_2, \\ u''(a) + Pu(a) = \varphi_3, & u''(b) + Pu(b) = \varphi_4, \end{cases} \quad (\text{CB2})$$

et

$$\begin{cases} u(a) = \varphi_1, & u(b) = \varphi_2, \\ u''(a) + Pu(a) = \varphi_3, & u''(b) + Pu(b) = \varphi_4. \end{cases} \quad (\text{CB5})$$

Enfin, on démontre le résultat suivant, qui est le résultat principal de ce chapitre :

Théorème 5. *Soit $f \in L^p(a, b; X)$ avec $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ et $p \in]1, +\infty[$. On suppose que (H_1) , (H_2) , (H_3) , (H_4) et (H_5) sont vérifiées. Alors*

1. *il existe une unique solution classique u de (10)-(CB1) si et seulement si*

$$\varphi_1, \varphi_2 \in (D(P), X)_{1+\frac{1}{2p}, p} \quad \text{et} \quad \varphi_3, \varphi_4 \in (D(P), X)_{\frac{1}{2p}, p},$$

2. *il existe une unique solution classique u de (10)-(CB2) si et seulement si*

$$\varphi_1, \varphi_2 \in (D(P), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p} \quad \text{et} \quad \varphi_3, \varphi_4 \in (D(P), X)_{\frac{1}{2p}, p},$$

3. *il existe une unique solution classique u de (10)-(CB5) si et seulement si*

$$\varphi_1, \varphi_2 \in (D(P), X)_{1+\frac{1}{2p}, p} \quad \text{et} \quad \varphi_3, \varphi_4 \in (D(P), X)_{\frac{1}{2p}, p}.$$

Si, de plus, (H_6) est vérifiée, alors

4. *il existe une unique solution classique u de (10)-(CB3) si et seulement si*

$$\varphi_1, \varphi_2 \in (D(P), X)_{1+\frac{1}{2p}, p} \quad \text{et} \quad \varphi_3, \varphi_4 \in (D(P), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p},$$

5. *il existe une unique solution classique u de (10)-(CB4) si et seulement si*

$$\varphi_1, \varphi_2 \in (D(P), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p} \quad \text{et} \quad \varphi_3, \varphi_4 \in (D(P), X)_{\frac{1}{2p}, p}.$$

Chapitre 5

Ici on considère le modèle EDP 2 dans le cas où $l_+ = l_- = 0$. Ainsi, le problème (P_{edp}) devient :

$$(P_{edp}) \left\{ \begin{array}{ll} k_- \Delta^2 u_- &= f_- \quad \text{dans } \Omega_- \\ k_+ \Delta^2 u_+ &= f_+ \quad \text{dans } \Omega_+ \\ u_-(x, \zeta) &= 0, \quad x \in]a, \gamma[, \zeta \in \partial\omega \\ u_+(x, \zeta) &= 0, \quad x \in]\gamma, b[, \zeta \in \partial\omega \\ \Delta u_-(x, \zeta) &= 0, \quad x \in]a, \gamma[, \zeta \in \partial\omega \\ \Delta u_+(x, \zeta) &= 0, \quad x \in]\gamma, b[, \zeta \in \partial\omega \\ u_-(a, y) &= \varphi_1^-(y), \quad y \in \omega \\ u_+(b, y) &= \varphi_1^+(y), \quad y \in \omega \\ \frac{\partial u_-}{\partial x}(a, y) &= \varphi_2^-(y), \quad y \in \omega \\ \frac{\partial u_+}{\partial x}(b, y) &= \varphi_2^+(y), \quad y \in \omega \\ u_- &= u_+ \quad \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial u_-}{\partial x} &= \frac{\partial u_+}{\partial x} \quad \text{sur } \Gamma \\ k_- \Delta u_- &= k_+ \Delta u_+ \quad \text{sur } \Gamma \\ k_- \frac{\partial \Delta u_-}{\partial x} &= k_+ \frac{\partial \Delta u_+}{\partial x} \quad \text{sur } \Gamma, \end{array} \right.$$

où $\varphi_1^\pm$ et $\varphi_2^\pm$ sont données dans des espaces appropriés. De même, le problème (P) devient :

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} (EQ) \left\{ \begin{array}{l} u_-^{(4)}(x) + 2Au_-''(x) + A^2 u_-(x) = f_-(x), \quad \text{p.p. } x \in]a, \gamma[\\ u_+^{(4)}(x) + 2Au_+''(x) + A^2 u_+(x) = f_+(x), \quad \text{p.p. } x \in]\gamma, b[\end{array} \right. \\ (CB) \left\{ \begin{array}{l} u_-(a) = \varphi_1^-, \quad u_+(b) = \varphi_1^+ \\ u'_-(a) = \varphi_2^-, \quad u'_+(b) = \varphi_2^+ \end{array} \right. \\ (CT) \left\{ \begin{array}{l} u_-(\gamma) = u_+(\gamma) \\ u'_-(\gamma) = u'_+(\gamma) \\ k_+ u_+''(\gamma) + k_+ A u_+(\gamma) = k_- u_-''(\gamma) + k_- A u_-(\gamma) \\ k_+ u_+^{(3)}(\gamma) + k_+ A u'_+(\gamma) = k_- u_-^{(3)}(\gamma) + k_- A u'_-(\gamma). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Notons qu'on a changé f_- pour f_-/k_- , f_+ pour f_+/k_+ .

Les conditions de transmission (CT2) deviennent alors :

$$(CT2) \left\{ \begin{array}{l} k_+ u_+''(\gamma) + k_+ A u_+(\gamma) = k_- u_-''(\gamma) + k_- A u_-(\gamma) \\ k_+ u_+^{(3)}(\gamma) + k_+ A u'_+(\gamma) = k_- u_-^{(3)}(\gamma) + k_- A u'_-(\gamma). \end{array} \right.$$

On cherche une solution classique du problème (P), qui est une solution u telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} u_- := u|_{]a, \gamma[} \in W^{4,p}(a, \gamma; X) \cap L^p(a, \gamma; D(A^2)), \quad u_-'' \in L^p(a, \gamma; D(A)) \\ u_+ := u|_{] \gamma, b[} \in W^{4,p}(\gamma, b; X) \cap L^p(\gamma, b; D(A^2)), \quad u_+'' \in L^p(\gamma, b; D(A)), \end{array} \right.$$

Introduction

et qui vérifie $(EQ) - (CB) - (CT)$.

Afin de construire une telle solution avec $f_- \in L^p(a, \gamma; X)$ et $f_+ \in L^p(\gamma, b; X)$, on suppose que :

- (H_1) X est un espace UMD,
- (H_2) A est un opérateur linéaire inversible,
- (H_3) $-A \in \text{BIP}(X, \theta_A)$ pour un $\theta_A \in [0, \pi[$.

Certains de nos résultats nécessiteront des hypothèses supplémentaires :

- (H_4) $\sigma(A) \subset]-\infty, 0[$ et $\forall \theta \in]0, \pi[, \sup_{\lambda \in S_\theta} \|\lambda(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty$,
- (H_5) $k_+ k_- > 0$,

On donne ensuite quelques conséquences sur ces hypothèses dans lesquelles on définit l'opérateur linéaire $M := -\sqrt{-A}$. Afin de résoudre le problème (P), on introduit deux problèmes auxiliaires :

$$(P_-) \begin{cases} u_-^{(4)}(x) + 2Au_-''(x) + A^2u_-(x) = f_-(x), & \text{pour } x \in]a, \gamma[, \\ u_-(a) = \varphi_1^-, & u_-(b) = \psi_1, \\ u'_-(a) = \varphi_2^-, & u'_-(b) = \psi_2, \end{cases}$$

et

$$(P_+) \begin{cases} u_+^{(4)}(x) + 2Au_+''(x) + A^2u_+(x) = f_+(x), & \text{pour } x \in]\gamma, b[, \\ u_+(a) = \psi_1, & u_+(b) = \varphi_1^+, \\ u'_+(a) = \psi_2, & u'_+(b) = \varphi_2^+. \end{cases}$$

Remarque 1. Une fonction u est une solution classique de (P) si et seulement s'il existe $\psi_1, \psi_2 \in X$ telles que :

- (i) u_- est une solution classique de (P_-) ,
- (ii) u_+ est une solution classique de (P_+) ,
- (iii) u_- et u_+ vérifient $(CT2)$.

On montre en résultats préliminaires, grâce aux résultats du chapitre 2, que les points (i) et (ii) sont vérifiés. Ensuite, on établit le point (iii) par le Théorème suivant, qui est le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 6. Soient $f_- \in L^p(a, \gamma; X)$ et $f_+ \in L^p(\gamma, b; X)$. On suppose que (H_1) , (H_2) , (H_3) , (H_4) et (H_5) sont vérifiées. Alors, il existe une unique solution classique u au problème (P) si et seulement si

$$\varphi_1^+, \varphi_1^- \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2p}, p} \quad \text{et} \quad \varphi_2^+, \varphi_2^- \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p}.$$

On en déduira une application sous forme d'un corollaire qui donne un résultat d'existence et d'unicité au problème (P_{edp}) .

Chapitre 6

L'ensemble des résultats de ce chapitre à fait l'objet d'un article soumis (voir [26]). Ce chapitre traite lui aussi d'un problème de transmission entre deux habitats juxtaposés basé sur le modèle EDP 2. Soient $k_+, k_-, l_+, l_- \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $r_+ = l_+/k_+$ et $r_- = l_-/k_-$. On considère le problème (P), la formulation opérationnelle du problème (P_{edp}). On cherche une solution classique du problème (P), qui est une solution u telle que

$$\begin{cases} u_- := u_{|]a, \gamma[} \in W^{4,p}(a, \gamma; X) \cap L^p(a, \gamma; D(A^2)), & u_-'' \in L^p(a, \gamma; D(A)) \\ u_+ := u_{|]\gamma, b[} \in W^{4,p}(\gamma, b; X) \cap L^p(\gamma, b; D(A^2)), & u_+'' \in L^p(\gamma, b; D(A)), \end{cases}$$

et qui vérifie $(EQ) - (CB) - (CT)$. Afin de construire une telle solution avec $f_- \in L^p(a, \gamma; X)$ et $f_+ \in L^p(\gamma, b; X)$, on suppose que :

- (H₁) X est un espace UMD,
- (H₂) $0 \in \rho(A)$,
- (H₃) $-A \in \text{BIP}(X, \theta_A)$ pour un $\theta_A \in [0, \pi[$.

Certains de nos résultats nécessiteront une hypothèse supplémentaire :

$$(H_4) \quad \sigma(A) \subset]-\infty, 0[\quad \text{et} \quad \forall \theta \in]0, \pi[, \sup_{\lambda \in S_\theta} \|\lambda(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty,$$

On donne ensuite quelques conséquences sur ces hypothèses dans lesquelles on définit les opérateurs $L_+ := -\sqrt{-A + r_+ I}$, $L_- := -\sqrt{-A + r_- I}$ et $M := -\sqrt{-A}$. Afin de résoudre le problème (P), on introduit deux problèmes auxiliaires :

$$(P_-) \begin{cases} u_-^{(4)}(x) + (2A - r_- I)u_-''(x) + (A^2 - r_- A)u_-(x) = f_-(x), & \text{pour } x \in]a, \gamma[\\ u_-(a) = \varphi_1^-, & u_-(\gamma) = \psi_1 \\ u'_-(a) = \varphi_2^-, & u'_-(\gamma) = \psi_2, \end{cases}$$

et

$$(P_+) \begin{cases} u_+^{(4)}(x) + (2A - r_+ I)u_+''(x) + (A^2 - r_+ A)u_+(x) = f_+(x), & \text{pour } x \in]\gamma, b[\\ u_+(\gamma) = \psi_1, & u_+(b) = \varphi_1^+ \\ u'_+(\gamma) = \psi_2, & u'_+(b) = \varphi_2^+. \end{cases}$$

Remarque 2. Une fonction u est une solution classique de (P) si et seulement s'il existe $\psi_1, \psi_2 \in X$ telles que :

- (i) u_- est une solution classique de (P_-) ,
- (ii) u_+ est une solution classique de (P_+) ,
- (iii) u_- et u_+ vérifient (CT2).

On montre en résultats préliminaires, grâce aux résultats du chapitre 3, que les points (i) et (ii) sont vérifiés. Ensuite, on établit le point (iii) par le Théorème suivant, qui est le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 7. Soient $f_- \in L^p(a, \gamma; X)$ et $f_+ \in L^p(\gamma, b; X)$. On suppose que (H_1) , (H_2) , (H_3) et (H_4) sont vérifiées. Alors, il existe une unique solution classique u au problème de transmission (P) si et seulement si

$$\varphi_1^+, \varphi_1^- \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2p}, p} \quad \text{et} \quad \varphi_2^+, \varphi_2^- \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p}.$$

On terminera par une application sous forme d'un corollaire qui donne un résultat d'existence et d'unicité au problème (P_{edp}) .

7 Perspectives

Dans cette section, on donne plusieurs perspectives s'inscrivant dans la continuité de ces recherches.

Tout d'abord, dans les chapitres 2, 3 et 4, on peut considérer d'autres conditions aux limites comme par exemple des combinaisons linéaires de nos conditions aux limites actuelles ou alors des conditions aux limites de type Robin. Puis, dans le chapitre 6, on pourrait considérer des conditions de transmission (réalistes) avec la non-continuité de la densité et du flux sur l'interface mais en incluant la continuité de la dispersion généralisée :

$$k_- \Delta^2 u_- - l_- \Delta u_- = k_+ \Delta^2 u_+ - l_+ \Delta u_+.$$

Cette situation requière de travailler dans un espace construit à partir de fonctions continues.

Un travail analogue à celui de cette thèse peut être réalisé dans les espaces de Hölder $C^\theta([a, b]; X)$, où $\theta \in]0, 1[$. Il est à noter que ces espaces ne sont pas UMD. De ce fait les résultats importants utilisés ici comme le Théorème de Dore-Venni [12] ou celui de Prüss-Sohr [38] ne peuvent s'appliquer. Il faut alors utiliser la théorie de E. Sinestrari [41] et adapter la formule de représentation afin d'obtenir des résultats similaires avec la régularité maximale.

La suite logique de ce travail est l'étude du problème parabolique linéaire dans le cas d'un cylindre et dans le cas du problème de transmission. Dès lors, dans le cas du cylindre (respectivement du problème de transmission), il faudra étudier les propriétés spectrales de l'opérateur $\mathcal{A}$ (respectivement $\mathcal{L}$ défini par (7)) défini par

$$\begin{cases} D(\mathcal{A}) = \{u \in L^p(\Omega) : \Delta u, \Delta^2 u \in L^p(\Omega) \text{ et } u \text{ satisfaisant } (CB_0)\} \\ \mathcal{A}u = -k\Delta^2 u + l\Delta u, \end{cases}$$

où (CB_0) est correspond à (CB_{edp}) avec $\varphi_1^+ = \varphi_1^- = \varphi_2^+ = \varphi_2^- = 0$.

Notons que l'on peut remplacer les conditions aux bords (2) de (CB_{edp}) par l'une des conditions (CB_i) , $i = 1, 2, 3, 4, 5$, avec $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = 0$.

Plus précisément, l'étude des propriétés spectrales de l'opérateur $\mathcal{A}$ (respectivement $\mathcal{L}$) se fait en étudiant l'équation

$$\mathcal{A}u - \lambda u = f \quad (\text{respectivement} \quad \mathcal{L}u - \lambda u = f).$$

Cela permettra de déterminer la nature du semi-groupe généré par $\mathcal{A}$ (respectivement $\mathcal{L}$) et d'estimer la norme de la résolvante pour avoir

$$\sup_{\lambda \in S_{\theta, \mathcal{A}}} \|\lambda R(\lambda, \mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty \quad (\text{respectivement} \quad \sup_{\lambda \in S_{\theta, \mathcal{L}}} \|\lambda R(\lambda, \mathcal{L})\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty)$$

où $S_{\theta_{\mathcal{A}}}$ (respectivement $S_{\theta_{\mathcal{L}}}$) est un secteur d'angle $\theta_{\mathcal{A}} \in]\pi/2, \pi[$ (respectivement $\theta_{\mathcal{L}} \in]\pi/2, \pi[$). L'estimation précédente nous permettrait alors de montrer que l'opérateur linéaire $\mathcal{A}$ (respectivement $\mathcal{L}$) génère un semi-groupe analytique, ce qui impliquerait des résultats sur le problème parabolique linéaire correspondant.

Enfin, dans le cas du cylindre puis dans cas du problème de transmission, grâce aux résultats de régularité maximale issus du problème linéaire, on pourra étudier le problème non linéaire en utilisant les techniques décrites dans J. Prüss [37].

Chapitre 1

Rappels

Dans ce chapitre, on énonce quelques définitions et résultats de base concernant les opérateurs linéaires, certains espaces fonctionnels, le calcul fonctionnel et les semi-groupes. Ce point de départ nous permet d'aborder la résolution de problèmes différentiels opérationnels.

1.1 Opérateurs linéaires

Soient X et Y deux espaces de Banach complexes.

1.1.1 Généralités

Pour plus de précisions sur les définitions de cette section, on renvoie à l'ouvrage de R. Dautray et J.-L. Lions [10].

Définition 1.1.1. Un opérateur linéaire A de X dans Y est une application linéaire définie d'un sous-espace vectoriel $D(A) \subset X$ à valeurs dans Y .

$D(A)$ est appelé domaine de A et pour tout $\varphi \in D(A)$, $A(\varphi)$ sera noté $A\varphi$.

De plus, quand $Y = X$, on dit que A est un opérateur linéaire sur X .

Définition 1.1.2. Soit $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire.

1. On dit que A est à domaine dense (ou densément défini) si $\overline{D(A)} = X$.
2. On appelle noyau de A le sous-espace vectoriel de X , noté $Ker(A)$, défini par :

$$Ker(A) := \{\varphi \in D(A) : A\varphi = 0\}.$$

3. On appelle image de A le sous-espace vectoriel de Y , noté $Im(A)$, défini par :

$$Im(A) := \{\psi \in Y : \exists \varphi \in D(A) / \psi = A\varphi\} = \{A\varphi : \varphi \in D(A)\}.$$

4. On appelle graphe de A le sous-espace vectoriel de $X \times Y$, noté $G(A)$, défini par :

$$G(A) := \{(\varphi, \psi) \in X \times Y : \varphi \in D(A), \psi = A\varphi\}.$$

Définition 1.1.3. Soit $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire. On munit $D(A)$ de la norme notée $\|\cdot\|_{D(A)}$ et appelée norme du graphe, définie pour tout $\varphi \in D(A)$ par :

$$\|\varphi\|_{D(A)} := \|\varphi\|_X + \|A\varphi\|_Y.$$

Définition 1.1.4. Soient A et B deux opérateurs linéaires sur X . On définit l'opérateur AB par

$$\begin{cases} D(AB) &= \{\varphi \in D(B) : B\varphi \in D(A)\} \\ (AB)\varphi &= A(B\varphi), \forall \varphi \in D(AB). \end{cases}$$

On définit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n comme la puissance n -ième de A :

$$\begin{cases} D(A^0) = X & \text{et } A^0 = I, \\ D(A^1) = D(A) & \text{et } A^1 = A, \\ \forall n \geq 2, D(A^n) = \{\varphi \in D(A^{n-1}) : A^{n-1}\varphi \in D(A)\} & \text{et } A^n = AA^{n-1}. \end{cases}$$

Définition 1.1.5. Soit A un opérateur linéaire sur X . Si A est injectif, on définit l'opérateur linéaire A^{-1} par :

$$\begin{aligned} A^{-1} : \text{Im}(A) &\longrightarrow X \\ \psi &\longmapsto A^{-1}\psi = \varphi, \end{aligned}$$

où $\varphi \in D(A)$ est défini par $A\varphi = \psi$. Notons que $\text{Im}(A^{-1}) = D(A)$

Définition 1.1.6. Soient A et B deux opérateurs linéaires de X dans Y . On dit que B est une extension, ou un prolongement, de A et on note $A \subset B$ si

1. $D(A) \subset D(B)$
2. $\forall \varphi \in D(A), A\varphi = B\varphi$.

1.1.2 Opérateurs linéaires bornés

Définition 1.1.7. On dit qu'un opérateur linéaire A de X dans Y est borné si $D(A) = X$ et s'il est continu. On note alors $\mathcal{L}(X, Y)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés de X dans Y . De plus, on pose $\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X, X)$.

Proposition 1.1.8. Soit A un opérateur linéaire défini de X dans Y , alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $A \in \mathcal{L}(X, Y)$,
2. $\forall \varphi_0 \in X, \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_0} \|A\varphi - A\varphi_0\|_Y = 0$,
3. $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \|A\varphi\|_Y = 0$,
4. $\exists M \geq 0, \forall \varphi \in X, \|A\varphi\|_Y \leq M\|\varphi\|_X$,

Définition 1.1.9. On définit alors une norme sur $\mathcal{L}(X, Y)$, notée $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X, Y)}$, en posant, pour tout $A \in \mathcal{L}(X, Y)$:

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)} := \sup_{\varphi \in X, \varphi \neq 0} \frac{\|A\varphi\|_Y}{\|\varphi\|_X} = \sup_{\|\varphi\|_X \leq 1} \|A\varphi\|_Y = \sup_{\|\varphi\|_X = 1} \|A\varphi\|_Y.$$

Proposition 1.1.10. Si Y est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(X, Y)$ est un espace de Banach.

Proposition 1.1.11. Soit $A \in \mathcal{L}(X)$. Si $\|A\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$, alors :

1. $I - A$ est inversible dans $\mathcal{L}(X)$ et

$$2. (I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n.$$

1.1.3 Opérateurs linéaires fermés

On étudie ici une classe d'opérateurs linéaires plus générale que celle des opérateurs linéaires bornés et on donne quelques éléments de théorie spectrale. Les résultats énoncés ici sont issus de K.-J. Engel et R. Nagel [15], T. Kato [24], R. Dautray et J.-L. Lions [11], M. Haase [23] et A. Lunardi [30].

Définition 1.1.12.

1. Un opérateur linéaire de X dans Y est dit fermé si son graphe est fermé dans $X \times Y$.
2. Un opérateur linéaire est dit fermable s'il admet une extension fermée.

On note qu'un opérateur linéaire borné est un opérateur linéaire fermé.

Proposition 1.1.13. *Un opérateur linéaire $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$ est fermé si et seulement si pour toute suite $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $D(A)$ telle que*

$$\begin{cases} \varphi_n & \longrightarrow \varphi, & \text{dans } X \\ A\varphi_n & \longrightarrow \psi, & \text{dans } Y, \end{cases}$$

on a $\varphi \in D(A)$ et $A\varphi = \psi$.

Notation 1.1.14. Soit A un opérateur linéaire sur X . On écrira $A^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ et on dira que A est inversible, pour signifier que :

1. A est bijectif,
2. A^{-1} est un opérateur linéaire borné sur X .

Proposition 1.1.15. *Soit A un opérateur linéaire sur X .*

1. *Si A est un opérateur fermé injectif, alors A^{-1} est fermé.*
2. *A est un opérateur fermé bijectif si et seulement si $A^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.*

Démonstration.

1. Soient $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ une suite dans $D(A^{-1}) = \text{Im}(A)$ et $\varphi, \psi \in X$ tels que

$$\begin{cases} \varphi_n & \longrightarrow \varphi, & \text{dans } X \\ A^{-1}\varphi_n & \longrightarrow \psi, & \text{dans } X. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} AA^{-1}\varphi_n = \varphi_n & \longrightarrow \varphi, & \text{dans } X \\ A^{-1}\varphi_n & \longrightarrow \psi, & \text{dans } X, \end{cases}$$

or, puisque A est fermé, on a $\varphi \in D(A)$ et $A\varphi = \psi$. Ainsi, $\psi \in \text{Im}(A) = D(A^{-1})$ et $\varphi = A^{-1}\psi$. Donc A^{-1} est fermé.

2. Si A est un opérateur linéaire fermé bijectif de X dans X , alors d'après 1., A^{-1} est fermé. Donc, d'après le Théorème du graphe fermé, A^{-1} est continu, d'où $A^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.

Réciproquement, si $A^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, alors d'après la Notation 1.1.14, A est bijectif. Soient $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ une suite dans $D(A)$ et $\varphi, \psi \in X$ tels que

$$\begin{cases} \varphi_n & \longrightarrow \varphi, & \text{dans } X \\ A\varphi_n & \longrightarrow \psi, & \text{dans } X. \end{cases}$$

Alors $\varphi_n = A^{-1}A\varphi_n \longrightarrow A^{-1}\psi$. D'où, par unicité de la limite, $\varphi = A^{-1}\psi$ et $\varphi \in D(A)$. De ce fait, $A\varphi = \psi$, donc A est fermé. $\square$

Chapitre 1. Rappels

Définition 1.1.16. Soit A un opérateur linéaire sur X . L'ensemble résolvant, noté $\rho(A)$, de A est défini par :

$$\rho(A) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X) \right\}.$$

Si $\lambda \in \rho(A)$, on définit la résolvante $R(\lambda, A)$ de A au point λ par :

$$R(\lambda, A) := (\lambda I - A)^{-1}.$$

Le spectre de A , noté $\sigma(A)$, est défini par :

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

Remarque 1.1.17. D'après ce qui précède, on a :

1. Si $\rho(A) \neq \emptyset$, alors A est fermé.
2. $\sigma(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A) \text{ n'est pas bijectif ou } (\lambda I - A)^{-1} \notin \mathcal{L}(X) \}.$

Définition 1.1.18. Si A est un opérateur linéaire borné sur X , alors on définit le rayon spectral $r(A)$ de A de la manière suivante :

$$r(A) := \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

Si $\sigma(A) = \emptyset$, par convention, on pose $r(A) := 0$.

Remarque 1.1.19. Si A est borné, alors $\sigma(A) \subset \overline{B(0, r(A))}$.

Proposition 1.1.20. Si A est un opérateur linéaire fermé sur X . Si $0 \in \rho(A)$, alors on a $B(0, R) \subset \rho(A)$, où $1/R := r(A^{-1})$ est le rayon spectral de A^{-1} .

Définition 1.1.21. Soient A et B deux opérateurs linéaires fermés sur X tels que $\rho(A) \neq \emptyset$ et $\rho(B) \neq \emptyset$. Alors on dit que A et B commutent au sens des résolvantes si et seulement si, pour tout $\lambda \in \rho(A)$ et tout $\mu \in \rho(B)$

$$R(\lambda, A) R(\mu, B) = R(\mu, B) R(\lambda, A).$$

Proposition 1.1.22. Soient A et B deux opérateurs linéaires fermés sur X tels que

1. $D(A) = D(B)$,
2. $\rho(A) \neq \emptyset$ et $\rho(B) \neq \emptyset$.

Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes

1. A et B commutent au sens des résolvantes.
2. $AB = BA$.

Proposition 1.1.23. Soit A un opérateur linéaire fermé sur X . Pour tout $\lambda, \mu \in \rho(A)$, on appelle identité de la résolvante l'égalité suivante :

$$(\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A) = R(\lambda, A) - R(\mu, A).$$

Proposition 1.1.24. Soit A un opérateur linéaire fermé sur X . Alors l'application

$$\begin{aligned} \rho(A) &\longrightarrow \mathcal{L}(X) \\ \lambda &\longmapsto R(\lambda, A) \end{aligned}$$

est analytique sur $\rho(A)$.

Proposition 1.1.25. Soient A et B deux opérateurs linéaires sur X . On a :

1. Si B est borné, alors B est fermé.
2. Si A est fermé et B est borné, alors $A + B$ est fermé.
3. Si A est fermé et B est borné, alors AB est fermé.
4. Si A est inversible et B est fermé, alors AB est fermé.
5. Si A est inversible, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A^n est fermé.

Proposition 1.1.26. Soit A un opérateur linéaire sur X . Si A est fermé et $D(A)$ est fermé sur X , alors A est continu de $D(A)$ dans X .

Proposition 1.1.27. Soit A un opérateur linéaire sur X , alors A est fermé si et seulement si $(D(A), \|\cdot\|_{D(A)})$ est un espace de Banach.

1.1.4 Opérateurs sectoriels

On étudie maintenant une classe d'opérateurs fermés. Les résultats énoncés ici sont issus de M. Haase [23] et A. Lunardi [30].

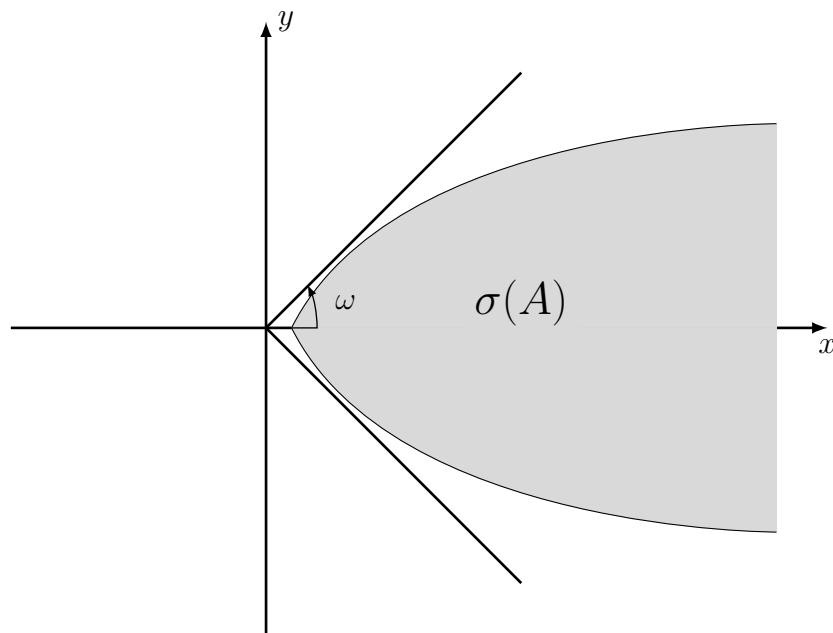
Définition 1.1.28. Soit $\omega \in [0, \pi]$, on note

$$S_\omega = \begin{cases} \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0 \text{ et } |\arg(z)| < \omega\} & \text{si } \omega \in]0, \pi], \\ \mathbb{R}_+^* & \text{si } \omega = 0. \end{cases}$$

Ainsi, si $\omega > 0$, S_ω désigne le secteur ouvert, symétrique autour de l'axe réel positif, d'angle 2ω .

Définition 1.1.29. Soit $\omega \in [0, \pi[$. Un opérateur linéaire A sur X est dit sectoriel d'angle ω , noté $A \in \text{Sect}(\omega)$, si :

1. $\sigma(A) \subset \overline{S_\omega}$
2. $\exists M > 0, \sup_{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{S_{\omega'}}} \|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda|} < +\infty$, pour tout $\omega' \in]\omega, \pi[$.



Ici A est sectoriel d'angle ω .

Proposition 1.1.30. *Si A est un opérateur sectoriel d'angle $\omega \in [0, \pi[$, alors A est fermé.*

Proposition 1.1.31. *Soit $\omega \in [0, \pi[$. Les propriétés suivantes sont alors vérifiées :*

1. $A \in \text{Sect}(\omega)$ et A injectif $\iff A^{-1} \in \text{Sect}(\omega)$.
2. $A \in \text{Sect}(\omega)$, $c \geq 0 \implies cA \in \text{Sect}(\omega)$.
3. $A \in \text{Sect}(\omega)$, $\varepsilon \geq 0 \implies A + \varepsilon I \in \text{Sect}(\omega)$.

Proposition 1.1.32. *Soit A un opérateur linéaire fermé sur X .*

1. Si $\mathbb{R}_+^* \subset \rho(A)$ et $M(A) := \sup_{\lambda > 0} \|\lambda(\lambda I + A)^{-1}\| < \infty$, alors

$$M(A) \leq 1 \quad \text{et} \quad A \in \text{Sect}(\pi - \arcsin(M(A)^{-1})).$$

2. Si X est réflexif et $A \in \text{Sect}(\omega)$, alors $\overline{D(A)} = X$ et $X = \text{Ker}(A) \oplus \overline{\text{Im}(A)}$.
3. Soit $\omega \in [0, \pi[$. Si $A \in \text{Sect}(\omega)$ est injectif et X est réflexif, alors

$$\overline{\text{Im}(A)} = \overline{D(A)} = X = \overline{D(A^n) \cap \text{Im}(A^n)}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1.2 Espaces fonctionnels

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ (borné ou non) ou un rectangle de $\mathbb{R}^2$ et $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach complexe. Les définitions et résultats énoncés ici sont issus de W. Arendt, C. J. K. Batty, M. Hieber et F. Neubrander [1].

1.2.1 Mesure et intégrale de Bochner

Dans la suite, on étudiera des fonctions à valeurs dans X . On utilisera alors la mesure de Bochner grâce à laquelle l'espace L_{loc}^1 des applications localement intégrables à valeurs vectorielles s'injecte continûment dans l'espace $\mathcal{D}'$ des distributions à valeurs vectorielles. On utilisera alors l'intégrale de fonctions à valeurs dans X , appelée intégrale de Bochner.

Définition 1.2.1. Soit $f : I \longrightarrow X$. f est dite étagée si pour tout $x \in I$, il existe une famille finie $(x_j)_{j \in J}$ d'éléments de X et une famille finie $(A_j)_{j \in J}$ de parties mesurables de I vérifiant

1. $\bigcup_{j \in J} A_j = I$,
2. $\forall i, j \in J, i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$,

telles que

$$f(x) = \sum_{j \in J} x_j \mathbf{1}_{A_j},$$

où $\mathbf{1}_{A_j}$ est la fonction caractéristique de A_j .

Définition 1.2.2. Soit $f : I \longrightarrow X$. f est dite Bochner-mesurable (mesurable au sens de Bochner), s'il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions étagées telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x), \quad \text{p.p. } x \in I.$$

Lemme 1.2.3. Soient $f : I \longrightarrow X$, $g : I \longrightarrow X$, $h : I \longrightarrow \mathbb{C}$ des fonctions Bochner-mesurables et $k : X \longrightarrow Y$ où Y est un espace de Banach. On a alors les propriétés suivantes :

1. $f + g$ et $h.f$ sont Bochner-mesurables
2. Si k est continue, alors $k \circ f$ est Bochner-mesurable
3. $\|f\|$ est Bochner-mesurable
4. Si X est un sous espace fermé de Y et f une application Bochner-mesurable à valeurs dans Y , alors f est aussi une application Bochner-mesurable à valeurs dans X .

Corollaire 1.2.4. Soit $f : I \longrightarrow X$. On a alors les deux propriétés suivantes :

1. Si f est continue, alors f est Bochner-mesurable
2. Si $f_n : I \longrightarrow X$ est Bochner-mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f$ presque partout, alors f est Bochner-mesurable.

Définition 1.2.5. Soit $f : I \longrightarrow X$. f est dite Bochner-intégrable (intégrable au sens de Bochner), s'il existe une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers f presque partout telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I \|f_n(x) - f(x)\| dx = 0.$$

Théorème 1.2.6 (Bochner). Une fonction $f : I \longrightarrow X$ est Bochner-intégrable si et seulement si

1. f est Bochner-mesurable,
2. $\|f\|$ est Lebesgue-intégrable.

Si f est Bochner-intégrable, alors

$$\left\| \int_I f(t) dt \right\| \leq \int_I \|f(t)\| dt.$$

Remarque 1.2.7. En fait, si $f : I \longrightarrow X$ est une fonction Bochner-mesurable, alors f est Bochner-intégrable équivaut à $\|f\|$ est Lebesgue-intégrable.

Proposition 1.2.8. Soient $T : X \longrightarrow Y$, où Y est un espace de Banach, un opérateur linéaire borné et $f : I \longrightarrow X$ une fonction Bochner-intégrable. Alors $T \circ f : t \longmapsto T(f(t))$ est Bochner-intégrable et

$$T \int_I f(t) dt = \int_I T(f(t)) dt.$$

Proposition 1.2.9. Soient A un opérateur linéaire fermé sur X et $f : I \longrightarrow X$ une fonction Bochner-intégrable. Supposons que $f(t) \in D(A)$ pour tout $t \in I$ et $A \circ f : I \longrightarrow X$ est Bochner-intégrable. Alors

$$\int_I f(t) dt \in D(A) \quad \text{et} \quad A \int_I f(t) dt = \int_I A(f(t)) dt.$$

Proposition 1.2.10. Soit $F : [a, b] \longrightarrow X$ une fonction absolument continue. Supposons qu'il existe $f(t) := F'(t)$ presque partout. Alors f est Bochner-intégrable et

$$F(t) = F(a) + \int_a^t f(s) ds, \quad \text{pour tout } t \in [a, b].$$

1.2.2 Espaces de Sobolev à valeurs vectorielles

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et X, E, F trois espaces de Banach. Les espaces de Sobolev à valeurs vectorielles étant construits à partir des espaces L^p avec $p \in [1, +\infty[$, dont on donne ici la définition.

Définition 1.2.11. Soit $f : I \longrightarrow X$. Pour $1 \leq p < +\infty$, on définit

$$L^p(I; X) := \left\{ f \text{ est Bochner-mesurable telle que } \int_I \|f\|^p d\mu < +\infty \right\}$$

que l'on munit de la norme

$$\|f\|_{L^p(I; X)} = \left(\int_I \|f\|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Définition 1.2.12. Soient $p \in [1, +\infty[$ et A un opérateur linéaire sur X de domaine $D(A)$. On définit

$$L^p(I, D(A)) := \{ \varphi \in L^p(I, X) : \varphi(x) \in D(A) \text{ p.p. } x \in I \text{ et } A\varphi(x) \in L^p(I, X) \text{ p.p. } x \in I \}.$$

Théorème 1.2.13. Pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, $L^p(I; X)$ est un espace de Banach.

Afin de définir les espaces de Sobolev à valeurs vectorielles, il est nécessaire de faire quelques rappels sur les distributions à valeurs vectorielles.

Définition 1.2.14. [Distributions à valeurs vectorielles]

1. Si $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ est une suite de $\mathcal{D}(I)$, on dira que $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ converge vers 0 dans $\mathcal{D}(I)$ si et seulement si
 - (a) Il existe K un compact de I contenant le support de toutes les fonctions $\varphi_n, n \geq 0$.
 - (b) Pour tout $j \in \mathbb{N}$, la suite $(D^j \varphi_n)_{n \geq 0}$ converge vers 0 uniformément sur K .
2. Une application linéaire $L : \mathcal{D}(I) \rightarrow X$ est dite continue si et seulement si pour toute suite $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ de $\mathcal{D}(I)$, qui converge vers 0 dans $\mathcal{D}(I)$ on a

$$L\varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ dans } X.$$

3. $\mathcal{D}'(I; X)$ est l'espace des applications linéaires continues de $\mathcal{D}(I)$ dans X .

Définition 1.2.15. [Distributions régulières]

1. $L^1_{loc}(I; X)$ est l'espace des fonctions f Bochner-mesurables de I dans X telles que pour tout compact K de I , $f \cdot \mathbb{1}_K \in L^1(I; X)$
2. Si $f \in L^1_{loc}(I; X)$ alors, $[f] \in \mathcal{D}'(I; X)$, la distribution régulière associée à f , est définie par

$$[f](\phi) = \int_I \phi(x) f(x) dx, \quad \phi \in \mathcal{D}(I),$$

et l'application $f \longmapsto [f]$ est une injection de $L^1_{loc}(I; X)$ dans $\mathcal{D}'(I; X)$ ce qui permet d'identifier $L^1_{loc}(I; X)$ à un sous espace vectoriel de

$$\mathcal{D}'(I; X).$$

De même, pour tout $p \in [1, \infty]$, $L^p(I; X)$ s'identifie à un sous espace vectoriel de $\mathcal{D}'(I; X)$, car

$$L^p(I; X) \subset L^1_{loc}(I; X).$$

Définition 1.2.16. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty]$. On définit l'espace de Sobolev $W^{n,p}$ de la façon suivante :

$$W^{n,p}(I; X) := \left\{ u \in L^p(I; X), [u]^{(j)} \in L^p(I; X), \text{ pour tout } j \in \mathbb{N} \text{ tel que } j \leq n \right\}.$$

Notons que pour $j = 0, 1, \dots, k$, $[u]^{(j)}$ est la dérivée $j^{\text{ème}}$ au sens des distributions de u et $[u]^{(j)} \in L^p(I; X)$ signifie que

$$\exists g_j \in L^p(I; X) \text{ tel que } [u]^{(j)} = [g_j].$$

Théorème 1.2.17. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in [1, +\infty]$, l'espace de Sobolev $W^{n,p}(I; X)$ est un espace de Banach.

Théorème 1.2.18. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et tout $p \in [1, +\infty]$, l'espace de Sobolev $W^{n,p}(I; X)$ s'injecte continûment dans $C^{n-1}(I; X)$.

Remarque 1.2.19. $W^{n,p}(I; X)$ s'injecte continûment dans $C^{n-1}(I; X)$, signifie que toute fonction de $W^{n,p}(I; X)$ est (presque partout égale à) une fonction de $C^{n-1}(I; X)$ et qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $u \in W^{n,p}(I; X)$, on a

$$\|u\|_{C^{n-1}(I; X)} \leq C \|u\|_{W^{n,p}(I; X)}.$$

Cela signifie que l'identité $I : W^{n,p}(I; X) \rightarrow C^{n-1}(I; X)$ est continue. On note alors

$$W^{n,p}(I; X) \hookrightarrow C^{n-1}(I; X).$$

Théorème 1.2.20 (Mihlin [31]). Soit k un nombre entier naturel supérieur à $n/2$ et m une fonction C^k définie sur $\mathbb{R}^n$. Supposons qu'il existe une fonction c_0 telle que pour tout $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ multi-indices satisfaisant

$$|\alpha| = |\alpha_1| + \dots + |\alpha_n| \leq k,$$

on a :

$$|\lambda^\alpha| |\partial^\alpha m(\lambda) / \partial \lambda^\alpha| \leq c_0.$$

Alors il existe une constante c_p dépendant seulement de n et p telle que l'opérateur défini par :

$$T_m f = F^{-1}(m F(f)),$$

vérifie :

$$\|T_m f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq c_p c_0 \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

où on a désigné par F la transformation de Fourier définie par

$$F(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x) dx$$

et F^{-1} la transformation inverse de Fourier.

On en déduit un résultat de régularité sur les dérivées secondes croisées d'une fonction à partir de celle des dérivées pures.

Corollaire 1.2.21. Soient $p \in]1, +\infty[$ et $v : (x_1, \dots, x_n) \mapsto v(x_1, \dots, x_n)$ une fonction donnée dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, telle que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Alors, pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

1.3 Calcul fonctionnel

Dans cette section, nous rappellerons quelques notions sur le calcul fonctionnel appliqué aux opérateurs bornés puis sectoriels. Cela aura pour but de définir les puissances fractionnaires et imaginaires d'opérateurs sectoriels. De plus, les notions de semi-groupes pourront alors être définies à partir du calcul fonctionnel via l'intégrale de Dunford-Riesz. Les définitions et résultats énoncés ici sont majoritairement issus de M. Haase [23].

Soient $(X, \|\cdot\|)$, un espace de Banach complexe et U un ouvert de $\mathbb{C}$. On désigne par $H(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur U .

1.3.1 Calcul fonctionnel pour les opérateurs linéaires bornés

Définition 1.3.1. [Formule de Cauchy] Soient $f \in H(U)$, K un compact à bord de U et $z_0 \in K$, la formule de Cauchy nous donne

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

où Γ est le bord positivement orienté de K .

On cherche à construire $f(A)$ avec A un opérateur linéaire borné et f une fonction holomorphe sur un ouvert contenant $\sigma(A)$, le spectre de A . Pour cela, on définit l'intégrale de Dunford-Riesz sur le modèle de la formule de Cauchy.

Définition 1.3.2. [Intégrale de Dunford-Riesz] Soient A un opérateur linéaire borné, U un ouvert de $\mathbb{C}$, $f \in H(U)$, K un compact à bord de U contenant $\sigma(A)$ et Γ le bord positivement orienté de K (donc Γ entoure le spectre de A). Alors

$$f(A) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} f(z) (zI - A)^{-1} dz.$$

Remarque 1.3.3. Dans la définition précédente, puisque la fonction $z \mapsto (zI - A)^{-1}$ est analytique sur $\rho(A)$, alors $f(A)$ ne dépend que de la fonction f et non de l'ouvert U .

1.3.2 Calcul fonctionnel pour les opérateurs sectoriels

Dans cette section, on considère $A \in \text{Sect}(\omega_A)$ avec $\omega_A \in [0, \pi[$ et on donne la définition, à la manière de M. Haase [23], de différents espaces fonctionnels utiles pour définir l'opérateur $f(A)$.

Espaces de fonctions holomorphes

On commence par expliciter les espaces de fonctions utilisés.

Définition 1.3.4. Soit $\omega \in]0, \pi[$. On définit les espaces fonctionnels suivants :

$$H^\infty(S_\omega) := \left\{ f \in H(S_\omega) : \sup_{z \in S_\omega} |f(z)| < +\infty \right\},$$

l'espace des fonctions holomorphes bornées.

$$H_0^\infty(S_\omega) := \left\{ f \in H^\infty(S_\omega) : \exists s \in \mathbb{R}^+, \sup_{z \in S_\omega} \max(|z|^s, |z|^{-s}) |f(z)| < +\infty \right\},$$

l'espace des fonctions holomorphes à décroissance polynomiale en 0 et en $+\infty$.

$$\mathcal{E}_\infty(S_\omega) := \left\{ f \in H(S_\omega) : f = O(|z|^{-\alpha}) \ (z \rightarrow \infty) \text{ pour un } \alpha > 0 \right\},$$

l'espace des fonctions holomorphes à décroissance polynomiale en ∞ .

On a alors :

$$H_0^\infty(S_\omega) \subseteq \mathcal{E}_\infty(S_\omega) \subseteq H^\infty(S_\omega) \subseteq H(S_\omega).$$

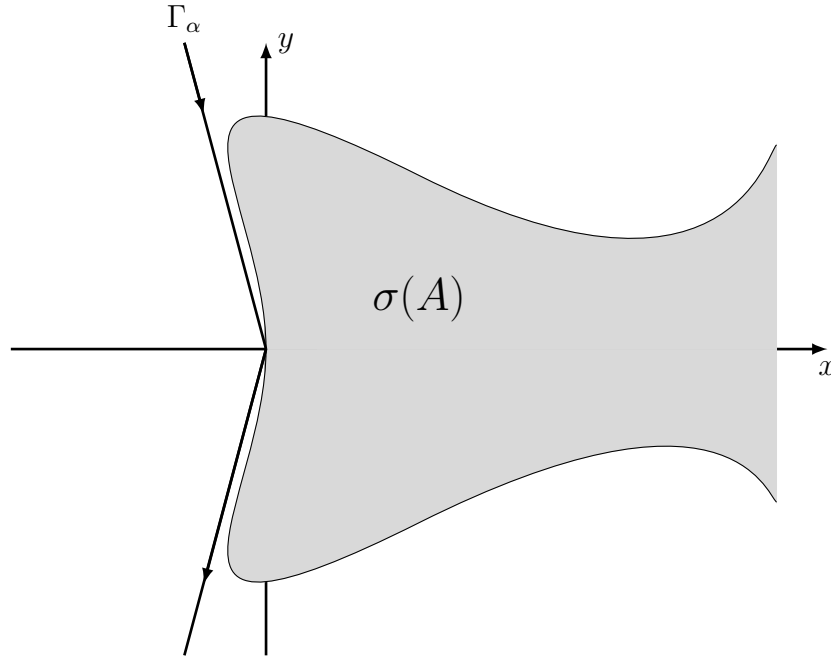
Calcul fonctionnel borné

Sous de bonnes hypothèses sur f ou A on peut construire $f(A) \in \mathcal{L}(X)$.

Définition 1.3.5. Soit $f \in H_0^\infty(S_\omega)$ avec $\omega > \omega_A$. On définit l'opérateur linéaire borné $f(A)$ par

$$f(A) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_\alpha} f(z)(zI - A)^{-1} dz,$$

où Γ_α est le bord positivement orienté du secteur S_α avec $\alpha \in]\omega_A, \omega[$.



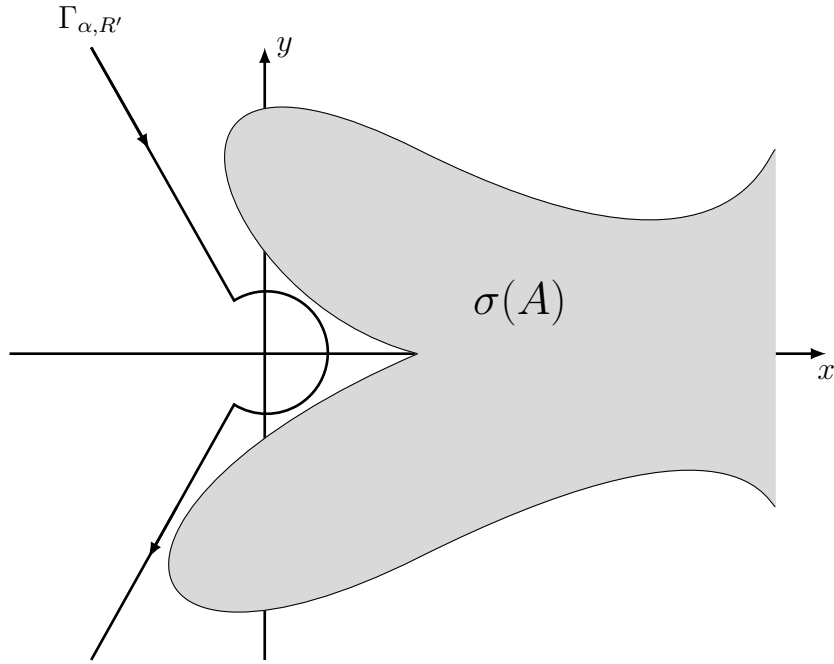
L'intégration en 0 et $+\infty$ est possible grâce à la décroissance rapide de f en 0 et $+\infty$.

Dans le cas où $0 \in \rho(A)$, on peut se dispenser du contrôle de f en 0 en considérant une courbe qui contourne ce point par la droite.

Définition 1.3.6. Soient $0 \in \rho(A)$ et $f \in \mathcal{E}_\infty(S_\omega)$ avec $\omega > \omega_A$. Il existe $R > 0$ tel que $B(0, R) \subset \rho(A)$. On définit l'opérateur linéaire borné $f(A)$ par

$$f(A) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_{\alpha, R'}} f(z)(zI - A)^{-1} dz,$$

où $\Gamma_{\alpha, R'}$ est le bord positivement orienté du secteur $S_\alpha \setminus B(0, R')$ avec $\alpha \in]\omega_A, \omega[$ et $R' \in]0, R[$.



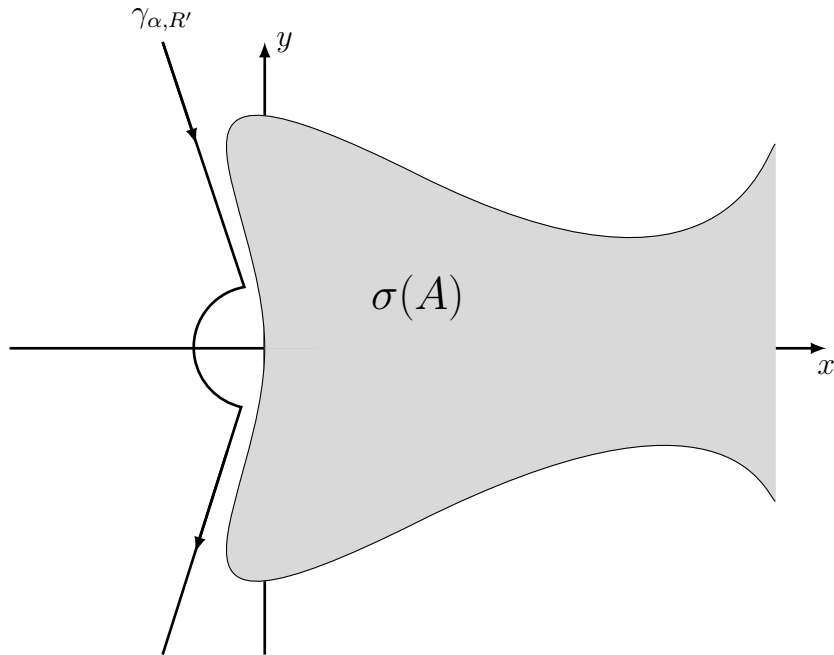
On intègre sur $\Gamma_{\alpha, R'}$ qui entoure 0 car A est inversible.

Si f est holomorphe au voisinage de 0, on peut encore se dispenser du contrôle en 0.

Définition 1.3.7. Soit $f \in \mathcal{E}_\infty(S_\omega)$, avec $\omega > \omega_A$, admettant un prolongement holomorphe sur $B(0, R)$. On définit l'opérateur linéaire borné $f(A)$ par

$$f(A) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{\alpha, R'}} f(z)(zI - A)^{-1} dz,$$

où $\gamma_{\alpha, R'}$ est le bord positivement orienté de $S_\alpha \cup B(0, R')$ avec $\alpha \in]\omega_A, \omega[$ et $R' \in]0, R[$.



Ici A n'est pas inversible mais $\gamma_{\alpha, R'}$ contourne 0 par la gauche.

Théorème 1.3.8. Soient $\omega \in]\omega_A, \pi[$ et B un opérateur linéaire fermé qui commute avec les résolvantes de A .

Si $f \in H_0^\infty(S_\omega)$, alors

1. B commute avec $f(A)$,
2. $f(A)$ commute avec A
3. $f(A)$ commute avec $R(\lambda, A)$ pour tout $\lambda \in \rho(A)$.

De même, si A est inversible et $f \in \mathcal{E}_\infty(S_\omega)$, alors

1. B commute avec $f(A)$,
2. $f(A)$ commute avec A
3. $f(A)$ commute avec $R(\lambda, A)$ pour tout $\lambda \in \rho(A)$.

Calcul fonctionnel étendu

On peut définir $f(A)$ en amoindrissant les hypothèses sur f , mais dans ce cas on obtient que $f(A)$ est un opérateur linéaire fermé non nécessairement borné.

Définition 1.3.9. Soient $\omega \in]\omega_A, \pi[$ et ψ la fonction définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ par

$$\psi(z) = \frac{1}{1+z}.$$

Soit $f \in H(S_\omega)$, tel que $\psi^n f \in H_0^\infty(S_\omega)$, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé. Alors, on pose :

$$f(A) := (I + A)^n (\psi^n f)(A),$$

c'est-à-dire que

$$f(A) := \frac{1}{2i\pi} (I + A)^n \int_{\Gamma_\alpha} \frac{f(z)}{(1+z)^n} (zI - A)^{-1} dz,$$

où Γ_α est le bord positivement orienté du secteur S_α avec $\alpha \in]\omega_A, \omega[$.

Notons que dans la définition précédente, $(I + A)^n$ est un opérateur linéaire fermé et $(\psi^n f)(A) \in \mathcal{L}(X)$, d'où $f(A)$ est fermé.

Définition 1.3.10. Soient A un opérateur injectif $\omega \in]\omega_A, \pi[$ et τ la fonction définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ par

$$\tau(z) = \frac{z}{(1+z)^2}.$$

Soit $f \in H(S_\omega)$, tel que $\tau^n f \in H_0^\infty(S_\omega)$, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé. Alors, on pose :

$$f(A) := (I + A)^{2n} A^{-n} (\tau^n f)(A),$$

c'est-à-dire que

$$f(A) := \frac{1}{2i\pi} (I + A)^{2n} A^{-n} \int_{\Gamma_\alpha} \frac{z^n f(z)}{(1+z)^{2n}} (zI - A)^{-1} dz,$$

où Γ_α est le bord positivement orienté du secteur S_α avec $\alpha \in]\omega_A, \omega[$.

De même que précédemment, $f(A)$ est un opérateur fermé.

Remarque 1.3.11. Notons que les définitions précédentes de $f(A)$ n'entrent pas en contradiction et ne dépendent ni de l'angle α , ni du rayon R' choisis.

1.3.3 Puissances d'opérateurs

Dans cette section, on définit A^α , $\alpha \in \mathbb{C}$, grâce au calcul fonctionnel en considérant la fonction $f(z) = z^\alpha \in H(S_\omega)$ où $\omega \in]0, \pi[$ et en lui appliquant un opérateur sectoriel A d'angle $\omega_A \in]0, \pi[$. On renvoie à M. Haase [23], H. Komatsu [25] et A. V. Balakrishnan [3].

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$.

- On suppose que A est injectif et on utilise la Définition 1.3.10, pour définir l'opérateur linéaire fermé A^α par

$$A^\alpha := \frac{1}{2i\pi} (I + A)^{2n} A^{-n} \int_{\Gamma_\alpha} \frac{z^n z^\alpha}{(1+z)^{2n}} (zI - A)^{-1} dz,$$

où Γ_α est le bord positivement orienté du secteur S_α avec $\alpha \in]\omega_A, \pi[$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > |\alpha|$.

- Si $\operatorname{Re}(\alpha) < 0$ et $0 \in \rho(A)$, on a $A^\alpha \in \mathcal{L}(X)$ car, grâce à la Définition 1.3.6, on peut écrire

$$A^\alpha := \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_{\alpha, R'}} z^\alpha (zI - A)^{-1} dz.$$

- Si $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$, il n'est pas nécessaire de supposer que A est injectif. On définit comme dans la Définition 1.3.9, l'opérateur linéaire fermé A^α par

$$A^\alpha := \frac{1}{2i\pi} (I + A)^n \int_{\Gamma_\alpha} \frac{z^\alpha}{(1+z)^n} (zI - A)^{-1} dz,$$

où $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > \alpha$.

Proposition 1.3.12. *Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, tels que $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ et $\operatorname{Re}(\beta) > 0$, les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. Si $\alpha \in]0, \pi/\omega_A[$, alors A^α existe et $A^\alpha \in \operatorname{Sect}(\alpha\omega_A)$.
2. $A^{\alpha+\beta} = A^\alpha A^\beta$.
3. Si $\alpha \in]0, \pi/\omega_A[$, alors $(A^\alpha)^\beta = A^{\alpha\beta}$.
4. Si $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < \operatorname{Re}(\beta)$, alors $D(A^\beta) \subset D(A^\alpha) \subset \overline{D(A)}$ et $\operatorname{Im}(A^\alpha) \subset \overline{\operatorname{Im}(A)}$.
5. Si A est injectif, alors $(A^{-1})^\alpha = (A^\alpha)^{-1}$.
6. Si $0 \in \rho(A)$, alors $0 \in \rho(A^\alpha)$.
7. Si $B \in \mathcal{L}(X)$ commute avec A , alors il commute aussi avec A^α .
8. Soient $\varphi \in X$ et $\varepsilon > 0$. Alors, on a

$$(A(A + \varepsilon I)^{-1})^\alpha \varphi \in D(A^\beta) \iff \varphi \in D(A^\beta).$$

9. Soit $\varepsilon > 0$, on a $D(A^\alpha) = D((A + \varepsilon I)^\alpha)$.
10. Soit $\varepsilon > 0$, on a $A^\alpha((A + \varepsilon I)^{-1})^\alpha = (A(A + \varepsilon I)^{-1})^\alpha$.

Proposition 1.3.13. *Soient $\varepsilon, \delta \in]0, \pi/\omega_A[$ avec $\varepsilon < \delta$. Alors, pour tout $\alpha \in [\varepsilon, \delta] \subset]0, \pi/\omega_A[$, A^α est sectoriel d'angle $\delta\omega_A$.*

En particulier, si A est un opérateur sectoriel d'angle ω_A , alors pour tout $\alpha \in]0, \pi/\omega_A[$, l'opérateur A^α est sectoriel d'angle $\omega_{A^\alpha} = \alpha\omega_A$.

Les résultats suivants nécessiteront l'hypothèse d'injectivité car on utilise des puissances complexes dont la partie réelle peut être négative ou nulle.

Proposition 1.3.14. *Soit A un opérateur injectif. Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. $A^\alpha A^\beta \subset A^{\alpha+\beta}$ avec $D(A^\beta) \cap D(A^{\alpha+\beta}) = D(A^\alpha A^\beta)$.
2. Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $|\alpha| < \pi/\omega_A$, alors $A^\alpha \in \text{Sect}(|\alpha|\omega_A)$ et $(A^\alpha)^\beta = A^{\alpha\beta}$.
3. Si $\overline{D(A)} = \overline{\text{Im}(A)} = X$, alors $A^{\alpha+\beta} = \overline{A^\alpha A^\beta}$.
4. A^α est injectif et $(A^{-1})^\alpha = (A^\alpha)^{-1} = A^{-\alpha}$.

Proposition 1.3.15. *Soit A un opérateur injectif. Pour $s \in \mathbb{R}^*$, les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. Si $A^{is} \in \mathcal{L}(X)$, alors $D(A^\alpha) \subset D(A^{\alpha+is})$, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$.
2. Soit $\alpha \in \{-1, 1\}$, si $D(A^\alpha) \subset D(A^{\alpha+is})$, alors $A^{is} \in \mathcal{L}(X)$.
3. Soit $\varepsilon > 0$, si $0 \in \rho(A)$, alors $(A + \varepsilon I)^{is} = (I + \varepsilon A^{-1})^{is} A^{is}$.
En particulier, $D((A + \varepsilon I)^{is}) = D(A^{is})$.
4. Pour tout $\varepsilon > 0$, si $A^{is} \in \mathcal{L}(X)$, alors $(A + \varepsilon I)^{is} \in \mathcal{L}(X)$.
5. Si $\sup_{\alpha \in]0,1[} \|A^{-\alpha+is}\| < +\infty$ et $\overline{D(A)} = X$, alors $A^{is} \in \mathcal{L}(X)$.

Proposition 1.3.16. *Soit A un opérateur injectif. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. Pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\overline{D(A)} \cap \overline{R(A)} = X$ et $A^{is} \in \mathcal{L}(X)$.
2. L'opérateur $(A^{is})_{s \in \mathbb{R}}$ forme un C_0 -groupe d'opérateurs bornés sur X .

1.3.4 Opérateurs BIP

Les définitions et les propriétés de cette section se réfèrent à J. Prüss et H. Sohr [38] et [36].

Définition 1.3.17. Soit $\theta \in [0, \pi[$. On dit que $A \in \text{BIP}(X, \theta)$, si

1. $] -\infty, 0[\subset \rho(A)$ et $\sup_{t>0} \|t(A + tI)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty$,
2. A est injectif,
3. $\overline{D(A)} = \overline{\text{Im}(A)} = X$,
4. $\forall s \in \mathbb{R}, A^{is} \in \mathcal{L}(X)$,
5. $\exists C \geq 0, \forall s \in \mathbb{R}, \|A^{is}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Ce^{|s|\theta}$.

Le point 1. équivaut à dire qu'il existe $\omega \in [0, \pi[$, tel que $A \in \text{Sect}(\omega)$. On traduit le point 4. en disant que A a des puissances imaginaires bornées (**B**ounded **I**maginary **P**owers).

Proposition 1.3.18. *Soient $\theta \in [0, \pi[$. Les propriétés suivantes sont alors vérifiées :*

1. $A \in \text{BIP}(X, \theta)$ injectif $\iff A^{-1} \in \text{BIP}(X, \theta)$.
2. $A \in \text{BIP}(X, \theta), 0 < \alpha < \pi/\theta \implies A^\alpha \in \text{BIP}(X, \alpha\theta)$.
3. $A \in \text{BIP}(X, \theta), c \geq 0 \implies cA \in \text{BIP}(X, \theta)$.
4. $A \in \text{BIP}(X, \theta), \varepsilon \geq 0 \implies A + \varepsilon I \in \text{BIP}(X, \theta)$.

1.4 Semi-groupes

Dans cette section, nous rappellerons quelques définitions et résultats importants sur les semi-groupes. On commencera par définir les notions de semi-groupes fortement continus et de générateurs infinitésimaux. Ensuite, on étudiera le cas particulier des semi-groupes analytiques. On rappellera alors quelques propriétés utiles les concernant. Les définitions et propriétés présentées ici sont issues de K.-J. Engel et R. Nagel [15], M. Haase [23], A. Pazy [35] et I. I. Vrabie [44].

Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach Complexe.

1.4.1 Semi-groupes fortement continus

Définition 1.4.1. On appelle semi-groupe, toute famille d'opérateurs linéaires bornés $(T(t))_{t \geq 0}$ qui vérifie :

1. $T(0) = I$,
2. $\forall s, t \in \mathbb{R}^+, T(s+t) = T(s)T(t)$.

Définition 1.4.2. Un semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ est dit fortement continu si, pour tout $\varphi \in X$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t)\varphi - \varphi\| = 0.$$

Un semi-groupe fortement continu est encore appelé C_0 -semi-groupe.

Proposition 1.4.3. Si $(T(t))_{t \geq 0}$ un C_0 -semi-groupe, alors il existe $\omega \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$, telles que

$$\forall t \geq 0, \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}.$$

De plus, si $\omega = 0$ et $M = 1$, $(T(t))_{t \geq 0}$ est appelé C_0 -semi-groupe de contraction.

1.4.2 Générateurs infinitésimaux

Définition 1.4.4. On appelle générateur infinitésimal d'un semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$, l'opérateur linéaire A sur X défini par

$$\begin{cases} D(A) &:= \left\{ \varphi \in X : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)\varphi - \varphi}{t} \text{ existe dans } X \right\}, \\ A\varphi &:= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)\varphi - \varphi}{t}, \varphi \in D(A). \end{cases}$$

Théorème 1.4.5. Si $(T(t))_{t \geq 0}$ est semi-groupe fortement continu de générateur infinitésimal A alors

1. $\forall \varphi \in X, \forall t \geq 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)\varphi ds = T(t)\varphi,$$

Notons que si $t > 0$, on peut remplacer dans la limite 0^+ par 0.

2. $\forall \varphi \in X, \forall t \geq 0$

$$\int_0^t T(s)\varphi ds \in D(A) \quad \text{et} \quad A\left(\int_0^t T(s)\varphi ds\right) = T(t)\varphi - \varphi.$$

3. $\forall \varphi \in D(A), \forall t \geq 0 : T(t)\varphi \in D(A)$. De plus si $\varphi \in D(A)$ alors

$$T(\cdot)\varphi \in C^1([0, \infty[; X) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}(T(t)\varphi) = AT(t)\varphi = T(t)A\varphi.$$

4. $\forall \varphi \in D(A), \forall t, t' \geq 0$

$$\int_t^{t'} AT(s)\varphi ds = T(t')\varphi - T(t)\varphi.$$

Proposition 1.4.6. Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$, alors A est un opérateur linéaire fermé dans X et $D(A)$ le domaine de A est dense dans X .

Proposition 1.4.7. Soient $(T(t))_{t \geq 0}$ et $(S(t))_{t \geq 0}$, deux C_0 -semi-groupes ayant le même générateur infinitésimal A . Alors

$$\forall t \geq 0, T(t) = S(t).$$

Théorème 1.4.8 (Hille-Yosida).

Soit A un opérateur linéaire de domaine $D(A)$. A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction $(T(t))_{t \geq 0}$ sur X si et seulement si

1. A est fermé et $\overline{D(A)} = X$,
2. $\mathbb{R}^+ \subset \rho(A)$ et pour tout $\lambda > 0$, on a $\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}$.

Théorème 1.4.9 (Feller-Miyadera-Phillips).

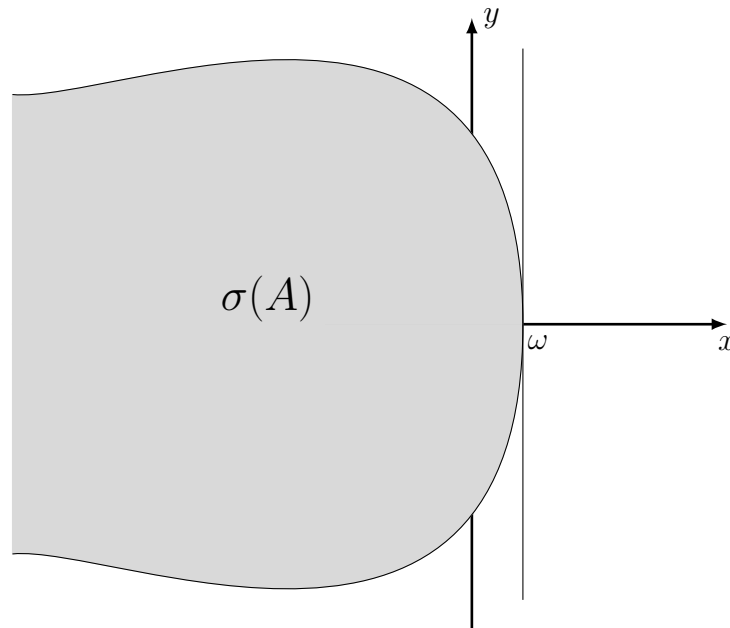
Soient $M \geq 1$ et $\omega \in \mathbb{R}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ satisfaisant

$$\forall t \geq 0, \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t},$$

2. A est un opérateur linéaire fermé à domaine dense dans X satisfaisant

$$]\omega, +\infty[\subset \rho(A) \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in]\omega, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}^*, \|(A - \lambda I)^{-n}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}.$$



A génère un semi-groupe fortement continu donc son spectre $\sigma(A)$ est dans un demi-plan.

Proposition 1.4.10. Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ un C_0 -semi-groupe satisfaisant

$$\exists M \geq 1, \exists \omega \in \mathbb{R} : \forall t \geq 0, \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{\omega t}.$$

Alors A , le générateur infinitésimal de $(T(t))_{t \geq 0}$, vérifie

1. A est fermé et $\overline{D(A)} = X$,
2. $P_\omega := \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\lambda) > \omega\} \subset \rho(A)$,
3. $\forall \lambda \in P_\omega, \forall n \in \mathbb{N}^*, \|(A - \lambda I)^{-n}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}(\lambda) - \omega)^n}.$

Proposition 1.4.11. Soient A le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe sur X et B un opérateur linéaire borné. Alors $A + B$ génère un C_0 -semi-groupe sur X .

1.4.3 Semi-groupes analytiques

On présente ici une théorie des semi-groupes analytiques généralisés au sens où le semi-groupe n'est pas supposé fortement continu. On se réfère principalement à E. Sinestrari [41] et A. Lunardi [30].

Définition 1.4.12. On dit que $(T(t))_{t \geq 0}$ est un semi-groupe analytique sur X si et seulement si

1. $\forall t \geq 0, T(t) \in \mathcal{L}(X)$,
2. $T(0) = I$ et pour $s, t \geq 0, T(t + s) = T(t)T(s)$,
3. $t \mapsto T(t)$ est analytique de $]0, +\infty[$ vers $\mathcal{L}(X)$.

Définition 1.4.13. Soient $\omega \in \mathbb{R}$ et $\theta \in]\pi/2, \pi[$. On note $\Sigma(X, \theta, \omega)$ l'ensemble des opérateurs linéaires fermés A sur X tels que

$$\begin{cases} S_{\theta, \omega} \subset \rho(A) \\ \sup_{\lambda \in S_{\theta, \omega}} \|(\lambda - \omega)R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty, \end{cases}$$

où $S_{\theta, \omega} = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \omega : \arg(\lambda - \omega) < \theta\}$.

Dans le livre de A. Lunardi [30], ces opérateurs sont appelés opérateurs sectoriels; cette notion de sectorialité ne correspond pas exactement à la Définition 1.1.29 donnée à la Section 1.1.4.

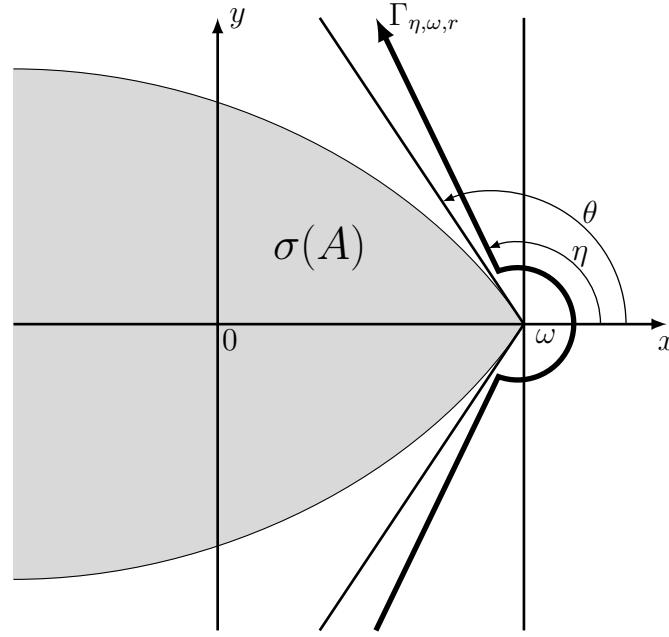
Définition 1.4.14. Soient $\omega \in \mathbb{R}, \theta \in]\pi/2, \pi[$ et $A \in \Sigma(X, \theta, \omega)$. On pose

$$e^{0A} = I,$$

et

$$e^{tA} = \int_{\Gamma_{\eta, \omega, r}} e^{t\lambda} R(\lambda, A) d\lambda, \quad t > 0,$$

où $\theta > \eta > \pi/2, r > 0$ et $\Gamma_{\eta, \omega, r}$ est le bord négativement orienté de $S_{\eta, \omega} \setminus B(\omega, r)$.



Remarque 1.4.15. Dans la définition précédente, l'intégrale ne dépend pas du η choisi dans $]\pi/2, \theta[$ ni de $r > 0$.

Proposition 1.4.16. Soient $\omega \in \mathbb{R}$, $\theta \in]\pi/2, \pi[$ et $A \in \Sigma(X, \theta, \omega)$. Alors,

1. $(e^{tA})_{t \geq 0}$ est un semi-groupe analytique.
2. Le générateur infinitésimal de $(e^{tA})_{t \geq 0}$ est A_0 , l'opérateur linéaire sur X , caractérisé par

$$\begin{cases} D(A_0) &= \{x \in D(A) : Ax \in \overline{D(A)}\} \\ A_0 x &= Ax, \quad x \in D(A_0). \end{cases}$$

Notons que si $\overline{D(A)} = X$, alors $A_0 = A$.

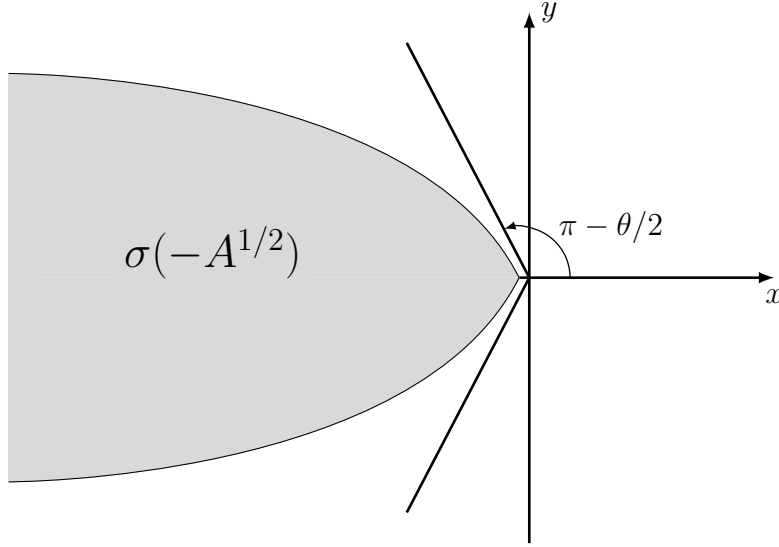
3. Pour $k \in \mathbb{N}$, il existe M_k tels que

$$\|t^k (A - \omega I)^k e^{tA}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_k e^{\omega t}, \quad t > 0.$$

En particulier, si $\omega = 0$, on obtient pour $k = 0$: $\|e^{tA}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_0$, pour tout $t > 0$. On dit alors que le semi-groupe analytique est borné.

4. $\lim_{t \rightarrow 0^+} e^{tA} x = x \iff x \in \overline{D(A)}$. Donc $(e^{tA})_{t \geq 0}$ est un semi-groupe analytique fortement continu si et seulement si $\overline{D(A)} = X$.
5. $e^{tA} x \in D(A^k)$ pour chaque $t > 0$, $x \in X$, $k \in \mathbb{N}$.

Proposition 1.4.17. Soient $\theta \in [0, \pi[$ et $A \in \text{Sect}(\theta)$, alors $A^{1/2} \in \text{Sect}(\theta/2)$ et $-A^{1/2}$ génère un semi-groupe analytique borné.



Ici $A^{1/2}$ est sectoriel d'angle $\theta/2$ avec $\theta > 0$.

$-A^{1/2}$ génère un semi-groupe analytique et $\sigma(-A^{1/2})$ est à l'extérieur du secteur d'angle $\pi - \theta$.

Proposition 1.4.18. *Si $A \in \Sigma(X, \theta, \omega)$, alors pour tout $t \geq 0$, $(e^{tA})_{t \geq 0}$ est injectif.*

Proposition 1.4.19. *Si $A \in \Sigma(X, \theta, \omega)$, alors $e^{0A} = I$ est bijectif. De plus, les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. $\forall t > 0$, e^{tA} est bijectif.
2. $\exists t_0 > 0$, $e^{t_0 A}$ est bijectif.
3. $A \in \mathcal{L}(X)$.

Démonstration. Il est évident que 1. entraîne 2. Si 2. est vérifié, alors pour tout $x \in X$, on a

$$x = e^{t_0 A} (e^{t_0 A})^{-1} x \in D(A),$$

donc $D(A) = X$ et puisque A est fermé, on en déduit 3.

Enfin, si 3. est vrai, alors pour tout $t > 0$, on obtient

$$e^{t(-A)} e^{tA} = e^{tA} e^{t(-A)} = I.$$

D'où 1. □

1.5 Sommes d'opérateurs

Afin d'utiliser certains résultats sur les opérateurs, les espaces de Banach sont insuffisants. On utilisera les espaces UMD (Unconditional Martingale Differences) construits à partir de la théorie des martingales à valeurs vectorielles. On donne dans cette section plusieurs définitions équivalentes à la notion d'espaces UMD qui caractérisent les propriétés géométriques de ces espaces. Les définitions et résultats énoncés ici sont issus de W. Arendt, S. Bu et M. Haase [2], J. Bourgain [4], D. L. Burkholder [5], G. Dore et A. Venni [12] et [13], J. Prüss [36] et J. Prüss et H. Sohr [38].

Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach Complexe.

Définition 1.5.1. Soient $\varepsilon \in]0, 1[$ et $p \in]1, +\infty[$. On définit l'opérateur $H_\varepsilon \in \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}, X))$ par

$$\forall f \in L^p(\mathbb{R}, X), \quad (H_\varepsilon f)(x) := \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon < |s| < \frac{1}{\varepsilon}} \frac{f(x-s)}{s} ds, \quad p.p. x \in \mathbb{R}.$$

Soit $f \in L^p(\mathbb{R}, X)$. Si

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} H_\varepsilon f \text{ existe dans } L^p(\mathbb{R}, X),$$

alors cette limite est notée Hf et est appelée la transformée de Hilbert de f sur $L^p(\mathbb{R}, X)$.

Définition 1.5.2. On dit que X est un espace $\mathcal{HT}$ si et seulement si il existe $p \in]1, +\infty[$ et ainsi pour tout p , la transformée de Hilbert Hf est un opérateur borné de $L^p(\mathbb{R}, X)$ dans $L^p(\mathbb{R}, X)$.

Dans ce cas,

$$\begin{aligned} H : L^p(\mathbb{R}, X) &\longrightarrow L^p(\mathbb{R}, X) \\ f &\longmapsto Hf = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} H_\varepsilon f, \end{aligned}$$

est continue de $L^p(\mathbb{R}, X)$ dans $L^p(\mathbb{R}, X)$.

Définition 1.5.3. On dit que X est ζ -convexe s'il existe une fonction $\zeta : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

1. $\zeta(0, 0) > 0$,
2. $\forall x, y \in X$, $\zeta(x, \cdot)$ et $\zeta(\cdot, y)$ sont convexes sur X ,
3. $\forall x, y \in X$, $\zeta(x, y) \leq \|x + y\|$ avec $\|x\| = \|y\| = 1$.

Théorème 1.5.4. Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1. X est un espace UMD.
2. X est un espace ζ -convexe.
3. X est un espace $\mathcal{HT}$.

Proposition 1.5.5. Soient Ω un espace mesuré σ -fini et $p \in]1, +\infty[$. Alors

1. Tout espace UMD est réflexif.
2. Tout espace de Hilbert est un espace UMD.
3. Si X est un espace UMD, alors $L^p(\Omega, X)$ est un espace UMD.
4. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors $L^p(\Omega)$ est un espace UMD.
5. Tout sous-espace fermé d'un espace UMD est un espace UMD.
6. Tout espace isomorphe à un espace UMD est un espace UMD.

Remarque 1.5.6. Les espaces L^1 et L^∞ ne sont pas UMD car il ne sont pas réflexifs.

Théorème 1.5.7 (Prüss-Sohr [38]). Soient X un espace de Banach UMD, $A \in BIP(X, \theta_A)$ et $B \in BIP(X, \theta_B)$ tels que $\theta_A + \theta_B < \pi$ qui commutent au sens des résolvantes. On pose $\theta = \max(\theta_A, \theta_B)$ si $\theta_A \neq \theta_B$. Alors $A + B \in BIP(X, \theta)$.

De plus, si A ou B est inversible, alors $A + B$ est inversible.

Ce théorème a été démontré par G. Dore et A. Venni [12] en 1987, sous l'hypothèse supplémentaire que A et B soient tous les deux inversibles, puis généralisé sous la forme donnée ici par J. Prüss et H. Sohr [38].

Corollaire 1.5.8 (Prüss-Sohr [38]). *Sous les hypothèses du Théorème 1.5.7, on obtient que $A + B$ est injectif. De plus, $A(A + B)^{-1}$ et $B(A + B)^{-1}$, définis sur $\text{Im}(A + B)$, sont bornés et admettent une extension bornée sur tout X .*

Proposition 1.5.9. *Soient X un espace de Banach complexe UMD, $A \in \text{BIP}(X, \theta_A)$ et $B \in \text{BIP}(X, \theta_B)$ tels que $\theta_A + \theta_B < \pi$ qui commutent au sens des résolvantes. Alors AB est fermable et $\overline{AB} \in \text{BIP}(X, \theta_A + \theta_B)$ où $\overline{AB}$ est la fermeture de AB . De plus, si A est inversible, alors AB est fermé.*

Théorème 1.5.10 (Arendt-Bu-Haase, [2]). *Soient $A \in \text{BIP}(X, \theta)$ avec $0 \in \rho(A)$ et $B \in \mathcal{L}(X)$ tel que $A + B$ soit sectoriel et $0 \in \rho(A + B)$. Alors $A + B \in \text{BIP}(X, \theta)$.*

1.6 Espaces d'interpolation

Les définitions et résultats de cette section sont issues de P. Grisvard [22], J.-L. Lions et J. Peetre [29] et H. Triebel [43].

1.6.1 Espaces intermédiaires

Soient X_0 et X_1 , deux espaces de Banach, tous deux contenus dans un même espace vectoriel topologique séparé X , où les $X_i \hookrightarrow X$ ($i = 0, 1$) sont des inclusions avec injections continues. On considère les espaces $X_0 \cap X_1$ et $X_0 + X_1 := \{\varphi \in X : \exists \varphi_0 \in X_0 \text{ et } \exists \varphi_1 \in X_1, \varphi = \varphi_0 + \varphi_1\}$ munis des normes respectives

$$\|\varphi\|_{X_0 \cap X_1} := \max(\|\varphi\|_{X_0}, \|\varphi\|_{X_1}),$$

et

$$\|\varphi\|_{X_0 + X_1} := \inf(\|\varphi_0\|_{X_0} + \|\varphi_1\|_{X_1}), \varphi = \varphi_0 + \varphi_1, \text{ où } \varphi_0 \in X_0 \text{ et } \varphi_1 \in X_1.$$

Ces espaces sont des espaces de Banach. Pour $i = 0, 1$, on a :

$$X_0 \cap X_1 \hookrightarrow X_i \hookrightarrow X_0 + X_1.$$

Définition 1.6.1. On appelle espace intermédiaire (entre X_0 et X_1) tout espace vectoriel topologique localement convexe séparé A tel que

$$X_0 \cap X_1 \hookrightarrow A \hookrightarrow X_0 + X_1$$

où, les injections sont continues.

Avec cette définition, les espaces X_i ($i = 0, 1$) eux-mêmes sont des espaces intermédiaires. On va dans la suite considérer uniquement certaines familles d'espaces intermédiaires formées d'espaces de Banach.

1.6.2 Espaces de moyenne

Définition 1.6.2. On définit, pour $p \in [1, +\infty[$, l'espace de Banach

$$L_*^p(\mathbb{R}^+; X) := \left\{ f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow X \text{ fortement mesurable, } \int_0^{+\infty} \|f(t)\|^p \frac{dt}{t} < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L_*^p(\mathbb{R}^+; X)} := \left(\int_0^{+\infty} \|f(t)\|^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p}.$$

Définition 1.6.3. On appelle espace de moyenne (ou espace d'interpolation réel) entre X_0 et X_1 , l'espace de Banach $(X_0, X_1)_{\theta, p}$ défini par

$$\varphi \in (X_0, X_1)_{\theta, p} \iff \begin{cases} \forall t > 0, \exists \varphi_0(t) \in X_0, \exists \varphi_1(t) \in X_1 : \varphi = \varphi_0(t) + \varphi_1(t), \\ t^{-\theta} \varphi_0 \in L_*^p(\mathbb{R}^+; X_0), t^{1-\theta} \varphi_1 \in L_*^p(\mathbb{R}^+; X_1), \end{cases}$$

muni de la norme

$$\|\varphi\|_{\theta, p} := \inf_{\substack{\varphi_i : \mathbb{R}^+ \longrightarrow X, i = 0, 1 : \\ \forall t > 0, \varphi_0(t) + \varphi_1(t) = \varphi}} \left(\|t^{-\theta} \varphi_0\|_{L_*^p(\mathbb{R}^+; X_0)} + \|t^{1-\theta} \varphi_1\|_{L_*^p(\mathbb{R}^+; X_1)} \right).$$

De plus, on a

$$X_0 \cap X_1 \hookrightarrow (X_0, X_1)_{\theta, p} \hookrightarrow X_0 + X_1,$$

avec injections continues.

Proposition 1.6.4. Soient $p \in [1, +\infty[$ et $\theta \in]0, 1[$. Alors

$$(X_0, X_1)_{\theta, p} = (X_1, X_0)_{1-\theta, p}.$$

1.6.3 Interpolation et domaine d'opérateurs

Soit A un opérateur linéaire, avec $D(A) \subset X$ son domaine, satisfaisant

$$]0, +\infty[\subset \rho(A) \quad \text{et} \quad \exists C > 0 : \forall t > 0, \quad \|t(A - tI)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C.$$

Cela signifie que $-A \in \text{Sect}(\omega_A)$, avec $\omega_A \in [0, \pi[$, sur l'espace de Banach X .

Proposition 1.6.5. Pour $\theta \in]0, 1[$, on a

$$(X, D(A))_{\theta, p} := \left\{ \varphi \in X : t^\theta A(tI + A)^{-1} \varphi \in L_*^p(\mathbb{R}^+; X) \right\}.$$

Définition 1.6.6. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $\theta \in]0, 1[$. On définit les espaces d'interpolation réels suivants :

$$(D(A), X)_{k+\theta, q} := \left\{ \varphi \in D(A^k) : A^k \varphi \in (D(A), X)_{\theta, q} \right\}$$

et

$$(X, D(A))_{k+\theta, q} := \left\{ \psi \in D(A^k) : A^k \psi \in (X, D(A))_{\theta, q} \right\}.$$

Théorème 1.6.7 (Densité). Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\alpha < \beta$. Alors l'espace $D(A^\beta)$ est dense dans $(X, D(A^\alpha))_{\theta, p}$, où $\theta \in]0, 1[$ et $p \in [1, +\infty[$.

Théorème 1.6.8 (Réitération). Soient $p \in [1, +\infty[$, $\theta \in]0, 1[$, $k \in \mathbb{N}$ tels que $k\theta \notin \mathbb{N}$. On a alors :

$$(X, D(A^k))_{\theta, p} = (X, D(A))_{k\theta, p}.$$

Corollaire 1.6.9. Soient $p \in [1, +\infty[$, $\theta \in]0, 1[$, $k \in \mathbb{N}$ tels que $k\theta \notin \mathbb{N}$. On a alors :

$$(D(A^k), X)_{\theta, p} = (X, D(A^k))_{1-\theta, p} = (X, D(A))_{k-k\theta, p}.$$

Notons que A^k est fermé pour $k \in \mathbb{N}^*$ puisque A est fermé. Par conséquent, $D(A^k)$ est un espace de Banach muni de la norme du graphe et on peut considérer $(D(A^k), X)_{\theta, q} = (X, D(A^k))_{1-\theta, q}$.

Lemme 1.6.10. Soient $\theta, \theta' \in]0, 1[$, $k, n, m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [1, +\infty]$. On a

i) Si $n \neq 0$ et $\frac{k\theta}{n} \notin \mathbb{N}$, alors $(X, D(A^k))_{\theta,p} = (X, D(A^n))_{\frac{k\theta}{n},p}$.

ii) Si $n \leq k \leq m$, alors

$$(D(A^k), D(A^n))_{\theta,p} = (D(A^m), X)_{\tau,p},$$

où τ satisfait $k(1 - \theta) + n\theta = m(1 - \tau)$.

iii) Si $k\theta' < 1$, alors $(D(A^k), X)_{\theta',p} \subset D(A^{k-1})$.

Pour le point i), voir A. Lunardi [30], (2.1.13), p. 43. Pour ii), voir P. Grisvard [22], p. 676, Teorema 6. Pour iii), on applique ii) avec $n = k - 1$, $m = k$ et $\theta = k\theta' \in]0, 1[$, alors

$$(D(A^k), D(A^{k-1}))_{k\theta',p} = (D(A^k), X)_{\theta',p},$$

qui donne $(D(A^k), X)_{\theta',p} \subset D(A^{k-1})$. Cette inclusion peut aussi être trouvée en écrivant

$$\begin{aligned} (D(A^k), X)_{\theta',p} &= (X, D(A^k))_{1-\theta',p} = (X, D(A))_{k-k\theta',p} \\ &= (X, D(A))_{(k-1)+(1-k\theta'),p} = (D(A), X)_{(k-1)+k\theta',p} \subset D(A^{k-1}). \end{aligned}$$

Lemme 1.6.11. Soit u telle que

$$u \in W^{n,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(A^k)),$$

où $n, k \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]1, +\infty[$. Alors pour $j \in \mathbb{N}$ satisfaisant la condition de Poulsen $0 < \frac{1}{p} + j < n$ et $s \in [a, b]$, on a

$$u^{(j)}(s) \in (D(A^k), X)_{\frac{j}{n} + \frac{1}{np}, p}.$$

Ce résultat est prouvé dans P. Grisvard [22], p. 678, Teorema 2'.

Lemme 1.6.12 (Triebel [43]). Soient $\varphi \in X$ et T le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique borné sur X . Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $x \mapsto T^n e^{(x-a)T} \varphi \in L^p(a, b; X)$,
2. $\varphi \in (D(T^n), X)_{\frac{1}{np}, p}$.

Corollaire 1.6.13. Soient $\varphi \in X$ et T le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique borné sur X . Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $x \mapsto T^n e^{(x-a)T} \varphi \in L^p(a, b; X)$,
2. $x \mapsto e^{(x-a)T} \varphi \in W^{n,p}(a, b; X)$,
3. $\varphi \in (D(T), X)_{n-1+\frac{1}{p}, p}$.

1.7 Problème de Cauchy

Afin d'étudier des problèmes aux limites, on aura besoin de résoudre des problèmes de Cauchy opérationnels d'ordre 1. Il s'agit d'une classe de problèmes caractérisée par une équation différentielle faisant intervenir un opérateur linéaire en général non borné et une condition initiale. On ne présentera que quelques résultats que l'on ne démontrera pas. On renvoie aux ouvrages de références, comme ceux de A. Pazy [35] et I. I. Vrabie [44], pour plus de détails.

Soit A un opérateur linéaire fermé sur X un espace de Banach complexe et $f \in L^p(a, b; X)$ où $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $p \in]1, +\infty[$. On considère le problème de Cauchy opérationnel

$$(PC) \begin{cases} u'(x) &= Au(x) + f(x), & x \in]a, b[, \\ u(a) &= \varphi, \end{cases}$$

où $\varphi \in X$.

1.7.1 Définitions générales

Définition 1.7.1. On appelle solution classique (dans $L^p(a, b; X)$) du problème de Cauchy (PC), une solution u de l'équation

$$u'(x) = Au(x) + f(x), \quad x \in]a, b[,$$

qui vérifie $u(a) = \varphi$ et qui a la régularité suivante

$$u \in W^{1,p}(a, b; X) \quad \text{et} \quad x \mapsto Au(x) \in L^p(a, b; X).$$

On peut généraliser cette définition en l'étendant à des problèmes de Cauchy ou des problèmes aux limites d'ordre n .

Définition 1.7.2. Soit $A_0, \dots, A_{n-1}$ des opérateurs linéaires sur X , on rappelle que u est une solution classique (dans $L^p(a, b; X)$) d'une équation différentielle

$$u^{(n)}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} A_j u^{(j)}(x) = f(x), \quad x \in]a, b[, \quad (1.1)$$

si u est une solution de (1.1) ayant la régularité suivante

$$u \in W^{n,p}(a, b; X) \quad \text{et} \quad x \mapsto A_j u^{(j)}(x) \in L^p(a, b; X), \quad j = 0, \dots, n-1.$$

Similairement, u est une solution classique du problème (1.1)-(CB), où (CB) sont des conditions aux bords, si u est une solution classique de (1.1) et vérifie (CB).

1.7.2 Problème de Cauchy inhomogène

On suppose ici que A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $(e^{tA})_{t \geq 0}$.

Proposition 1.7.3 (Principe de Duhamel). *Si (PC) admet une solution classique u (dans $L^p(a, b; X)$), alors cette solution est unique et donnée par*

$$u(x) = e^{xA}\varphi + \int_a^x e^{(x-s)A}f(s) \, ds \quad x \in]a, b[. \quad (1.2)$$

En utilisant le Théorème 1.5.7, on obtient :

Théorème 1.7.4 (Dore-Venni, [12]). *Soient X un espace UMD et $-A \in BIP(X, \theta_A)$ inversible avec $\theta_A \in [0, \pi/2[$. Alors, pour tout $f \in L^p(a, b; X)$, avec $1 < p < +\infty$, le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} u'(x) &= Au(x) + f(x), & x \in [a, b] \\ u(a) &= 0, \end{cases}$$

a une unique solution $u \in W^{1,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(A))$. De plus, u , u' et Au dépendent continûment de f dans L^p .

De plus, pour presque tout $x \in]a, b[$, on a

$$\int_a^x e^{(x-s)A}f(s) \, ds \in D(A) \quad \text{et} \quad \int_x^b e^{(s-x)A}f(s) \, ds \in D(A).$$

De plus,

$$x \mapsto A \int_a^x e^{(x-s)A}f(s) \, ds \in L^p(a, b; X) \quad \text{et} \quad x \mapsto A \int_x^b e^{(s-x)A}f(s) \, ds \in L^p(a, b; X).$$

En combinant ce dernier résultat avec le Lemme 1.6.12, on obtient le résultat suivant d'existence et d'unicité pour le problème (PC) :

Théorème 1.7.5. *Soient X un espace UMD et $-A \in BIP(X, \theta_A)$ inversible avec $\theta_A \in [0, \pi/2[$. Alors, pour tout $f \in L^p(a, b; X)$, avec $1 < p < +\infty$, le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} u'(x) &= Au(x) + f(x), & x \in [a, b] \\ u(a) &= \varphi, \end{cases}$$

où $\varphi \in X$, a une unique solution $u \in W^{1,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(A))$ si et seulement si

$$\varphi \in (D(A), X)_{\frac{1}{p}, p}.$$

Chapitre 2

L'équation biharmonique dans un habitat

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudie, avec diverses conditions aux limites, l'équation

$$\Delta^2 u = f \quad \text{sur } \Omega, \quad (2.1)$$

sur un ouvert cylindrique borné $\Omega :=]a, b[\times \omega$ de $\mathbb{R}^d$, avec $\omega \subset \mathbb{R}^{d-1}$ un ouvert borné de classe C^2 et $f \in L^p(\Omega)$, $p \in]1, +\infty[$. Notons que dans le chapitre suivant, on traitera, dans le même contexte l'équation

$$\Delta^2 u - r\Delta u = f \quad \text{sur } \Omega,$$

avec $r \in \mathbb{R}^*$, néanmoins, le cas $r = 0$ étudié ici, bien qu'utilisant les mêmes méthodes, nécessite une étude spécifique.

On poursuit le travail de A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe et A. Yagi [19] pour les problèmes du second ordre que l'on adapte aux problèmes du quatrième ordre. A cette fin, on considère l'opérateur de Laplace A_0 dans $\mathbb{R}^{n-1}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, sur un espace de Banach $L^q(\omega)$, $q \in]1, +\infty[$, défini par

$$\begin{cases} D(A_0) := \{\psi \in W^{2,p}(\omega) : \psi = 0 \text{ sur } \partial\omega\} \\ \forall \psi \in D(A_0), \quad A_0\psi = \Delta_\omega \psi. \end{cases} \quad (2.2)$$

Ainsi, l'équation (2.1) peut être reformulée comme l'équation différentielle opérationnelle du quatrième ordre

$$u^{(4)}(x) + 2A_0 u''(x) + A_0^2 u(x) = f(x), \quad \text{pour } x \in]a, b[,$$

où $f \in L^p(a, b; L^q(\omega))$, $p \in]1, +\infty[$, avec $u(x) := u(x, \cdot)$ et $f(x) := f(x, \cdot)$. On va considérer une généralisation de cette équation, sous la forme

$$u^{(4)}(x) + 2A u''(x) + A^2 u(x) = f(x), \quad \text{pour } x \in]a, b[, \quad (2.3)$$

avec diverses conditions aux limites, où $(A, D(A))$ un opérateur BIP d'angle $\theta \in [0, \pi[$ sur un espace de Banach UMD noté X et $f \in L^p(a, b; X)$. Plus précisément, on étudie (2.3) sous l'une des conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} u(a) = \varphi_1, & u(b) = \varphi_2, \\ u''(a) = \varphi_3, & u''(b) = \varphi_4, \end{cases} \quad (\text{CB1})$$

$$\begin{cases} u'(a) = \varphi_1, & u'(b) = \varphi_2, \\ u''(a) + Au(a) = \varphi_3, & u''(b) + Au(b) = \varphi_4, \end{cases} \quad (\text{CB2})$$

$$\begin{cases} u(a) = \varphi_1, & u(b) = \varphi_2, \\ u'(a) = \varphi_3, & u'(b) = \varphi_4, \end{cases} \quad (\text{CB3})$$

$$\begin{cases} u'(a) = \varphi_1, & u'(b) = \varphi_2, \\ u''(a) = \varphi_3, & u''(b) = \varphi_4, \end{cases} \quad (\text{CB4})$$

$$\begin{cases} u(a) = \varphi_1, & u(b) = \varphi_2, \\ u''(a) + Au(a) = \varphi_3, & u''(b) + Au(b) = \varphi_4, \end{cases} \quad (\text{CB5})$$

où $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \in X$.

Dans chacun des cas, on obtient (voir Théorème 2.3.2, Théorème 2.3.3 et Théorème 2.4.2) l'existence et l'unicité d'une solution classique u (voir Définition 1.7.2) du problème (2.3)-(CBi), $i = 1, 2, 3, 4, 5$, si et seulement si $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ sont dans certains espaces d'interpolation réels.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante : dans la section 2.2, on détaille nos hypothèses sur l'espace X et l'opérateur A ; puis on effectue quelques remarques sur nos hypothèses. Dans la section 2.3, on établit tout d'abord l'existence et l'unicité de la solution de (2.3)-(CB1) dans le Théorème 2.3.2 et de (2.3)-(CB5) dans le Théorème 2.3.3. Cela nous permet d'établir dans la Proposition 2.3.4, une formule de représentation générale pour les solutions classiques. Puis, on établit un résultat sur la régularité de la différence de deux semi-groupes analytiques (Proposition 2.3.5) qui constitue un outil important pour prouver le résultat principal, le Théorème 2.4.2. Dans la section suivante, on démontre le Théorème 2.4.2 qui donne l'existence et l'unicité d'une solution classique u de (2.3) sous l'une des conditions aux limites (CB2), (CB3) ou (CB4). Dans la dernière section, on obtient le Corollaire 2.4.6 qui établit l'existence et l'unicité d'une solution u dans $W^{4,p}(\Omega)$ de (2.1).

2.2 Hypothèses

Dans tout le chapitre, $(X, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach complexe et A désigne un opérateur linéaire sur X un espace de Banach complexe. Une partie des résultats de ce chapitre utilise le célèbre Théorème de Dore-Venni (voir Théorème 1.7.4 du Chapitre 1 ou l'article [12]) et sa généralisation due à J. Prüss et H. Sohr (voir le Théorème 1.5.7 du Chapitre 1 ou l'article [38]), qui nécessite de considérer un espace X de type UMD. (voir Théorème 1.5.4 du Chapitre 1).

On cherche une solution classique du problème (2.3)-(CBi), $i = 1, 2, 3, 4$; c'est-à-dire une solution u de (2.3)-(CBi) telle que :

$$u \in W^{4,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(A^2)) \quad \text{et} \quad u'' \in L^p(a, b; D(A)).$$

Afin de construire une telle solution avec uniquement $f \in L^p(a, b; X)$, on suppose que :

- (H₁) X est un espace UMD,
- (H₂) $0 \in \rho(A)$,
- (H₃) $-A \in \text{BIP}(X, \theta_A)$ pour un $\theta_A \in [0, \pi[$.

Certains de nos résultats nécessiteront une hypothèse supplémentaire :

$$(H_4) \quad \sigma(A) \subset]-\infty, 0[\quad \text{et} \quad \forall \theta \in]0, \pi[, \quad \sup_{\lambda \in S_\theta} \|\lambda(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty,$$

qui signifie que $-A$ est un opérateur sectoriel d'angle 0 (voir Définition 1.1.29).

La remarque suivante donne quelques propriétés qui sont des conséquences immédiates des hypothèses.

Remarque 2.2.1.

1. Notons que A_0 vérifie toutes les hypothèses précédente avec $X = L^q(\omega)$, $q \in]1, +\infty[$.
2. Un cas similaire a été traité dans A. Favini, R. Labbas, K. Lemrabet, S. Maingot et H. Sidibé [16] avec des conditions aux bords particulières ce qui rend cette étude différente de la notre.
3. Pour résoudre (2.3) dans le cas scalaire (avec $-A > 0$), il est nécessaire d'introduire les racines $\sqrt{-A}$ et $-\sqrt{-A}$ du polynôme caractéristique

$$X^4 + 2AX^2 + A^2 = 0,$$

c'est pourquoi, dans notre cas opérationnel, on considère l'opérateur

$$M := -\sqrt{-A}.$$

Grâce à (H_3) , l'opérateur $-A$ est un opérateur sectoriel, ainsi l'existence de M est assurée (voir M. Haase [23]).

4. D'après (H_2) on en déduit que $0 \in \rho(M)$ (voir M. Haase [23], Proposition 3.3.1, e), p. 62).
5. D'après M. Haase [23], Proposition 3.2.1, e), p. 71 et (H_3) , on en déduit que

$$-M \in \text{BIP}(X, \theta_A/2).$$

Puisque $0 \leq \theta_A/2 < \pi/2$, alors d'après J. Prüss et H. Sohr [38], Theorem 2, p. 437, l'opérateur M génère un semi-groupe analytique borné, $(e^{xM})_{x \geq 0}$.

Dans la section suivante, on établit trois résultats préliminaires. Le premier résultat nous donne l'existence et l'unicité d'une solution classique au problème (2.3)-(CB1). Le second résultat nous fournit une formule de représentation explicite de la solution. Enfin le dernier résultat analyse la régularité de cette représentation en fonction des données et caractérise l'existence d'une solution classique.

2.3 Résultats préliminaires

Soit $u \in W^{4,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(M^4))$. Alors, d'après le Lemme 1.6.11, pour $s \in [a, b]$, on obtient que

$$u(s) \in (D(M^4), X)_{\frac{1}{4p}, p}, \quad u'(s) \in (D(M^4), X)_{\frac{1}{4} + \frac{1}{4p}, p} \quad \text{et} \quad u''(s) \in (D(M^4), X)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{4p}, p},$$

ce qui entraîne, grâce au Corollaire 1.6.9, que

$$u(s) \in (D(M), X)_{3 + \frac{1}{p}, p}, \quad u'(s) \in (D(M), X)_{2 + \frac{1}{p}, p} \quad \text{et} \quad u''(s) \in (D(M), X)_{1 + \frac{1}{p}, p}. \quad (2.4)$$

Par le même raisonnement, on obtient les égalités suivantes :

$$\begin{cases} (D(M), X)_{3+\frac{1}{p}, p} = (D(A), X)_{1+\frac{1}{2p}, p}, \\ (D(M), X)_{2+\frac{1}{p}, p} = (D(A), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p}, \\ (D(M), X)_{1+\frac{1}{p}, p} = (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}, \\ (D(M), X)_{\frac{1}{p}, p} = (D(A), X)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p} \end{cases} \quad (2.5)$$

Pour l'espace $(D(A), X)_{\theta, q}$ avec $\theta > 1$, on renvoie à la Définition 1.6.6.

2.3.1 Solution particulière

On commence par énoncer une remarque très utile qui justifie l'existence d'inverse utilisé dans suite.

Remarque 2.3.1. Si T est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique borné, tel que $0 \in \rho(T)$, alors

$$\forall s > 0, \quad 0 \in \rho(I \pm e^{sT}).$$

En effet, d'après A. Pazy [35], p. 70, on a :

$$\exists \delta > 0, \exists M \geq 1, \forall t \geq 0 : \|e^{tT}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{-t\delta}.$$

De ce fait, pour $s > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\|e^{n_0 s T}\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$. Donc $0 \in \rho(I - (e^{sT})^{n_0})$ ce qui implique que $0 \in \rho(I - e^{sT})$, car

$$(I - e^{sT}) \left(I + \sum_{j=1}^{n_0-1} e^{jsT} \right) = I - e^{n_0 s T},$$

donc, en posant $S = \left(I + \sum_{j=1}^{n_0-1} e^{jsT} \right) (I - e^{n_0 s T})^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, on a

$$(I - e^{sT}) S = I,$$

on obtient de même $S(I - e^{sT}) = I$.

On vient de montrer que pour tout $s > 0$, $0 \in \rho(I - e^{sT})$. On en déduit que pour tout $s > 0$, $0 \in \rho(I + e^{sT})$ car

$$I + e^{sT} = (I - e^{2sT}) (I - e^{sT})^{-1}.$$

On résout le problème (2.3)-(CB1) dont les conditions aux limites sont bien adaptées à l'équation et qui peut être facilement traité en considérant deux problèmes du second ordre.

Théorème 2.3.2. Soit $f \in L^p(a, b; X)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $p \in]1, +\infty[$. On suppose que (H_1) , (H_2) et (H_3) sont vérifiées. Alors, il existe une unique solution classique u de (2.3)-(CB1) si et seulement si

$$\varphi_1, \varphi_2 \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2p}, p} \quad \text{et} \quad \varphi_3, \varphi_4 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}.$$

Cette unique solution classique est notée $F_{\Phi,f}$ avec $\Phi := (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ et est explicitement décrite par

$$\begin{aligned}
 F_{\Phi,f}(x) &= e^{(x-a)M} Z \varphi_1 + e^{(b-x)M} Z \varphi_2 \\
 &\quad - \frac{1}{2} e^{(x-a)M} Z M^{-1} \int_a^b e^{(s-a)M} v_0(s) \, ds - \frac{1}{2} e^{(b-x)M} Z M^{-1} \int_a^b e^{(b-s)M} v_0(s) \, ds \\
 &\quad + \frac{1}{2} M^{-1} \int_a^x e^{(x-s)M} v_0(s) \, ds + \frac{1}{2} M^{-1} \int_x^b e^{(s-x)M} v_0(s) \, ds \\
 &\quad - e^{(b-x)M} e^{(b-a)M} \varphi_1 - e^{(x-a)M} e^{(b-a)M} \varphi_2 \\
 &\quad + \frac{1}{2} e^{(x-a)M} Z e^{(b-a)M} M^{-1} \int_a^b e^{(b-s)M} v_0(s) \, ds \\
 &\quad + \frac{1}{2} e^{(b-x)M} Z e^{(b-a)M} M^{-1} \int_a^b e^{(s-a)M} v_0(s) \, ds, \quad x \in [a, b],
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

où

$$\begin{aligned}
 v_0(x) &:= e^{(x-a)M} Z (\varphi_3 + A \varphi_1) + e^{(b-x)M} Z (\varphi_4 + A \varphi_2) \\
 &\quad - \frac{1}{2} e^{(x-a)M} Z M^{-1} \int_a^b e^{(s-a)M} f(s) \, ds - \frac{1}{2} e^{(b-x)M} Z M^{-1} \int_a^b e^{(b-s)M} f(s) \, ds \\
 &\quad + \frac{1}{2} M^{-1} \int_a^x e^{(x-s)M} f(s) \, ds + \frac{1}{2} M^{-1} \int_x^b e^{(s-x)M} f(s) \, ds \\
 &\quad - e^{(b-x)M} e^{(b-a)M} (\varphi_3 + A \varphi_1) - e^{(x-a)M} e^{(b-a)M} (\varphi_4 + A \varphi_2) \\
 &\quad + \frac{1}{2} e^{(x-a)M} Z e^{(b-a)M} M^{-1} \int_a^b e^{(b-s)M} f(s) \, ds \\
 &\quad + \frac{1}{2} e^{(b-x)M} Z e^{(b-a)M} M^{-1} \int_a^b e^{(s-a)M} f(s) \, ds, \quad x \in [a, b],
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

et $Z := (I - e^{2(b-a)M})^{-1}$.

L'existence de Z est prouvée grâce à la Remarque 2.3.1, pour $T := M$.

Démonstration. Soient $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \in X$ tels que

$$\varphi_1, \varphi_2 \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2p}, p} \quad \text{et} \quad \varphi_3, \varphi_4 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}. \tag{2.8}$$

D'après (2.8), il existe (voir A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe et A. Yagi [19], Theorem 5, p. 173) une unique solution classique

$$v_0 \in W^{2,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(A)),$$

de

$$\begin{cases} v''(x) + Av(x) &= f(x), & p.p. \, x \in]a, b[\\ v(a) &= \varphi_3 + A \varphi_1 \\ v(b) &= \varphi_4 + A \varphi_2. \end{cases} \tag{2.9}$$

Ainsi, puisque $\varphi_1, \varphi_2 \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2p}, p} \subset (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}$, il existe une unique solution classique

$$u_0 \in W^{2,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(A)),$$

de

$$\begin{cases} u''(x) + Au(x) &= v_0(x), \quad p.p. x \in]a, b[\\ u(a) &= \varphi_1 \\ u(b) &= \varphi_2. \end{cases} \quad (2.10)$$

Par un calcul simple, on montre que u_0 satisfait (2.3)-(CB1). Puisque

$$v_0(x) = u''(x) + Au(x), \quad p.p. x \in]a, b[,$$

alors, on a

$$\begin{aligned} v_0''(x) + Av_0(x) &= (u''(x) + Au(x))'' + A(u''(x) + Au(x)) \\ &= u^{(4)}(x) + Au''(x) + Au''(x) + A^2u(x) \\ &= u^{(4)}(x) + 2Au''(x) + A^2u(x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

De même, on a

$$\varphi_3 + A\varphi_1 = v_0(a) = u''(a) + Au(a) = u''(a) + A\varphi_1,$$

d'où $u''(a) = \varphi_3$ et

$$\varphi_4 + A\varphi_2 = v_0(b) = u''(b) + Au(b) = u''(b) + A\varphi_2,$$

ainsi, $u''(b) = \varphi_4$. Il reste à montrer que u_0 a la régularité attendue.

Soit $w_0 \in W^{2,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(A))$ l'unique solution classique de

$$\begin{cases} w''(x) + Aw(x) &= Av_0(x), \quad p.p. x \in]a, b[\\ w(a) &= A\varphi_1 \\ w(b) &= A\varphi_2. \end{cases}$$

Alors $A^{-1}w_0$ est une solution classique de (2.10). Par unicité de la solution, on obtient

$$u_0 = A^{-1}w_0 \in L^p(a, b; D(A^2)).$$

De plus, d'après (2.10), on a

$$u_0'' = v_0 - Au_0 = v_0 - w_0 \in W^{2,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(A)).$$

D'où u_0 est une solution classique de (2.3)-(CB1). L'unicité est évidente puisque si u est une solution classique de (2.3)-(CB1) alors $v := u'' + Au$ est une solution classique de (2.9). Par unicité, $v = v_0$, donc u est une solution classique de (2.10). De même, par unicité, $u = u_0$.

Réciproquement, s'il existe une solution classique de (2.3)-(CB1), alors (2.8) est vérifié d'après (2.4).

La formule de représentation (2.6) de la solution classique $F_{\Phi, f}$ de (2.3)-(CB1) est obtenue de la manière suivante. Notons que

$$v_0 := F_{\Phi, f}'' + AF_{\Phi, f},$$

est la solution classique de (2.9), ainsi v_0 est donné par (2.7) (voir A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe et A. Yagi [19], p. 169-170). De ce fait, puisque $F_{\Phi, f}$ est la solution classique de (2.10), on utilise à nouveau A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe et A. Yagi [19] afin d'obtenir (2.6). $\square$

Le résultat concernant les conditions aux limites (CB1) peut être directement généralisé aux conditions aux limites (CB5) :

Théorème 2.3.3. *Soit $f \in L^p(a, b; X)$ avec $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ et $p \in]1, +\infty[$. On suppose que (H_1) , (H_2) et (H_3) soient vérifiées. Alors il existe une unique solution classique u de (2.3)-(CB5) si et seulement si*

$$\varphi_1, \varphi_2 \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2p}, p} \quad \text{et} \quad \varphi_3, \varphi_4 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}. \quad (2.11)$$

Dans ce cas l'unique solution est $u = F_{(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 - A\varphi_1, \varphi_4 - A\varphi_2), f}$.

Démonstration. Il suffit de noter que la condition (CB5) s'écrit

$$\begin{cases} u(a) = \varphi_1, & u(b) = \varphi_2, \\ u''(a) = \varphi_3 - A\varphi_1, & u''(b) = \varphi_4 - A\varphi_2. \end{cases}$$

Le Théorème 2.3.2 montre qu'il existe une unique solution classique au problème (2.3)-(CB5) si et seulement si

$$\varphi_1, \varphi_2 \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2p}, p} \quad \text{et} \quad \varphi_3 - A\varphi_1, \varphi_4 - A\varphi_2 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p},$$

ce qui équivaut à (2.11). □

2.3.2 Formule de représentation

Sous d'autres conditions aux limites, l'équation (2.3) est plus compliquée à étudier. On a alors besoin de deux résultats importants. Le premier est une formule de représentation de la solution classique de l'équation (2.3). Des formules de représentation similaire sont données dans A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, K. Lemrabet et H. Sidibé [17], Proposition 3, p. 5004.

Proposition 2.3.4. *Si u est une solution classique de (2.3), alors il existe $K_i \in X$, $i = 1, 2, 3, 4$, tel que pour tout $x \in [a, b]$*

$$u(x) = e^{(x-a)M} K_1 + (x-a)e^{(x-a)M} K_2 + e^{(b-x)M} K_3 + (b-x)e^{(b-x)M} K_4 + F_{0,f}(x), \quad (2.12)$$

où $F_{0,f}$ est définie dans le Théorème 2.3.2.

Démonstration. Supposons qu'il existe u , une solution de l'équation (2.3) telle que

$$u \in W^{4,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(A^2)) \quad \text{avec} \quad u'' \in L^p(a, b; D(A)).$$

D'après le Théorème 2.3.2, on peut prendre la solution classique $F_{0,f}$ de (2.3)-(CB1); i.e. qui vérifie

$$F_{0,f}(a) = F_{0,f}(b) = F_{0,f}''(a) = F_{0,f}''(b) = 0. \quad (2.13)$$

On pose $u_h := u - F_{0,f}$. Ainsi, u_h est une solution classique de

$$u_h^{(4)}(x) + 2Au_h''(x) + A^2u_h(x) = 0, \quad p.p. \ x \in]a, b[.$$

Puisque u et $F_{0,f}$ sont des solutions classiques de (2.3), alors u_h est aussi une solution classique de (2.3), d'où

$$u_h \in W^{4,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(A^2)) \quad \text{et} \quad u_h'' \in L^p(a, b; D(A)).$$

Chapitre 2. L'équation biharmonique dans un habitat

On cherche désormais à déterminer l'expression de u_h . Pour cela, on doit résoudre l'équation homogène suivante :

$$u_h^{(4)}(x) + 2Au_h''(x) + A^2u_h(x) = 0, \quad p.p. x \in]a, b[.$$

Pour tout $x \in]a, b[$, on note

$$v(x) = u_h''(x) + Au_h(x).$$

Puisque $u_h \in W^{4,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(A^2))$ avec $u_h'' \in L^p(a, b; D(A))$, on en déduit que

$$v \in W^{2,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(A)).$$

Ainsi, pour presque tout $x \in]a, b[$, on a

$$\begin{aligned} v''(x) + Av(x) &= (u_h''(x) + Au_h(x))'' + A(u_h''(x) + Au_h(x)) \\ &= u_h^{(4)}(x) + Au_h''(x) + Au_h''(x) + A^2u_h(x) \\ &= u_h^{(4)}(x) + 2Au_h''(x) + A^2u_h(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

On sait que, en utilisant les résultats de A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe et A. Yagi [19], on obtient que la solution v de l'équation homogène précédente s'écrit

$$v(x) = e^{(x-a)M}C_0 + e^{(b-x)M}C_1, \quad p.p. x \in]a, b[,$$

où $C_0, C_1 \in X$.

On cherche maintenant à résoudre l'équation

$$u_h''(x) + Au_h(x) = v(x), \quad p.p. x \in]a, b[.$$

Une fois de plus, en utilisant les résultats de A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe et A. Yagi [19], on obtient que, pour tout $x \in]a, b[$, la solution u_h s'écrit

$$u_h(x) = e^{(x-a)M}C_2 + e^{(b-x)M}C_3 + \frac{1}{2}M^{-1} \int_a^x e^{(x-s)M}v(s) ds + \frac{1}{2}M^{-1} \int_x^b e^{(s-x)M}v(s) ds$$

où $C_2, C_3 \in X$. Ainsi,

$$\begin{aligned} u_h(x) &= e^{(x-a)M}C_2 + e^{(b-x)M}C_3 + \frac{1}{2}M^{-1} \int_a^x e^{(x-s)M} \left(e^{(s-a)M}C_0 + e^{(b-s)M}C_1 \right) ds \\ &\quad + \frac{1}{2}M^{-1} \int_x^b e^{(s-x)M} \left(e^{(s-a)M}C_0 + e^{(b-s)M}C_1 \right) ds \\ &= e^{(x-a)M}C_2 + e^{(b-x)M}C_3 + \frac{1}{2}M^{-1} \int_a^x e^{(x-a)M}C_0 ds + \frac{1}{2}M^{-1} \int_a^x e^{(x+b-2s)M}C_1 ds \\ &\quad + \frac{1}{2}M^{-1} \int_x^b e^{(2s-x-a)M}C_0 ds + \frac{1}{2}M^{-1} \int_x^b e^{(b-x)M}C_1 ds \\ &= e^{(x-a)M}C_2 + e^{(b-x)M}C_3 + (x-a)e^{(x-a)M}\frac{1}{2}M^{-1}C_0 + (b-x)e^{(b-x)M}\frac{1}{2}M^{-1}C_1 \\ &\quad + \frac{1}{2}M^{-1} \left[-\frac{1}{2}M^{-1}e^{(x+b-2s)M} \right]_a^x C_1 + \frac{1}{2}M^{-1} \left[\frac{1}{2}M^{-1}e^{(2s-x-a)M} \right]_x^b C_0, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
u_h(x) &= e^{(x-a)M}C_2 + (x-a)e^{(x-a)M}\frac{1}{2}M^{-1}C_0 - \frac{1}{4}M^{-2}\left(e^{(x+b-2x)M} - e^{(x+b-2a)M}\right)C_1 \\
&\quad + e^{(b-x)M}C_3 + \frac{1}{4}M^{-2}\left(e^{(2b-x-a)M} - e^{(2x-x-a)M}\right)C_0 + (b-x)e^{(b-x)M}\frac{1}{2}M^{-1}C_1 \\
&= e^{(x-a)M}C_2 + (x-a)e^{(x-a)M}\frac{1}{2}M^{-1}C_0 - \frac{1}{4}M^{-2}\left(e^{(b-x)M} - e^{(x-a)M}e^{cM}\right)C_1 \\
&\quad + e^{(b-x)M}C_3 + \frac{1}{4}M^{-2}\left(e^{(b-x)M}e^{cM} - e^{(x-a)M}\right)C_0 + (b-x)e^{(b-x)M}\frac{1}{2}M^{-1}C_1 \\
&= e^{(x-a)M}\left(C_2 + \frac{1}{4}M^{-2}\left(e^{cM}C_1 - C_0\right)\right) + (x-a)e^{(x-a)M}\frac{1}{2}M^{-1}C_0 \\
&\quad + e^{(b-x)M}\left(C_3 + \frac{1}{4}M^{-2}\left(e^{cM}C_0 - C_1\right)\right) + (b-x)e^{(b-x)M}\frac{1}{2}M^{-1}C_1.
\end{aligned}$$

Ainsi, on note

$$K_1 = C_2 + \frac{1}{4}M^{-2}\left(e^{cM}C_1 - C_0\right), \quad K_2 = \frac{1}{2}M^{-1}C_0,$$

et

$$K_3 = C_3 + \frac{1}{4}M^{-2}\left(e^{cM}C_0 - C_1\right), \quad K_4 = \frac{1}{2}M^{-1}C_1.$$

On en conclut que, pour tout $x \in]a, b[$, on a

$$u_h(x) = e^{(x-a)M}K_1 + (x-a)e^{(x-a)M}K_2 + e^{(b-x)M}K_3 + (b-x)e^{(b-x)M}K_4.$$

De ce fait, u satisfait (2.12), ce qui donne le résultat. $\square$

2.3.3 Régularité des termes polynomiaux exponentiels

On établit ci-dessous un résultat qui concerne la régularité des termes polynomiaux couplés aux semi-groupes analytiques. Un résultat similaire est donné dans A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, K. Lemrabet et H. Sidibé [17], Proposition 1, p. 5001.

Proposition 2.3.5. *On suppose que (H_1) , (H_2) et (H_3) sont vérifiées. Pour tout $x \in [a, b]$ et $\psi \in X$, on pose*

$$v_\psi(x) = (x-a)e^{(x-a)M}\psi \quad \text{et} \quad w_\psi(x) = (b-x)e^{(b-x)M}\psi.$$

Alors, on a

1. $v_\psi \in W^{1,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(M))$.
2. $v_\psi \in W^{4,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(M^4))$ si et seulement si $\psi \in (D(M), X)_{2+\frac{1}{p}, p}$.
De plus, dans ce cas, $v''_\psi \in L^p(a, b; D(M^2))$.
3. Les deux points précédents restent vrais si on remplace v_ψ par w_ψ .

Démonstration. Soit $\psi \in X$, pour $x \in [a, b]$, on pose

$$v_\psi(x) = (x-a)e^{(x-a)M}\psi \quad \text{et} \quad w_\psi(x) = (b-x)e^{(b-x)M}\psi.$$

Chapitre 2. L'équation biharmonique dans un habitat

1. Pour tout $x > a$, $v_\psi \in C^\infty([a, b]; X) \cap C^0([a, b]; X)$ et $v_\psi \in D(M^\infty)$. Ainsi, pour tout $x > a$, on a

$$\begin{aligned} v'_\psi(x) &= e^{(x-a)M}\psi + (x-a)Me^{(x-a)M}\psi \\ &= Mv_\psi + e^{(x-a)M}\psi. \end{aligned}$$

D'où $v_\psi \in C^1([a, b]; X) \cap C^0([a, b]; X)$ est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} v'_\psi(x) = Mv_\psi + e^{(x-a)M}\psi, & \text{pp. } x \in]a, b] \\ v_\psi(a) = 0. \end{cases}$$

D'après Proposition 1.7.3, (voir A. Pazy [35], Corollaire 2.2 p. 106), v_ψ est donnée par la formule de la variation de la constante (1.2), d'où :

$$\forall x \in]a, b], \quad v_\psi(x) = \int_a^x e^{(x-s)M}e^{(s-a)M}\psi \, ds. \quad (2.14)$$

D'après le Théorème 1.7.4, puisque $s \mapsto e^{(s-a)M}\psi \in C^0(a, b; X) \subset L^p(a, b; X)$, on obtient que

$$Mv_\psi(x) = M \int_a^x e^{(x-s)M}e^{(s-a)M}\psi \, ds \in L^p(a, b; X).$$

Donc,

$$v_\psi \in L^p(a, b; D(M)).$$

De plus, puisque $v_\psi \in C^1([a, b]; X) \cap C^0([a, b]; X)$, on a

$$v'_\psi(x) = Mv_\psi(x) + e^{(x-a)M}\psi \in L^p(a, b; X).$$

Ainsi, on obtient

$$v_\psi \in W^{1,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(M)).$$

2. On suppose que $\psi \in (D(M), X)_{2+\frac{1}{p}, p}$. On pose $\varphi = M^2\psi \in (D(M), X)_{\frac{1}{p}, p}$. Alors, en utilisant l'équation (2.14), on obtient

$$\begin{aligned} M^2v_\varphi(x) &= M^2 \int_a^x e^{(x-s)M}e^{(s-a)M}\varphi \, ds \\ &= M^2 \int_a^x e^{(x-s)M}M^{-1}Me^{(s-a)M}\varphi \, ds \\ &= M^2M^{-1} \int_a^x e^{(x-s)M}Me^{(s-a)M}\varphi \, ds \\ &= M \int_a^x e^{(x-s)M}Me^{(s-a)M}\varphi \, ds. \end{aligned}$$

Or, d'après le Lemme 1.6.12, $s \mapsto Me^{(s-a)M}\varphi \in L^p(a, b; X)$. Ainsi, d'après le Théorème 1.7.4,

$$M^2v_\varphi(x) = M \int_a^x e^{(x-s)M}Me^{(s-a)M}\varphi \, ds \in L^p(a, b; X).$$

On en déduit alors que

$$M^4v_\psi = M^2v_\varphi \in L^p(a, b; X).$$

D'où

$$v_\psi \in L^p(a, b; D(M^4)) \quad \text{et} \quad v_\varphi \in L^p(a, b; D(M^2)). \quad (2.15)$$

De plus, d'après le premier point, on a

$$v_\psi \in W^{1,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(M)).$$

Par conséquent, pour tout $x > a$, on a

$$\begin{aligned} v_\psi''(x) &= Mv_\psi'(x) + Me^{(x-a)M}\psi \\ &= M \left(Mv_\psi(x) + e^{(x-a)M}\psi \right) + Me^{(x-a)M}\psi \\ &= M^2v_\psi(x) + 2Me^{(x-a)M}\psi. \end{aligned}$$

D'après le Corollaire 1.6.13 et (2.15), on a

$$u_\psi'' \in L^p(a, b; X).$$

Or, $\psi \in (D(M), X)_{2+\frac{1}{p}, p}$, donc d'après le Corollaire 1.6.13, pour tout $x \in [a, b]$, on a

$$Me^{(x-a)M}\psi = M^{-2}Me^{(x-a)M}\varphi \in L^p(a, b; D(M^2)). \quad (2.16)$$

D'après (2.15), $v_\psi \in L^p(a, b; D(M^4))$, donc $M^2v_\psi \in L^p(a, b; D(M^2))$. On en déduit, grâce à (2.16), que

$$v_\psi'' \in L^p(a, b; D(M^2)).$$

Donc

$$v_\psi \in W^{2,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(M^2)).$$

On va maintenant montrer que $v_\psi \in W^{4,p}(a, b; X)$. Pour cela, on va tout d'abord montrer que $v_\psi \in W^{3,p}(a, b; X)$. Pour tout $x > a$, on a

$$v_\psi^{(3)}(x) = Mv_\psi''(x) + M^2e^{(x-a)M}\psi.$$

Or, puisque $v_\psi'' \in L^p(a, b; D(M^2))$, on a

$$Mv_\psi'' \in L^p(a, b; D(M)).$$

De plus, d'après (2.16), $x \mapsto Me^{(x-a)M}\psi \in L^p(a, b; D(M^2))$, donc

$$x \mapsto M^2e^{(x-a)M}\psi \in L^p(a, b; D(M)).$$

On en déduit alors que

$$v_\psi^{(3)} \in L^p(a, b; D(M)),$$

et d'après (2.15), on a

$$v_\psi \in W^{3,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(M^4)).$$

Montrons maintenant que $v_\psi \in W^{4,p}(a, b; X)$. Pour tout $x > a$, on a

$$v_\psi^{(4)}(x) = Mv_\psi^{(3)}(x) + M^3e^{(x-a)M}\psi.$$

Or, puisque $v_\psi^{(3)} \in L^p(a, b; D(M))$, on a

$$Mv_\psi^{(3)} \in L^p(a, b; X).$$

De plus, d'après (2.16), $x \mapsto Me^{(x-a)M}\psi \in L^p(a, b; D(M^2))$, donc

$$x \mapsto M^3e^{(x-a)M}\psi \in L^p(a, b; X).$$

On en déduit alors que

$$v_\psi^{(4)} \in L^p(a, b; X),$$

et

$$v_\psi \in W^{4,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(M^4)).$$

3. Il suffit d'écrire $w_\psi(x) = v_\psi(b + a - x)$ et d'appliquer les deux premiers points. $\square$

2.4 Le Théorème principal

Afin d'établir notre résultat principal qui vient compléter le Théorème 2.3.2, on établit le résultat technique suivant.

Lemme 2.4.1. *Soit $V \in \mathcal{L}(X)$ tel que $0 \in \rho(I + V)$. Alors, il existe $W \in \mathcal{L}(X)$ tel que*

$$(I + V)^{-1} = I - W,$$

et $W(X) \subset V(X)$. De plus, si T est un opérateur linéaire dans X tel que $V(X) \subset D(T)$ et pour $\psi \in D(T)$, $TV\psi = VT\psi$, alors

$$\forall \psi \in D(T), \quad WT\psi = TW\psi.$$

Démonstration. On pose

$$W := V(I + V)^{-1} \in \mathcal{L}(X).$$

Il est alors évident que

$$(I + V)^{-1} = I - W \quad \text{et} \quad W(X) \subset V(X).$$

De plus, pour $\psi \in D(T)$

$$(I + V)WT\psi = VT\psi = TV\psi = T(I + V)W\psi = (I + V)TW\psi,$$

D'où $WT\psi = TW\psi$. $\square$

On peut désormais énoncer notre résultat principal :

Théorème 2.4.2. *Soit $f \in L^p(a, b; X)$ avec $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ et $p \in]1, +\infty[$. On suppose que (H_1) , (H_2) et (H_3) sont vérifiées. Alors*

1. il existe une unique solution classique u de (2.3)-(CB2) si et seulement si

$$\varphi_1, \varphi_2 \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p} \quad \text{et} \quad \varphi_3, \varphi_4 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}. \quad (2.17)$$

Si, de plus, (H_4) est vérifiée, alors

2. il existe une unique solution classique u de (2.3)-(CB3) si et seulement si

$$\varphi_1, \varphi_2 \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2p}, p} \quad \text{et} \quad \varphi_3, \varphi_4 \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p}, \quad (2.18)$$

3. il existe une unique solution classique u de (2.3)-(CB4) si et seulement si

$$\varphi_1, \varphi_2 \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p} \quad \text{et} \quad \varphi_3, \varphi_4 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}. \quad (2.19)$$

Notons que d'après le Lemme 1.6.11, dans le Théorème 2.4.2, on doit uniquement montrer l'implication réciproque. Pour chaque type de conditions aux bords, la preuve du Théorème 2.4.2 est divisée en deux étapes. Premièrement, d'après la formule de représentation obtenue dans la Proposition 2.3.4, on montre l'unicité de la solution classique. Puis, dans un deuxième temps, on établit l'existence de cette solution. Dans toute la suite, on pose

$$c = b - a > 0.$$

2.4.1 Preuve du 1. du Théorème 2.4.2 (Conditions aux bords (CB2))

Démonstration. Supposons que (H_1) , (H_2) , (H_3) et (2.17) sont vérifiées. On va tout d'abord montrer que la solution du problème (2.3)-(CB2) est unique en déterminant les K_i , $i = 1, 2, 3, 4$ de la formule de représentation (2.12). Dès lors, on poursuivra cette démonstration en montrant que cette formule constitue une solution classique.

Première étape : Unicité.

Si u est une solution classique du problème (2.3)-(CB2), alors d'après la Proposition 2.3.4, la solution u s'écrit

$$u(x) = e^{(x-a)M} K_1 + (x-a)e^{(x-a)M} K_2 + e^{(b-x)M} K_3 + (b-x)e^{(b-x)M} K_4 + F_{0,f}(x).$$

Pour conclure, il suffit de montrer que K_1 , K_2 , K_3 et K_4 sont uniquement déterminées.

Pour presque tout $x \in]a, b[$, on a

$$\begin{aligned} u'(x) &= M e^{(x-a)M} K_1 + (M(x-a) + I) e^{(x-a)M} K_2 \\ &\quad - M e^{(b-x)M} K_3 - (M(b-x) + I) e^{(b-x)M} K_4 + F'_{0,f}(x), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} u''(x) &= M^2 e^{(x-a)M} K_1 + (M^2(x-a) + 2M) e^{(x-a)M} K_2 \\ &\quad + M^2 e^{(b-x)M} K_3 + (M^2(b-x) + 2M) e^{(b-x)M} K_4 + F''_{0,f}(x). \end{aligned}$$

D'où

$$u''(x) - M^2 u(x) = 2M e^{(x-a)M} K_2 + 2M e^{(b-x)M} K_4 + F''_{0,f}(x) - M^2 F_{0,f}(x).$$

Puisque $F_{0,f}$ vérifie (2.13) et (2.17), alors en exprimant les conditions aux bords avec $M^{-1}u(x)$, on obtient alors le système abstrait suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1 + M^{-1}K_2 - e^{cM}K_3 - (cI + M^{-1})e^{cM}K_4 = M^{-1}(\varphi_1 - F'_{0,f}(a)) \\ e^{cM}K_1 + (cI + M^{-1})e^{cM}K_2 - K_3 - M^{-1}K_4 = M^{-1}(\varphi_2 - F'_{0,f}(b)) \\ 2K_2 + 2e^{cM}K_4 = M^{-1}\varphi_3 \\ 2e^{cM}K_2 + 2K_4 = M^{-1}\varphi_4. \end{array} \right. \quad (2.20)$$

Chapitre 2. L'équation biharmonique dans un habitat

Notons que l'on a considéré $M^{-1}u(x)$, parce qu'on ne sait pas si $K_i \in D(M)$, $i = 1, 2, 3, 4$. On en déduit que ce système s'écrit comme deux systèmes

$$\begin{cases} K_1 - e^{cM} K_3 &= M^{-1} (\varphi_1 - F'_{0,f}(a) - K_2) + (cI + M^{-1}) e^{cM} K_4 \\ e^{cM} K_1 - K_3 &= M^{-1} (\varphi_2 - F'_{0,f}(b) + K_4) - (cI + M^{-1}) e^{cM} K_2 \end{cases} \quad (2.21)$$

et

$$\begin{cases} K_2 + e^{cM} K_4 &= \frac{1}{2} M^{-1} \varphi_3 \\ e^{cM} K_2 + K_4 &= \frac{1}{2} M^{-1} \varphi_4. \end{cases} \quad (2.22)$$

Il faut maintenant résoudre les deux systèmes. On commence par le système (2.22). On calcule alors le déterminant de la matrice associée à ce système notée Λ_1 . D'où

$$\det(\Lambda_1) = I - e^{2cM},$$

qui est inversible d'après la Remarque 2.3.1, pour $T := M$. D'où

$$\begin{cases} K_2 &= \frac{1}{2} M^{-1} (I - e^{2cM})^{-1} (\varphi_3 - e^{cM} \varphi_4) \\ K_4 &= \frac{1}{2} M^{-1} (I - e^{2cM})^{-1} (\varphi_4 - e^{cM} \varphi_3). \end{cases}$$

Pour calculer K_1 et K_3 (en fonction de K_2 et K_4), il suffit de remarquer que

$$\begin{cases} K_1 - e^{cM} K_3 &= M^{-1} (\varphi_1 - F'_{0,f}(a) - K_2) + (cI + M^{-1}) e^{cM} K_4 \\ e^{cM} K_1 - K_3 &= M^{-1} (\varphi_2 - F'_{0,f}(b) + K_4) - (cI + M^{-1}) e^{cM} K_2. \end{cases}$$

On calcule alors le déterminant de la matrice associée à ce système notée Λ_2 .

$$\det(\Lambda_2) = - (I - e^{2cM}),$$

qui est inversible, d'après la Remarque 2.3.1, pour $T := M$. Donc K_1 et K_3 sont uniquement déterminées. On peut les calculer explicitement, il suffit de remarquer que

$$\begin{cases} K_1 &= M^{-1} (\varphi_1 - F'_{0,f}(a) - K_2) + (cI + M^{-1}) e^{cM} K_4 + e^{cM} K_3 \\ K_3 &= -M^{-1} (\varphi_2 - F'_{0,f}(b) + K_4) + (cI + M^{-1}) e^{cM} K_2 + e^{cM} K_1. \end{cases} \quad (2.23)$$

Seconde étape : Existence.

D'après ce qui précède, la solution, si elle existe, est unique et sa formule de représentation est donnée par (2.12). Notons que comme $F_{0,f} \in W^{4,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(A^2))$, alors d'après le Lemme 1.6.11, (2.5) et (2.13), on a

$$F'_{0,f}(a), F'_{0,f}(b) \in (D(M), X)_{2+\frac{1}{p}, p} = (D(A), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p}. \quad (2.24)$$

Ainsi, d'après le Lemme 1.6.11, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ vérifient (2.17). Il ne nous reste plus qu'à montrer l'implication réciproque. On suppose alors que (2.17) est vrai. Il faut maintenant exprimer les K_i , $i = 1, 2, 3, 4$ et déterminer leur régularité. D'après le Lemme 2.4.1, pour $T := M$, on a

$$(I \pm e^{2cT})^{-1} = I + R_{\pm}, \quad \text{où } R_{\pm}(X) \subset D(M^{\infty}) \quad \text{et} \quad R_{\pm}T = TR_{\pm}.$$

Or, pour $c > 0$ et $\psi \in X$

$$e^{cM}\psi \in D(M^\infty) := \bigcap_{k \geq 0} D(M^k). \quad (2.25)$$

Ainsi, d'après (2.23), (2.25) et le Lemme 2.4.1, il existe $R_i \in D(M^\infty)$, $i = 1, 2, 3, 4$, tels que

$$\begin{cases} K_2 &= \frac{1}{2}M^{-1}\varphi_3 + R_3 \\ K_4 &= \frac{1}{2}M^{-1}\varphi_4 + R_4 \\ K_1 &= M^{-1}(\varphi_1 - F'_{0,f}(a) - K_2) + R_1 \\ K_3 &= -M^{-1}(\varphi_2 - F'_{0,f}(b) + K_4) + R_2. \end{cases}$$

Donc, d'après la (2.17), (2.24) et (2.5), on a

$$K_2, K_4 \in (D(M), X)_{2+\frac{1}{p}, p} = (D(A), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p},$$

d'où on déduit que

$$K_1, K_3 \in (D(M), X)_{3+\frac{1}{p}, p} = (D(A), X)_{1+\frac{1}{2p}, p}.$$

Enfin, d'après le Lemme 1.6.12 et le Corollaire 1.6.13, on obtient que

$$u_M : x \mapsto e^{(x-a)M}K_1 + e^{(b-x)M}K_3,$$

vérifie

$$u_M \in W^{4,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(A^2)) \quad \text{et} \quad u_M'' \in L^p(a, b; D(A)). \quad (2.26)$$

D'après la Proposition 2.3.5, on obtient que $v_{K_2} : x \mapsto (x-a)e^{(x-a)M}K_2$ vérifie

$$v_{K_2} \in W^{4,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(A^2)) \quad \text{et} \quad v_{K_2}'' \in L^p(a, b; D(A)). \quad (2.27)$$

Grâce aux mêmes arguments, on obtient que $v_{K_4} : x \mapsto (b-x)e^{(b-x)M}K_4$ vérifie

$$v_{K_4} \in W^{4,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(A^2)) \quad \text{et} \quad v_{K_4}'' \in L^p(a, b; D(A)). \quad (2.28)$$

Puisque $F_{0,f}$ est une solution classique de (2.3), d'après (2.26), (2.27) et (2.28), on en déduit que u est une solution classique de (2.3)-(CB2). $\square$

2.4.2 Preuve du 2. du Théorème 2.4.2 (Conditions aux bords (CB3))

Dans la suite, on suppose (H_1) , (H_2) , (H_3) et (H_4) . Pour le point précédent, la formule de représentation était facilement obtenue en prenant en compte les conditions aux bords. Cependant pour les points suivants, afin de construire la formule de représentation, on a besoin de l'inversibilité de certains déterminants opérateurs.

Plus précisément, on doit montrer que U et V donnés par

$$\begin{cases} U &:= I - e^{2cM} + 2cMe^{cM} \\ V &:= I - e^{2cM} - 2cMe^{cM}, \end{cases} \quad (2.29)$$

Chapitre 2. L'équation biharmonique dans un habitat

sont inversibles avec inverse borné. Cela sera une conséquence d'un résultat de calcul fonctionnel. Afin d'établir ce résultat, on a besoin de poser certaines notations et de donner certains lemmes techniques.

Soit $\theta \in]0, \pi[$, on désigne par $H(S_\theta)$ l'espace des fonctions holomorphes sur S_θ , le secteur d'angle θ à valeur dans $\mathbb{C}$. De plus, on considère le sous-espace de $H(S_\theta)$ suivant :

$$\mathcal{E}_\infty(S_\theta) := \left\{ f \in H(S_\theta) : f = O(|z|^{-s}) \text{ } (|z| \rightarrow +\infty) \text{ pour un } s > 0 \right\}.$$

En d'autres termes, $\mathcal{E}_\infty(S_\theta)$ est l'espace des fonctions holomorphes à décroissance polynomiale en $+\infty$. Soit T un opérateur sectoriel inversible d'angle $\theta_T \in]0, \pi[$ (voir Définition 1.1.29). Si $f \in \mathcal{E}_\infty(S_\theta)$, avec $\theta \in]\theta_T, \pi[$, alors, grâce au calcul fonctionnel des opérateurs sectoriels, on peut définir $f(T) \in \mathcal{L}(X)$ (voir Définition 1.3.6 ou M. Haase [23], p. 45).

Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose

$$\begin{cases} \tilde{u}(z) &= 1 - e^{-2c\sqrt{z}} - 2c\sqrt{z}e^{-c\sqrt{z}} \\ \tilde{v}(z) &= 1 - e^{-2c\sqrt{z}} + 2c\sqrt{z}e^{-c\sqrt{z}}. \end{cases}$$

Ainsi, $\tilde{u}(-A) = U$ et $\tilde{v}(-A) = V$. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\begin{cases} \tilde{u}(x) &= 1 - e^{-2c\sqrt{x}} - 2c\sqrt{x}e^{-c\sqrt{x}} \\ \tilde{v}(x) &= 1 - e^{-2c\sqrt{x}} + 2c\sqrt{x}e^{-c\sqrt{x}}. \end{cases}$$

Lemme 2.4.3. *Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\tilde{u}(x)$ et $\tilde{v}(x)$ ne s'annulent pas.*

Démonstration. On cherche à montrer que $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$. Or, pour $x > 0$, $\tilde{u}(x) < \tilde{v}(x)$. On va donc uniquement étudier la positivité de $\tilde{u}$.

$$\begin{aligned} \tilde{u}'(x) &= 1 + \frac{c}{\sqrt{x}}e^{-2c\sqrt{x}} - \frac{c}{\sqrt{x}}e^{-c\sqrt{x}} + c^2e^{-c\sqrt{x}} \\ &= 1 + \frac{c}{\sqrt{x}}e^{-c\sqrt{x}} \left(e^{-c\sqrt{x}} - 1 + c\sqrt{x} \right). \end{aligned}$$

On pose

$$h(x) = e^{-c\sqrt{x}} - 1 + c\sqrt{x}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} h'(x) &= -\frac{c}{2\sqrt{x}}e^{-c\sqrt{x}} + \frac{c}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{c}{2\sqrt{x}} \left(1 - e^{-c\sqrt{x}} \right) > 0. \end{aligned}$$

Ainsi, h est croissante et $h(0) = 0$, donc $h(x) > 0$, pour $x > 0$. De plus, on a

$$\tilde{u}'(x) = 1 + \frac{c}{\sqrt{x}}e^{-c\sqrt{x}}h(x) > 0.$$

Ainsi, on a montré que $\tilde{u}$ est croissante. Or, comme $\tilde{u}(0) = 0$, on en déduit que, pour $x > 0$, $0 < \tilde{u}(x) < \tilde{v}(x)$. $\square$

Proposition 2.4.4. *Soit P un opérateur sectoriel inversible dans X d'angle θ' , pour tout $\theta' \in]0, \pi[$. Soit $f \in H(S_\theta)$, pour un $\theta \in]0, \pi[$ donné. Si*

(i) $1 - f \in \mathcal{E}_\infty(S_\theta)$,

(ii) $f(x) \neq 0$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

alors, $f(P) \in \mathcal{L}(X)$, est inversible avec inverse borné.

Démonstration. Puisque l'on a $\frac{1}{f} = 1 + h$, où $h := \frac{1-f}{f}$, il suffit de montrer que $h \in \mathcal{E}_\infty(S_{\theta_0})$, pour $\theta_0 \in]0, \pi[$, pour obtenir le résultat. En effet, dans ce cas, puisque $\sigma(P) \subset S_{\theta_0}$, d'après M. Haase [23], pp. 28 et 45, dans ce cas on peut poser :

$$\frac{1}{f}(P) = I + h(P) \in \mathcal{L}(X),$$

et l'inversibilité de $f(P)$ est obtenue en écrivant

$$\frac{1}{f}(P)f(P) = \left(\frac{1}{f} \times f\right)(P) = 1(P) = I,$$

et de façon similaire, $f(P)\frac{1}{f}(P) = I$.

Montrons maintenant que $h \in \mathcal{E}_\infty(S_\theta)$:

D'après (i), il existe $R > 0$ tel que, pour tout $z \in S_\theta$ avec $|z| > R$, on a $|1 - f(z)| < 1/2$. Alors $f(z)$ n'est jamais égale à 0 si $z \in S_\theta$ et $|z| > R$, d'où

$$h \in H\left(S_\theta \cap \left(\mathbb{C} \setminus \overline{B(0, R)}\right)\right). \quad (2.30)$$

Soit $\theta_1 \in]0, \theta[$. Dans le compact $\overline{S_{\theta_1}} \cap \overline{B(0, R)}$, la fonction holomorphe f a seulement un nombre fini de zéros, qui d'après (ii), ne sont pas dans $]0, R]$. Donc il existe $\theta_0 \in]0, \theta_1[$ tel que $f \neq 0$ dans $S_{\theta_0} \cap \overline{B(0, R)}$. Ainsi $h \in H\left(S_{\theta_0} \cap \overline{B(0, R)}\right)$ et d'après (2.30), on en déduit que $h \in H(S_{\theta_0})$. Puisque $1 - f \in \mathcal{E}_\infty(S_{\theta_0})$, il existe $R_0, \alpha, C > 0$ tel que pour $z \in S_{\theta_0}$, $|z| > R_0$, on ait

$$|1 - f| < C |z|^{-\alpha}.$$

De plus, puisque pour tout $z \in S_{\theta_0}$ avec $|z| > \max(R, R_0)$ on a $|1 - f(z)| < 1/2$, on en déduit que $|f(z)| > 1/2$. Donc, pour tout $z \in S_{\theta_0}$ avec $|z| > \max(R, R_0)$ on obtient $|h(z)| \leq 2C |z|^{-\alpha}$. Il s'en suit que $h \in \mathcal{E}_\infty(S_{\theta_0})$. $\square$

On obtient alors le résultat suivant :

Proposition 2.4.5. *V et U , définis par (2.29), sont inversibles avec inverse borné.*

Démonstration. Soit $\theta \in]0, \pi[$ fixé. Il est clair que $\tilde{u} \in H(S_\theta)$, $\tilde{v} \in H(S_\theta)$, $1 - \tilde{u} \in \mathcal{E}_\infty(S_\theta)$ et $1 - \tilde{v} \in \mathcal{E}_\infty(S_\theta)$. De plus, d'après le Lemme 2.4.3, $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$ ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}_+^*$. Vu (H_2) et (H_4) , on peut appliquer la Proposition 2.4.4 avec $P = -A$ pour en déduire que $U = \tilde{u}(-A)$ et $V = \tilde{v}(-A)$ sont inversibles avec inverse borné. $\square$

Démonstration du 2. du Théorème 2.4.2. Supposons que (2.18) soit vérifiée et montrons qu'il existe une unique solution classique de (2.3)-(CB3). La preuve est divisée en deux étapes. Tout d'abord, on montre l'unicité de la solution en déterminant les constantes K_i , $i = 1, 2, 3, 4$, de la formule de représentation (2.12). Puis, on montre que la formule obtenue est une solution classique.

Première étape : Unicité.

Si u est une solution classique du problème (2.3)-(CB3), alors d'après la Proposition 2.3.4, la solution u s'écrit

$$u(x) = e^{(x-a)M} K_1 + (x-a)e^{(x-a)M} K_2 + e^{(b-x)M} K_3 + (b-x)e^{(b-x)M} K_4 + F_{0,f}(x).$$

Afin de simplifier les calculs, on pose

$$\alpha_1 := \frac{K_1 - K_3}{2}, \quad \alpha_2 := \frac{K_2 - K_4}{2}, \quad \alpha_3 := \frac{K_1 + K_3}{2} \quad \text{et} \quad \alpha_4 := \frac{K_2 + K_4}{2}. \quad (2.31)$$

Ainsi, u est donnée par

$$\begin{aligned} u(x) &= \left(e^{(x-a)M} - e^{(b-x)M} \right) \alpha_1 + \left(e^{(x-a)M} + e^{(b-x)M} \right) \alpha_3 \\ &\quad + \left((x-a)e^{(x-a)M} - (b-x)e^{(b-x)M} \right) \alpha_2 \\ &\quad + \left((x-a)e^{(x-a)M} + (b-x)e^{(b-x)M} \right) \alpha_4 + F_{0,f}(x). \end{aligned} \quad (2.32)$$

On en déduit alors les nouvelles expressions formelles de u' et de u'' :

$$\begin{aligned} u'(x) &= M \left(e^{(x-a)M} + e^{(b-x)M} \right) \alpha_1 + M \left(e^{(x-a)M} - e^{(b-x)M} \right) \alpha_3 \\ &\quad + \left((I + (x-a)M) e^{(x-a)M} + (I + (b-x)M) e^{(b-x)M} \right) \alpha_2 \\ &\quad + \left((I + (x-a)M) e^{(x-a)M} - (I + (b-x)M) e^{(b-x)M} \right) \alpha_4 + F'_{0,f}(x), \end{aligned} \quad (2.33)$$

et

$$\begin{aligned} u''(x) &= M^2 \left(e^{(x-a)M} - e^{(b-x)M} \right) \alpha_1 + M^2 \left(e^{(x-a)M} + e^{(b-x)M} \right) \alpha_3 \\ &\quad + M \left((2I + (x-a)M) e^{(x-a)M} - (2I + (b-x)M) e^{(b-x)M} \right) \alpha_2 \\ &\quad + M \left((2I + (x-a)M) e^{(x-a)M} + (2I + (b-x)M) e^{(b-x)M} \right) \alpha_4 + F''_{0,f}(x). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Notons que les formules précédentes sont données pour presque tout $x \in]a, b[$ et que l'on considérera $M^{-1}u(x)$ et $M^{-1}u'(x)$, parce qu'on ne sait pas si $\alpha_1, \alpha_3 \in D(M)$.

Puisque $F_{0,f}$ vérifie (2.13) et (2.18), alors en exprimant les conditions aux bords à l'aide de (2.32) et (2.33) auxquelles on a appliqué M^{-1} , on obtient les équations suivantes :

$$\begin{aligned} &\left(I - e^{cM} \right) M^{-1} \alpha_1 - c e^{cM} M^{-1} \alpha_2 \\ &+ \left(I + e^{cM} \right) M^{-1} \alpha_3 + c e^{cM} M^{-1} \alpha_4 = M^{-1} \varphi_1, \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} &-\left(I - e^{cM} \right) M^{-1} \alpha_1 + c e^{cM} M^{-1} \alpha_2 \\ &+ \left(I + e^{cM} \right) M^{-1} \alpha_3 + c e^{cM} M^{-1} \alpha_4 = M^{-1} \varphi_2, \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} &\left(I + e^{cM} \right) \alpha_1 + \left(I + (cM + I) e^{cM} \right) M^{-1} \alpha_2 \\ &+ \left(I - e^{cM} \right) \alpha_3 + \left(I - (cM + I) e^{cM} \right) M^{-1} \alpha_4 = M^{-1} \left(\varphi_3 - F'_{0,f}(a) \right), \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} & (I + e^{cM}) \alpha_1 + (I + (cM + I) e^{cM}) M^{-1} \alpha_2 \\ & - (I - e^{cM}) \alpha_3 - (I - (cM + I) e^{cM}) M^{-1} \alpha_4 = M^{-1} (\varphi_4 - F'_{0,f}(b)). \end{aligned} \quad (2.38)$$

En sommant (2.35) avec (2.36) et en soustrayant (2.38) à (2.37), on obtient le système abstrait

$$\left\{ \begin{array}{l} 2(I + e^{cM}) M^{-1} \alpha_3 + 2ce^{cM} M^{-1} \alpha_4 = M^{-1} (\varphi_1 + \varphi_2) \\ - (I - e^{cM}) M^{-1} \alpha_1 + ce^{cM} M^{-1} \alpha_2 \\ + (I + e^{cM}) M^{-1} \alpha_3 + ce^{cM} M^{-1} \alpha_4 = M^{-1} \varphi_2 \\ 2(I - e^{cM}) \alpha_3 + 2(I - (cM + I) e^{cM}) M^{-1} \alpha_4 = M^{-1} (\varphi_3 - \varphi_4 + F'_{0,f}(b) - F'_{0,f}(a)) \\ (I + e^{cM}) \alpha_1 + (I + (cM + I) e^{cM}) M^{-1} \alpha_2 \\ - (I - e^{cM}) \alpha_3 - (I - (cM + I) e^{cM}) M^{-1} \alpha_4 = M^{-1} (\varphi_4 - F'_{0,f}(b)). \end{array} \right.$$

Ainsi, on aboutit au système

$$\left\{ \begin{array}{l} (I + e^{cM}) \alpha_3 + ce^{cM} \alpha_4 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \\ - (I - e^{cM}) \alpha_1 + ce^{cM} \alpha_2 + (I + e^{cM}) \alpha_3 + ce^{cM} \alpha_4 = \varphi_2 \\ (I - e^{cM}) \alpha_3 + (I - (cM + I) e^{cM}) M^{-1} \alpha_4 = M^{-1} \tilde{\varphi}_1 \\ (I + e^{cM}) \alpha_1 + (I + (cM + I) e^{cM}) M^{-1} \alpha_2 \\ (e^{cM} - I) \alpha_3 - (I - (cM + I) e^{cM}) M^{-1} \alpha_4 = M^{-1} (\varphi_4 - F'_{0,f}(b)), \end{array} \right.$$

où

$$\tilde{\varphi}_1 := \frac{\varphi_3 - \varphi_4 + F'_{0,f}(b) - F'_{0,f}(a)}{2}. \quad (2.39)$$

En échangeant les lignes deux et trois, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} (I + e^{cM}) \alpha_3 + ce^{cM} \alpha_4 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \\ (I - e^{cM}) \alpha_3 + (I - (cM + I) e^{cM}) M^{-1} \alpha_4 = M^{-1} \tilde{\varphi}_1 \\ - (I - e^{cM}) \alpha_1 + ce^{cM} \alpha_2 + \tilde{\varphi}_1 = \varphi_2 \\ (I + e^{cM}) \alpha_1 + (I + (cM + I) e^{cM}) M^{-1} \alpha_2 - M^{-1} \tilde{\varphi}_2 = M^{-1} (\varphi_4 - F'_{0,f}(b)), \end{array} \right.$$

où

$$\tilde{\varphi}_2 := \frac{\varphi_3 + \varphi_4 - F'_{0,f}(a) - F'_{0,f}(b)}{2}. \quad (2.40)$$

On en déduit que ce système s'écrit comme deux systèmes

$$\begin{cases} (I + e^{cM}) \alpha_3 + ce^{cM} \alpha_4 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \\ (I - e^{cM}) \alpha_3 + (I - (cM + I) e^{cM}) M^{-1} \alpha_4 = M^{-1} \tilde{\varphi}_1 \end{cases} \quad (2.41)$$

et

$$\begin{cases} -(I - e^{cM}) \alpha_1 + ce^{cM} \alpha_2 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \\ (I + e^{cM}) \alpha_1 + (I + (cM + I) e^{cM}) M^{-1} \alpha_2 = M^{-1} \tilde{\varphi}_2. \end{cases} \quad (2.42)$$

Il faut maintenant résoudre les deux systèmes. On commence par le système (2.41). En sommant les deux lignes, on obtient

$$\begin{cases} (I + e^{cM}) \alpha_3 + ce^{cM} \alpha_4 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \\ 2\alpha_3 + (I - e^{cM}) M^{-1} \alpha_4 = M^{-1} \tilde{\varphi}_1 + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}. \end{cases} \quad (2.43)$$

On calcule alors le déterminant de la matrice associée à ce système notée Λ_1 . D'où

$$\begin{aligned} \det(\Lambda_1) &= (I + e^{cM}) (I - e^{cM}) M^{-1} - 2ce^{cM} \\ &= M^{-1} (I - e^{2cM} - 2cMe^{cM}) \\ &= M^{-1}V, \end{aligned}$$

où V est défini dans (2.29).

On s'intéresse maintenant au système (2.42). En soustrayant à la deuxième ligne la première, on obtient

$$\begin{cases} -(I - e^{cM}) \alpha_1 + ce^{cM} \alpha_2 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \\ 2\alpha_1 + (I + e^{cM}) M^{-1} \alpha_2 = M^{-1} \tilde{\varphi}_2 - \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}. \end{cases} \quad (2.44)$$

On calcule alors le déterminant de la matrice associée à ce système notée Λ_2 . D'où

$$\begin{aligned} \det(\Lambda_2) &= -(I - e^{cM}) (I + e^{cM}) M^{-1} - 2ce^{cM} \\ &= -M^{-1} (I - e^{2cM} + 2cMe^{cM}) \\ &= -M^{-1}U, \end{aligned}$$

où U est défini dans (2.29).

D'après la Proposition 2.4.5, U et V sont inversibles avec inverse borné. Il s'en suit que si u est une solution classique de (2.3)-(CB3), alors elle est uniquement déterminée par (2.32), où les α_i , $i = 1, 2, 3, 4$ (dont l'expression explicite est donnée dans la seconde étape) sont les uniques solutions des systèmes (2.43) et (2.44).

Seconde étape : Existence.

D'après ce qui précède, la solution, si elle existe, est unique et sa formule de représentation est donnée par (2.32), (2.43) et (2.44). Notons que comme $F_{0,f} \in W^{4,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(A^2))$, alors d'après (2.4) et (2.5), on a

$$F'_{0,f}(a), F'_{0,f}(b) \in (D(M), X)_{2+\frac{1}{p}, p} = (D(A), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p}. \quad (2.45)$$

On suppose alors que (2.18) est vrai. Il faut maintenant exprimer les α_i puis les K_i , $i = 1, 2, 3, 4$ et déterminer leur régularité. Or, d'après (2.44) et (2.40), on a

$$\begin{cases} \alpha_1 &= -U^{-1} \left((I + (I + cM) e^{cM}) \left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \right) - ce^{cM} \tilde{\varphi}_2 \right) \\ \alpha_2 &= U^{-1} \left((I - e^{cM}) \tilde{\varphi}_2 + (I + e^{cM}) M \left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \right) \right), \end{cases}$$

où

$$\tilde{\varphi}_2 := \frac{\varphi_3 + \varphi_4 - F'_{0,f}(a) - F'_{0,f}(b)}{2}.$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{cases} \alpha_1 &= \frac{1}{2} U^{-1} \left((I + (I + cM) e^{cM}) (\varphi_1 - \varphi_2) + ce^{cM} (\varphi_3 + \varphi_4) \right) \\ &\quad - \frac{c}{2} U^{-1} e^{cM} (F'_{0,f}(a) + F'_{0,f}(b)) \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2} U^{-1} \left((I + e^{cM}) M (\varphi_2 - \varphi_1) + (I - e^{cM}) (\varphi_3 + \varphi_4) \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} U^{-1} (I - e^{cM}) (F'_{0,f}(a) + F'_{0,f}(b)). \end{cases}$$

De même, d'après (2.43) et (2.39), on a

$$\begin{cases} \alpha_3 &= V^{-1} \left((I - (I + cM) e^{cM}) \left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right) - ce^{cM} \tilde{\varphi}_1 \right) \\ \alpha_4 &= V^{-1} \left((I + e^{cM}) \tilde{\varphi}_1 - (I - e^{cM}) M \left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right) \right), \end{cases}$$

où

$$\tilde{\varphi}_1 := \frac{\varphi_3 - \varphi_4 + F'_{0,f}(b) - F'_{0,f}(a)}{2}.$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{cases} \alpha_3 &= \frac{1}{2} V^{-1} \left((I - (I + cM) e^{cM}) (\varphi_1 + \varphi_2) - ce^{cM} (\varphi_3 - \varphi_4) \right) \\ &\quad + \frac{c}{2} V^{-1} e^{cM} (F'_{0,f}(a) - F'_{0,f}(b)) \\ \alpha_4 &= -\frac{1}{2} V^{-1} \left((I - e^{cM}) M (\varphi_1 + \varphi_2) - (I + e^{cM}) (\varphi_3 - \varphi_4) \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} V^{-1} (I + e^{cM}) (F'_{0,f}(a) - F'_{0,f}(b)). \end{cases}$$

Or, pour $c > 0$ et $\psi \in X$

$$e^{cM} \psi \in D(M^\infty) := \bigcap_{k \geq 0} D(M^k). \quad (2.46)$$

D'après le Lemme 2.4.1, on a

$$U^{-1} = I + R_U \quad \text{et} \quad V^{-1} = I + R_V.$$

D'après (2.46), puisque $Me^{xM} = e^{xM}M$ sur $D(M)$, pour $x \geq 0$, le Lemme 2.4.1 implique que

$$R_U(X), R_V(X) \subset D(M^\infty), \quad R_UM = MR_U \quad \text{et} \quad R_VM = MR_V.$$

On en déduit qu'il existe $R_i \in D(M^\infty)$, $i = 1, 2, 3, 4$, tels que

$$\begin{cases} \alpha_1 &= \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) + R_1 \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2}\left(M(\varphi_2 - \varphi_1) + (\varphi_3 + \varphi_4) - F'_{0,f}(a) - F'_{0,f}(b)\right) + R_2 \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) + R_3 \\ \alpha_4 &= -\frac{1}{2}\left(M(\varphi_1 + \varphi_2) - (\varphi_3 - \varphi_4) + F'_{0,f}(a) - F'_{0,f}(b)\right) + R_4. \end{cases}$$

D'après (2.31) et (2.45), il existe $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_3 \in (D(M), X)_{3+\frac{1}{p},p}$ et $\mathcal{R}_2, \mathcal{R}_4 \in (D(M), X)_{2+\frac{1}{p},p}$, tels que

$$\begin{cases} K_1 &= \varphi_1 + \mathcal{R}_1 \\ K_2 &= \varphi_3 - M\varphi_1 + \mathcal{R}_2 \\ K_3 &= \varphi_2 + \mathcal{R}_3 \\ K_4 &= -M\varphi_2 - \varphi_4 + \mathcal{R}_4. \end{cases}$$

Ainsi, d'après (2.12), pour $x \in]a, b[$,

$$u(x) = e^{(x-a)M}K_1 + (x-a)e^{(x-a)M}K_2 + e^{(b-x)M}K_3 + (b-x)e^{(b-x)M}K_4 + F_{0,f}(x).$$

D'où, d'après (2.18) et (2.5), puisque $\varphi_1, \varphi_2 \in (D(M), X)_{3+\frac{1}{p},p}$, on a

$$K_1 = \varphi_1 + \mathcal{R}_1 \in (D(M), X)_{3+\frac{1}{p},p} = (D(A), X)_{1+\frac{1}{2p},p}$$

et

$$K_3 = \varphi_2 + \mathcal{R}_3 \in (D(M), X)_{3+\frac{1}{p},p} = (D(A), X)_{1+\frac{1}{2p},p}.$$

D'après le Lemme 1.6.12 et le Corollaire 1.6.13, on obtient que

$$u_M : x \mapsto e^{(x-a)M}K_1 + e^{(b-x)M}K_3,$$

vérifie

$$u_M \in W^{4,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(A^2)) \quad \text{et} \quad u''_M \in L^p(a, b; D(A)). \quad (2.47)$$

De même, d'après (2.18) et (2.5), puisque $\varphi_1, \varphi_2 \in (D(M), X)_{3+\frac{1}{p},p}$ et $\varphi_3, \varphi_4 \in (D(M), X)_{2+\frac{1}{p},p}$, on a

$$K_2 = \varphi_3 - M\varphi_1 + \mathcal{R}_2 \in (D(M), X)_{2+\frac{1}{p},p} = (D(A), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p},$$

et

$$K_4 = -M\varphi_2 - \varphi_4 + \mathcal{R}_4 \in (D(M), X)_{2+\frac{1}{p},p} = (D(A), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p}.$$

Donc, d'après la Proposition 2.3.5, $v_{K_2} : x \mapsto (x-a)e^{(x-a)M}K_2$ vérifie

$$v_{K_2} \in W^{4,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(A^2)) \quad \text{et} \quad v''_{K_2} \in L^p(a, b; D(A)). \quad (2.48)$$

Grâce aux mêmes arguments, $v_{K_4} : x \mapsto (b-x)e^{(b-x)M}K_4$ vérifie

$$v_{K_4} \in W^{4,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(A^2)) \quad \text{et} \quad v''_{K_4} \in L^p(a, b; D(A)). \quad (2.49)$$

Puisque $F_{0,f}$ est une solution classique de (2.3), d'après (2.47), (2.48) et (2.49), on en déduit que u est une solution classique de (2.3)-(CB3). $\square$

2.4.3 Preuve du 3. du Théorème 2.4.2 (Conditions aux bords (CB4))

Démonstration. Supposons que (H_1) , (H_2) , (H_3) , (H_4) et (2.19) sont vérifiées. On va tout d'abord montrer que la solution du problème (2.3)-(CB4) est unique en déterminant les K_i , $i = 1, 2, 3, 4$ de la formule de représentation (2.12). Dès lors, on poursuivra cette démonstration en montrant que cette formule constitue une solution classique.

Première étape : Unicité.

Si u est une solution classique du problème (2.3)-(CB4), alors d'après la Proposition 2.3.4, la solution u s'écrit

$$u(x) = e^{(x-a)M} K_1 + (x-a)e^{(x-a)M} K_2 + e^{(b-x)M} K_3 + (b-x)e^{(b-x)M} K_4 + F_{0,f}(x).$$

Afin de simplifier les calculs, on utilise le changement de variable (2.31) de la preuve précédente que l'on rappelle ici pour la commodité du lecteur

$$\alpha_1 := \frac{K_1 - K_3}{2}, \quad \alpha_2 := \frac{K_2 - K_4}{2}, \quad \alpha_3 := \frac{K_1 + K_3}{2} \quad \text{et} \quad \alpha_4 := \frac{K_2 + K_4}{2}.$$

Ainsi, pour presque tout $x \in]a, b[$, u est donnée par (2.32) que l'on rappelle ci-dessous, pour la commodité du lecteur

$$\begin{aligned} u(x) = & \left(e^{(x-a)M} - e^{(b-x)M} \right) \alpha_1 + \left((x-a)e^{(x-a)M} - (b-x)e^{(b-x)M} \right) \alpha_2 \\ & + \left(e^{(x-a)M} + e^{(b-x)M} \right) \alpha_3 + \left((x-a)e^{(x-a)M} + (b-x)e^{(b-x)M} \right) \alpha_4 + F_{0,f}(x). \end{aligned}$$

Puisque $F_{0,f}$ vérifie (2.13) et (2.19), alors en exprimant les conditions aux bords à l'aide de (2.33) et (2.34) auxquelles on a appliqué M^{-2} , on obtient les équations suivantes :

$$\begin{aligned} & \left(I + e^{cM} \right) M^{-1} \alpha_1 + \left(I + (I + cM) e^{cM} \right) M^{-2} \alpha_2 \\ & + \left(I - e^{cM} \right) M^{-1} \alpha_3 + \left(I - (I + cM) e^{cM} \right) M^{-2} \alpha_4 = M^{-2} \left(\varphi_1 - F'_{0,f}(a) \right), \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} & \left(I + e^{cM} \right) M^{-1} \alpha_1 + \left(I + (I + cM) e^{cM} \right) M^{-2} \alpha_2 \\ & - \left(I - e^{cM} \right) M^{-1} \alpha_3 - \left(I - (I + cM) e^{cM} \right) M^{-2} \alpha_4 = M^{-2} \left(\varphi_2 - F'_{0,f}(b) \right), \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} & \left(I - e^{cM} \right) \alpha_1 + \left(2I - (2I + cM) e^{cM} \right) M^{-1} \alpha_2 \\ & + \left(I + e^{cM} \right) \alpha_3 + \left(2I + (2I + cM) e^{cM} \right) M^{-1} \alpha_4 = M^{-2} \varphi_3, \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} & - \left(I - e^{cM} \right) \alpha_1 - \left(2I - (2I + cM) e^{cM} \right) M^{-1} \alpha_2 \\ & + \left(I + e^{cM} \right) \alpha_3 + \left(2I + (2I + cM) e^{cM} \right) M^{-1} \alpha_4 = M^{-2} \varphi_4. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Notons que l'on a considéré $M^{-2}u(x)$, pour presque tout $x \in]a, b[$, parce qu'on ne sait pas si $\alpha_i \in D(M)$, $i = 1, 2, 3, 4$. En sommant (2.50) avec (2.51) et en soustrayant (2.53) à (2.52), on

obtient le système opérationnel

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(I + e^{cM} \right) M^{-1} \alpha_1 + \left(I + (I + cM) e^{cM} \right) M^{-2} \alpha_2 \\ + \left(I - e^{cM} \right) M^{-1} \alpha_3 + \left(I - (I + cM) e^{cM} \right) M^{-2} \alpha_4 \quad = \quad M^{-2} \left(\varphi_1 - F'_{0,f}(a) \right) \\ 2 \left(I + e^{cM} \right) M^{-1} \alpha_1 + 2 \left(I + (I + cM) e^{cM} \right) M^{-2} \alpha_2 \quad = \quad 2M^{-2} \tilde{\varphi}_1 \\ 2 \left(I - e^{cM} \right) \alpha_1 + 2 \left(2I - (2I + cM) e^{cM} \right) M^{-1} \alpha_2 \quad = \quad M^{-2} (\varphi_3 - \varphi_4) \\ - \left(I - e^{cM} \right) \alpha_1 - \left(2I - (2I + cM) e^{cM} \right) M^{-1} \alpha_2 \\ + \left(I + e^{cM} \right) \alpha_3 + \left(2I + (2I + cM) e^{cM} \right) M^{-1} \alpha_4 \quad = \quad M^{-2} \varphi_4, \end{array} \right.$$

où

$$\tilde{\varphi}_1 := \frac{\varphi_1 + \varphi_2 - F'_{0,f}(a) - F'_{0,f}(b)}{2}. \quad (2.54)$$

En divisant par 2 la deuxième ligne et en la soustrayant à la première, puis en sommant la troisième ligne à la quatrième, on obtient le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(I - e^{cM} \right) \alpha_3 + \left(I - (I + cM) e^{cM} \right) M^{-1} \alpha_4 \quad = \quad M^{-1} \tilde{\varphi}_2 \\ \left(I + e^{cM} \right) \alpha_1 + \left(I + (I + cM) e^{cM} \right) M^{-1} \alpha_2 \quad = \quad M^{-1} \tilde{\varphi}_1 \\ \left(I - e^{cM} \right) \alpha_1 + \left(2I - (2I + cM) e^{cM} \right) M^{-1} \alpha_2 \quad = \quad M^{-2} \left(\frac{\varphi_3 - \varphi_4}{2} \right) \\ \left(I + e^{cM} \right) \alpha_3 + \left(2I + (2I + cM) e^{cM} \right) M^{-1} \alpha_4 \quad = \quad M^{-2} \left(\frac{\varphi_3 + \varphi_4}{2} \right), \end{array} \right.$$

où, par analogie avec la section précédente, on note

$$\tilde{\varphi}_2 := \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + F'_{0,f}(b) - F'_{0,f}(a)}{2}. \quad (2.55)$$

On en déduit que ce système s'écrit comme deux systèmes

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(I + e^{cM} \right) \alpha_1 + \left(I + (I + cM) e^{cM} \right) M^{-1} \alpha_2 \quad = \quad M^{-1} \tilde{\varphi}_1 \\ \left(I - e^{cM} \right) \alpha_1 + \left(2I - (2I + cM) e^{cM} \right) M^{-1} \alpha_2 \quad = \quad M^{-2} \left(\frac{\varphi_3 - \varphi_4}{2} \right) \end{array} \right. \quad (2.56)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(I - e^{cM} \right) \alpha_3 + \left(I - (I + cM) e^{cM} \right) M^{-1} \alpha_4 \quad = \quad M^{-1} \tilde{\varphi}_2 \\ \left(I + e^{cM} \right) \alpha_3 + \left(2I + (2I + cM) e^{cM} \right) M^{-1} \alpha_4 \quad = \quad M^{-2} \left(\frac{\varphi_3 + \varphi_4}{2} \right), \end{array} \right. \quad (2.57)$$

où $\tilde{\varphi}_1$ et $\tilde{\varphi}_2$ sont donnés par (2.54) et (2.55).

Il faut maintenant résoudre les deux systèmes. On commence par le système (2.56). En sommant les deux lignes, on obtient

$$\begin{cases} (I + e^{cM}) \alpha_1 + (I + (I + cM) e^{cM}) M^{-1} \alpha_2 = M^{-1} \tilde{\varphi}_1 \\ 2\alpha_1 + (3I - e^{cM}) M^{-1} \alpha_2 = M^{-1} \left(M^{-1} \left(\frac{\varphi_3 - \varphi_4}{2} \right) + \tilde{\varphi}_1 \right). \end{cases} \quad (2.58)$$

On calcule alors le déterminant de la matrice associée à ce système notée Λ_1 . D'où

$$\begin{aligned} \det(\Lambda_1) &= (I + e^{cM}) (3I - e^{cM}) M^{-1} - 2 (I + (I + cM) e^{cM}) M^{-1} \\ &= M^{-1} (3I - e^{cM} + 3e^{cM} - e^{2cM} - 2I - 2e^{cM} - 2cM e^{cM}) \\ &= M^{-1} (I - e^{2cM} - 2cM e^{cM}) \\ &= M^{-1} V, \end{aligned}$$

où V est défini dans (2.29).

On s'intéresse maintenant au système (2.57). En sommant les deux lignes, on obtient

$$\begin{cases} (I - e^{cM}) \alpha_3 + (I - (I + cM) e^{cM}) M^{-1} \alpha_4 = M^{-1} \tilde{\varphi}_2 \\ 2\alpha_3 + (3I + e^{cM}) M^{-1} \alpha_4 = M^{-1} \left(M^{-1} \left(\frac{\varphi_3 + \varphi_4}{2} \right) + \tilde{\varphi}_2 \right). \end{cases} \quad (2.59)$$

On calcule alors le déterminant de la matrice associée à ce système notée Λ_2 . D'où

$$\begin{aligned} \det(\Lambda_2) &= (I - e^{cM}) (3I + e^{cM}) M^{-1} - 2 (I - (I + cM) e^{cM}) M^{-1} \\ &= M^{-1} (3I - 3e^{cM} + e^{cM} - e^{2cM} - 2I + 2e^{cM} + 2cM e^{cM}) \\ &= M^{-1} (I - e^{2cM} + 2cM e^{cM}) \\ &= M^{-1} U, \end{aligned}$$

où U est défini dans (2.29).

D'après la Proposition 2.4.5, U et V sont inversibles avec inverse borné. Il s'en suit que si u est une solution classique de (2.3)-(CB4), alors elle est uniquement déterminée par (2.32), où les α_i , $i = 1, 2, 3, 4$ (dont l'expression explicite est donnée dans la seconde étape) sont les uniques solutions des systèmes (2.58) et (2.59).

Seconde étape : Existence.

D'après ce qui précède, la solution, si elle existe, est unique et sa formule de représentation est donnée par (2.32), (2.58) et (2.59). Notons que comme $F_{0,f} \in W^{4,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(A^2))$, alors d'après (2.4) et (2.5), on a

$$F'_{0,f}(a), F'_{0,f}(b) \in (D(M), X)_{2+\frac{1}{p}, p} = (D(A), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p}. \quad (2.60)$$

On suppose alors que (2.19) est vrai. Il faut maintenant exprimer les α_i puis les K_i , $i = 1, 2, 3, 4$ et déterminer leur régularité. Or, d'après (2.58) et (2.54), on a

$$\begin{cases} \alpha_1 = M^{-1} V^{-1} \left((3I - e^{cM}) \tilde{\varphi}_1 - (I + (I + cM) e^{cM}) \left(M^{-1} \left(\frac{\varphi_3 - \varphi_4}{2} \right) + \tilde{\varphi}_1 \right) \right) \\ \alpha_2 = V^{-1} \left(-2\tilde{\varphi}_1 + (I + e^{cM}) \left(M^{-1} \left(\frac{\varphi_3 - \varphi_4}{2} \right) + \tilde{\varphi}_1 \right) \right), \end{cases}$$

où

$$\tilde{\varphi}_1 := \frac{\varphi_1 + \varphi_2 - F'_{0,f}(a) - F'_{0,f}(b)}{2}.$$

Ainsi, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \frac{1}{2}M^{-1}V^{-1} \left((3I - e^{cM}) (\varphi_1 + \varphi_2) - (M^{-1}(\varphi_3 - \varphi_4) + \varphi_1 + \varphi_2) \right) \\ \quad - \frac{1}{2}M^{-1}V^{-1} (I + cM) (M^{-1}(\varphi_3 - \varphi_4) + \varphi_1 + \varphi_2) e^{cM} \\ \quad - \frac{1}{2}M^{-1}V^{-1} (3I - e^{cM} - (I + (I + cM) e^{cM})) (F'_{0,f}(a) + F'_{0,f}(b)) \\ \alpha_2 = -\frac{1}{2}V^{-1} (2(\varphi_1 + \varphi_2) - (I + e^{cM}) (M^{-1}(\varphi_3 - \varphi_4) + \varphi_1 + \varphi_2)) \\ \quad + \frac{1}{2}V^{-1} (I - e^{cM}) (F'_{0,f}(a) + F'_{0,f}(b)). \end{array} \right.$$

De même, d'après (2.59) et (2.55), on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_3 = M^{-1}U^{-1} \left((2I + (2I + cM) e^{cM}) \tilde{\varphi}_2 - M^{-1} \left(\frac{\varphi_3 + \varphi_4}{2} \right) \right) \\ \quad + M^{-2}U^{-1} (I + cM) \left(\frac{\varphi_3 + \varphi_4}{2} \right) e^{cM} \\ \alpha_4 = U^{-1} \left(- (I + e^{cM}) \tilde{\varphi}_2 + (I - e^{cM}) M^{-1} \left(\frac{\varphi_3 + \varphi_4}{2} \right) \right), \end{array} \right.$$

où

$$\tilde{\varphi}_2 := \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + F'_{0,f}(b) - F'_{0,f}(a)}{2}.$$

Ainsi, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_3 = \frac{1}{2}M^{-1}U^{-1} \left((2I + (2I + cM) e^{cM}) (\varphi_1 - \varphi_2) - M^{-1}(\varphi_3 + \varphi_4) \right) \\ \quad + \frac{1}{2}M^{-2}U^{-1} (I + cM) (\varphi_3 + \varphi_4) e^{cM} \\ \quad + \frac{1}{2}M^{-1}U^{-1} (2I + (2I + cM) e^{cM}) (F'_{0,f}(b) - F'_{0,f}(a)) \\ \alpha_4 = -\frac{1}{2}U^{-1} \left((I + e^{cM}) (\varphi_1 - \varphi_2) - (I - e^{cM}) M^{-1}(\varphi_3 + \varphi_4) \right) \\ \quad - \frac{1}{2}U^{-1} (I + e^{cM}) (F'_{0,f}(b) - F'_{0,f}(a)). \end{array} \right.$$

Or, pour $c > 0$ et $\psi \in X$

$$e^{cM}\psi \in D(M^\infty) := \bigcap_{k \geq 0} D(M^k). \quad (2.61)$$

D'après le Lemme 2.4.1, on a

$$U^{-1} = I + R_U \quad \text{et} \quad V^{-1} = I + R_V.$$

D'après (2.61), puisque $Me^{xM} = e^{xM}M$ sur $D(M)$, pour $x \geq 0$, le Lemme 2.4.1 implique que

$$R_U(X), R_V(X) \subset D(M^\infty), \quad R_UM = MR_U \quad \text{et} \quad R_VM = MR_V.$$

On en déduit qu'il existe $R_i \in D(M^\infty)$, $i = 1, 2, 3, 4$, tels que

$$\begin{cases} \alpha_1 &= \frac{1}{2}M^{-1} \left(3(\varphi_1 + \varphi_2) - \left(M^{-1}(\varphi_3 - \varphi_4) + \varphi_1 + \varphi_2 \right) \right) - \left(F'_{0,f}(a) + F'_{0,f}(b) \right) + R_1 \\ \alpha_2 &= -\frac{1}{2} \left(2(\varphi_1 + \varphi_2) - \left(M^{-1}(\varphi_3 - \varphi_4) + \varphi_1 + \varphi_2 \right) - \left(F'_{0,f}(a) + F'_{0,f}(b) \right) \right) + R_2 \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2}M^{-1} \left(2(\varphi_1 - \varphi_2) - M^{-1}(\varphi_3 + \varphi_4) + F'_{0,f}(b) - F'_{0,f}(a) \right) + R_3 \\ \alpha_4 &= -\frac{1}{2} \left(\varphi_1 - \varphi_2 - M^{-1}(\varphi_3 + \varphi_4) + F'_{0,f}(b) - F'_{0,f}(a) \right) + R_4. \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} \alpha_1 &= \frac{1}{2}M^{-1} \left(2(\varphi_1 + \varphi_2) - M^{-1}(\varphi_3 - \varphi_4) - \left(F'_{0,f}(a) + F'_{0,f}(b) \right) \right) + R_1 \\ \alpha_2 &= -\frac{1}{2} \left(\varphi_1 + \varphi_2 - M^{-1}(\varphi_3 - \varphi_4) - \left(F'_{0,f}(a) + F'_{0,f}(b) \right) \right) + R_2 \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2}M^{-1} \left(2(\varphi_1 - \varphi_2) - M^{-1}(\varphi_3 + \varphi_4) + F'_{0,f}(b) - F'_{0,f}(a) \right) + R_3 \\ \alpha_4 &= -\frac{1}{2} \left(\varphi_1 - \varphi_2 - M^{-1}(\varphi_3 + \varphi_4) + F'_{0,f}(b) - F'_{0,f}(a) \right) + R_4. \end{cases}$$

D'après (2.31) et (2.60), il existe $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_3 \in (D(M), X)_{3+\frac{1}{p},p}$ et $\mathcal{R}_2, \mathcal{R}_4 \in (D(M), X)_{2+\frac{1}{p},p}$, tels que

$$\begin{cases} K_1 &= 2M^{-1}\varphi_1 - M^{-2}\varphi_3 + \mathcal{R}_1 \\ K_2 &= -\varphi_1 + M^{-1}\varphi_3 + \mathcal{R}_2 \\ K_3 &= -2M^{-1}\varphi_2 - M^{-2}\varphi_4 + \mathcal{R}_3 \\ K_4 &= \varphi_2 + M^{-1}\varphi_4 + \mathcal{R}_4. \end{cases}$$

On rappelle que d'après (2.12), pour $x \in]a, b[$, on a

$$u(x) = e^{(x-a)M}K_1 + (x-a)e^{(x-a)M}K_2 + e^{(b-x)M}K_3 + (b-x)e^{(b-x)M}K_4 + F_{0,f}(x).$$

Ainsi, d'après (2.19) et (2.5), puisque $\varphi_1, \varphi_2 \in (D(M), X)_{2+\frac{1}{p},p}$ et $\varphi_3, \varphi_4 \in (D(M), X)_{1+\frac{1}{p},p}$, on a

$$K_1 = 2M^{-1}\varphi_1 - M^{-2}\varphi_3 + \mathcal{R}_1 \in (D(M), X)_{3+\frac{1}{p},p} = (D(A), X)_{1+\frac{1}{2p},p}$$

et

$$K_3 = -2M^{-1}\varphi_2 - M^{-2}\varphi_4 + \mathcal{R}_3 \in (D(M), X)_{3+\frac{1}{p},p} = (D(A), X)_{1+\frac{1}{2p},p}.$$

D'après le Lemme 1.6.12 et le Corollaire 1.6.13, $u_M : x \mapsto e^{(x-a)M}K_1 + e^{(b-x)M}K_3$, vérifie

$$u_M \in W^{4,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(A^2)) \quad \text{et} \quad u_M'' \in L^p(a, b; D(A)). \quad (2.62)$$

De même, d'après (2.19) et (2.5), puisque $\varphi_1, \varphi_2 \in (D(M), X)_{2+\frac{1}{p},p}$ et $\varphi_3, \varphi_4 \in (D(M), X)_{1+\frac{1}{p},p}$, on a

$$K_2 = -\varphi_1 + M^{-1}\varphi_3 + \mathcal{R}_2 \in (D(M), X)_{2+\frac{1}{p},p} = (D(A), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p},$$

et

$$K_4 = \varphi_2 + M^{-1}\varphi_4 + \mathcal{R}_4 \in (D(M), X)_{2+\frac{1}{p}, p} = (D(A), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p}.$$

Donc, d'après la Proposition 2.3.5, on obtient que $v_{K_2} : x \mapsto (x - a)e^{(x-a)M}K_2$ vérifie

$$v_{K_2} \in W^{4,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(A^2)) \quad \text{et} \quad v_{K_2}'' \in L^p(a, b; D(A)). \quad (2.63)$$

Grâce aux mêmes arguments, $v_{K_4} : x \mapsto (b - x)e^{(b-x)M}K_4$ vérifie

$$v_{K_4} \in W^{4,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(A^2)) \quad \text{et} \quad v_{K_4}'' \in L^p(a, b; D(A)). \quad (2.64)$$

Enfin, puisque $F_{0,f}$ est une solution classique de (2.3), d'après (2.62), (2.63) et (2.64), on en déduit que u est une solution classique de (2.3)-(CB4). $\square$

2.4.4 Application

D'après le Théorème 2.4.2, on déduit des résultats de régularité pour l'équation (2.1) sous certaines conditions aux limites particulières (d'autres conditions aux limites peuvent être considérées). On va rendre explicite le Théorème 2.3.3 en considérant, par exemple, le problème (2.1)-(CB5) avec $A := A_0$.

Corollaire 2.4.6. *On considère un domaine cylindrique $\Omega :=]a, b[\times \omega$ de $\mathbb{R}^d$, où $d \geq 2$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^{n-1}$, où $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, avec un bord de classe C^2 . Soit $f \in L^p(\Omega)$ avec $p \in]1, +\infty[$ et $p > \frac{n}{2}$. Alors, il existe une unique solution $u \in W^{4,p}(\Omega)$ de*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta^2 u(x, y) = f(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = \Delta u(x, y) = 0, & (x, y) \in]a, b[\times \partial\omega \\ u(a, y) = \varphi_1(y), & y \in \omega \\ u(b, y) = \varphi_2(y), & y \in \omega \\ \Delta u(a, y) = \varphi_3(y), & y \in \omega \\ \Delta u(b, y) = \varphi_4(y), & y \in \omega, \end{array} \right. \quad (2.65)$$

si et seulement si

$$\varphi_1, \varphi_2 \in W^{2,p}(\omega) \cap W_0^{1,p}(\omega) \quad \text{et} \quad \Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \in W^{2-\frac{1}{p},p}(\omega) \cap W_0^{1,p}(\omega).$$

Démonstration. On pose $X := L^p(\omega)$ et

$$\left\{ \begin{array}{ll} D(A_0) & := W^{2,p}(\omega) \cap W_0^{1,p}(\omega) \\ (A_0\psi)(y) & := \Delta_y\psi(y). \end{array} \right.$$

avec ces notations, le problème (2.65) devient (2.3) avec les conditions aux limites (CB5). D'après J. L. Rubio de Francia [40] (Proposition 3, p. 207), X satisfait (H_1) et d'après D. Gilbarg et N. Trudinger [20] (Theorem 9.15 et Lemma 9.17), A_0 satisfait (H_2) . De plus, (H_3) est satisfait d'après J. Prüss et H. Sohr [39] (Theorem C, p. 166-167).

Finalement, toutes les hypothèses du Théorème 2.3.3 sont vérifiées. il s'en suit qu'il existe une unique solution classique de (2.3)-(CB5) si et seulement si

$$\varphi_1, \varphi_2 \in (D(A_0), X)_{1+\frac{1}{2p}, p} \quad \text{et} \quad \varphi_3, \varphi_4 \in (D(A_0), X)_{\frac{1}{2p}, p}. \quad (2.66)$$

Maintenant, il reste à montrer que si $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ vérifient (2.66), alors la solution classique u vérifie $u \in W^{4,p}(\Omega)$. A cette fin, on va expliciter l'espace d'interpolation qui apparaît dans (2.66). On a

$$(D(A_0), X)_{\frac{1}{2p}, p} = \left(W^{2,p}(\omega) \cap W_0^{1,p}(\omega), L^p(\omega) \right)_{\frac{1}{2p}, p},$$

et d'après P. Grisvard [22] (p. 683, proposizione 3 et p. 681, 1.10) et H. Triebel [43] (p. 317, Theorem 1), puisque $2 - \frac{1}{p} > 1$ n'est jamais entier, on a

$$\left(W^{2,p}(\omega), L^p(\omega) \right)_{\frac{1}{2p}, p} = W^{2-\frac{1}{p}, p}(\omega). \quad (2.67)$$

On pose $\nu := 2 - \frac{1}{p} - \frac{n-1}{p} = 2 - \frac{n}{p}$. Puisque $p > \frac{n}{2}$, on a $\nu > 0$. D'après le théorème d'injection de Sobolev (voir H. Triebel [43], section 4.6.1, p. 327-328), on a :

$$W^{2-\frac{1}{p}, p}(\omega) \hookrightarrow C(\overline{\omega}).$$

Ainsi, les traces des éléments de l'espace décrit dans (2.67) sont bien définies. D'après P. Grisvard [21] (Proposition 5.9, p. 334) et H. Triebel [43] (section 4.3.3, Theorem, p. 321), on en déduit que

$$(D(A_0), X)_{\frac{1}{2p}, p} = \left\{ \psi \in W^{2-\frac{1}{p}, p}(\omega) : \psi = 0 \text{ sur } \partial\omega \right\},$$

et

$$\begin{aligned} (D(A_0), X)_{1+\frac{1}{2p}, p} &= \left\{ \psi \in D(A_0) : A_0\psi \in W^{2-\frac{1}{p}, p}(\omega) \text{ et } \Delta\psi = 0 \text{ sur } \partial\omega \right\} \\ &= \left\{ \psi \in W^{2,p}(\omega) : \Delta\psi \in W^{2-\frac{1}{p}, p}(\omega) \text{ et } \psi = \Delta\psi = 0 \text{ sur } \partial\omega \right\}. \end{aligned}$$

De ce fait, la solution classique u de

$$u^{(4)}(x) + 2A_0u''(x) + A_0^2u(x) = f(x), \quad p.p. \ x \in]a, b[,$$

vérifie

$$\begin{cases} u \in W^{4,p}(a, b; L^p(\omega)) \\ x \mapsto A_0u''(x) \in L^p(a, b; L^p(\omega)) \\ x \mapsto A_0^2u(x) \in L^p(a, b; L^p(\omega)), \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} u(a, y) = \varphi_1(y), & u(b, y) = \varphi_2(y), & y \in \omega \\ \Delta u(a, y) = \varphi_3(y), & \Delta u(b, y) = \varphi_4(y), & y \in \omega \\ u(x, \zeta) = \Delta u(x, \zeta) = 0, & & x \in]a, b[\text{ et } \zeta \in \partial\omega. \end{cases}$$

Or, puisque

$$\begin{cases} u \in W^{2,p}(a, b; L^p(\omega)) \cap L^p(a, b; W^{2,p}(\omega) \cap W_0^{1,p}(\omega)) \\ u(x, \zeta) = 0, \quad \zeta \in \partial\omega \\ \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = 0, \quad \text{sur } \partial\omega, \end{cases}$$

Chapitre 2. L'équation biharmonique dans un habitat

on peut appliquer sur $u(x, \cdot)$, $x \in]a, b[$, grâce au théorème de prolongement de Sobolev sur $\mathbb{R}^{n-1}$, un opérateur de prolongement qui injecte continûment $L^p(\omega)$ dans $L^p(\mathbb{R}^{n-1})$ et qui injecte continûment $W^{2,p}(\omega)$ dans $W^{2,p}(\mathbb{R}^{n-1})$. Ainsi, d'après le Théorème de Mihlin (voir Théorème 1.2.20 et Corollaire 1.2.21 du Chapitre 1 ou l'article [31]), on en déduit que

$$u \in W^{2,p}(]a, b[\times \omega) = W^{2,p}(\Omega).$$

En réitérant les mêmes arguments aux autres régularités, on obtient que $u \in W^{4,p}(\Omega)$. □

L'équation (2.1) peut être étudiée avec d'autres conditions aux limites en utilisant les résultats du Théorème 2.4.2. On peut aussi obtenir des résultats anisotropiques en considérant $f \in L^p(a, b; L^q(\omega))$ avec $p, q \in]1, +\infty[$.

Chapitre 3

Diffusion généralisée dans un habitat

3.1 Introduction

De nombreux problèmes en biologie, peuvent être décrits par des équations aux dérivées partielles. Cela signifie que le modèle est construit en faisant une moyenne de la densité de population et en gardant seulement les variables de temps et d'espace. Cela permet l'étude de la densité de population, appelée dynamique de population, gouvernée par les équations de réaction-diffusion. En général, le modèle considéré est le suivant :

$$\partial_t u = \alpha \Delta u + f(u), \quad \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \quad (3.1)$$

où $u(t, x)$ est la densité de population au temps t et à la position x , Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ et f est un terme de croissance non linéaire. L'opérateur de diffusion Δu est obtenu grâce à la loi de Fick.

En 1981, D. S. Cohen et J. D. Murray [7] développent un modèle plus complet en ajoutant un terme biharmonique au terme harmonique. Cet ajout trouve sa justification notamment dans l'étude de la motilité de cellules, pour lesquelles ils ont notés que la diffusion classique n'était pas suffisante. Ce modèle est :

$$\partial_t u = l \Delta u - k \Delta^2 u + f(u) \quad \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \quad (3.2)$$

où $l, k \in \mathbb{R}^*$. Le terme biharmonique $\Delta^2 u$ représente la diffusion à longue portée, alors que le terme harmonique Δu représente la diffusion à courte portée. Un autre modèle similaire à celui-ci a été obtenu en 1984 par F. L. Ochoa [33] qui étudiait (3.2) lorsque f est une fonction cubique. Son travail montra l'importance du terme biharmonique dans la diffusion de la population.

L'étude classique de problèmes non-linéaires comme (3.1) ou (3.2) nécessite tout d'abord de considérer le problème linéaire stationnaire associé. Cette première étape est essentielle afin d'obtenir les résultats de régularité maximale pour le problème linéarisé instationnaire. De ce résultat de régularité maximale, on peut obtenir l'existence et l'unicité du problème non-linéaire par un théorème de point fixe. Pour le problème (3.1), on peut trouver une étude détaillée dans J. Prüss [37], voir section 4, p. 13.

Les équations de type Cahn-Hilliard sont une généralisation de l'équation (3.2). Dans le cadre Hilbertien, des résultats d'existence et de régularité pour ces équations sont obtenus notamment par A. Novick-Cohen [32]. Récemment, dans ce même cadre, L. Cherfils, A. Miranville

et S. Zelik [6] ont étudiés des équations de Cahn-Hilliard généralisées en vue d'applications à la biologie.

Dans ce chapitre, on étudie le problème (3.2) dans le cas linéaire stationnaire sur un ouvert cylindrique borné $\Omega :=]a, b[\times \omega$ de $\mathbb{R}^d$, avec $\omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ un ouvert borné de classe C^2 et $f \in L^p(\Omega)$, $p \in]1, +\infty[$, *i.e.*

$$k\Delta^2 u - l\Delta u = f \quad \text{sur } \Omega. \quad (3.3)$$

On poursuit le travail de A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe et A. Yagi [19] pour les problèmes du second ordre que l'on adapte aux problèmes du quatrième ordre. A cette fin, on pose $r := l/k$ et on considère l'opérateur de Laplace A_0 , sur l'espace de Banach $L^q(\omega)$, $q \in]1, +\infty[$, avec une condition aux limites homogène de type Dirichlet sur ω défini par

$$\begin{cases} D(A_0) := \{\psi \in W^{2,p}(\omega) : \psi = 0 \text{ sur } \partial\omega\} \\ \forall \psi \in D(A_0), \quad A_0\psi = \Delta_\omega \psi. \end{cases} \quad (3.4)$$

Ainsi, l'équation (3.3) peut être reformulée en l'équation différentielle opérationnelle du quatrième ordre

$$u^{(4)}(x) + (2A_0 - rI)u''(x) + (A_0^2 - rA_0)u(x) = f(x), \quad x \in]a, b[,$$

où $f \in L^p(a, b; L^q(\omega))$, $p \in]1, +\infty[$, avec $u(x) := u(x, \cdot)$ et $f(x) := f(x, \cdot)/k$. On va considérer en fait, une généralisation de ce problème, en étudiant

$$u^{(4)}(x) + (2A - rI)u''(x) + (A^2 - rA)u(x) = f(x), \quad x \in]a, b[, \quad (3.5)$$

où $(A, D(A))$ un opérateur BIP d'angle $\theta_A \in [0, \pi[$ sur un espace de Banach X de type UMD (voir Définition 1.3.17 et Théorème 1.5.4) et $f \in L^p(a, b; X)$. Plus précisément, on étudie (3.5) sous l'une des conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} u(a) = \varphi_1, & u(b) = \varphi_2, \\ u''(a) = \varphi_3, & u''(b) = \varphi_4, \end{cases} \quad (\text{CB1})$$

$$\begin{cases} u'(a) = \varphi_1, & u'(b) = \varphi_2, \\ u''(a) + Au(a) = \varphi_3, & u''(b) + Au(b) = \varphi_4, \end{cases} \quad (\text{CB2})$$

$$\begin{cases} u(a) = \varphi_1, & u(b) = \varphi_2, \\ u'(a) = \varphi_3, & u'(b) = \varphi_4, \end{cases} \quad (\text{CB3})$$

$$\begin{cases} u'(a) = \varphi_1, & u'(b) = \varphi_2, \\ u''(a) = \varphi_3, & u''(b) = \varphi_4, \end{cases} \quad (\text{CB4})$$

$$\begin{cases} u(a) = \varphi_1, & u(b) = \varphi_2, \\ u''(a) + Au(a) = \varphi_3, & u''(b) + Au(b) = \varphi_4, \end{cases} \quad (\text{CB5})$$

où $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \in X$.

On obtient (voir Théorème 3.3.1, Théorème 3.3.2 et Théorème 3.4.1) l'existence et l'unicité d'une solution classique u de (3.5)-(BC*i*), $i = 1, 2, 3, 4, 5$, si et seulement si $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ appartiennent à des espaces d'interpolation réels clairement identifiés.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante : dans la section 3.2, on détaille nos hypothèses sur l'espace X et l'opérateur A ; puis on effectue quelques remarques sur nos hypothèses. Dans la section 3.3, on montre tout d'abord l'existence et l'unicité de la solution de (3.5)-(CB1) dans

le Théorème 3.3.1 et de (3.5)-(CB5) dans le Théorème 3.3.2. Cela nous permet d'établir dans la Proposition 3.3.3, une formule de représentation générale pour les solutions classiques de (3.5). Puis, on fournit un résultat sur la régularité de la différence de deux semi-groupes analytiques (Proposition 3.3.4) qui constitue un outil important pour prouver le résultat principal, le Théorème 3.4.1. Dans la section suivante, on démontre le Théorème 3.4.1 qui donne l'existence et l'unicité d'une solution classique u de (3.5) sous l'une des conditions aux limites (CB2), (CB3) ou (CB4). Dans la dernière section, on obtient le Corollaire 3.4.4 qui établit l'existence et l'unicité d'une solution u dans $W^{4,p}(\Omega)$ de (3.3).

3.2 Hypothèses

Dans tout le chapitre, $(X, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach complexe. Une partie des résultats de ce chapitre utilise le célèbre Théorème de Dore-Venni (voir Théorème 1.7.4 du Chapitre 1 ou l'article [12]) et sa généralisation due à J. Prüss et H. Sohr (voir le Théorème 1.5.7 du Chapitre 1 ou l'article [38]), qui nécessite de considérer un espace X de type UMD. (voir Théorème 1.5.4 du Chapitre 1).

Dans toute la suite de ce chapitre, $r \in \mathbb{R}^*$, A désigne un opérateur linéaire sur X et on suppose :

- (H_1) X est un espace UMD,
- (H_2) $0 \in \rho(A)$,
- (H_3) $-A \in \text{BIP}(X, \theta_A)$ pour un $\theta_A \in [0, \pi[$,
- (H_4) $[r, +\infty[\subset \rho(A)$.

Pour certains de nos résultats, on aura besoin d'une hypothèse supplémentaire :

$$(H_5) \quad \sigma(A) \subset]-\infty, 0[\quad \text{et} \quad \forall \theta \in]0, \pi[, \sup_{\lambda \in S_\theta} \|\lambda(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty,$$

qui signifie que $-A$ est un opérateur sectoriel d'angle 0 (voir Définition 1.1.29).

Remarque 3.2.1.

1. Notons que A_0 vérifie toutes les hypothèses précédentes avec $X = L^q(\omega)$, $q \in]1, +\infty[$.
2. L'hypothèse (H_4) n'est pertinente que si $r < 0$, puisque pour $r > 0$, (H_2) et (H_3) impliquent (H_4) .
3. Le cas $r = 0$ a été traité dans le chapitre précédent et dans A. Favini, R. Labbas, K. Lemrabet, S. Maingot et H. Sidibé [16] avec des conditions aux bords particulières. L'étude dans A. Favini, R. Labbas, K. Lemrabet, S. Maingot et H. Sidibé [16] est différente de la notre et requiert une formule de représentation particulière pour la solution.
4. Pour résoudre (3.5) dans le cas scalaire (avec $-A > 0$), il est nécessaire d'introduire les racines $\pm\sqrt{-A + rI}$, $\pm\sqrt{-A}$ du polynôme caractéristique

$$X^4 + (2A - r)X^2 + (A^2 - rA) = 0,$$

c'est pourquoi, dans notre cas opérationnel, on considère les opérateurs

$$L := -\sqrt{-A + rI} \quad \text{et} \quad M := -\sqrt{-A}. \quad (3.6)$$

Grâce à (H_3) et (H_4) , $-A$ et $-A + rI$ sont des opérateurs sectoriels, ainsi l'existence de L et M est assurée (voir M. Haase [23]).

5. En appliquant la Proposition 3.1.9 dans M. Haase [23], on a $D(L) = D(M)$. D'où, pour $m, n \in \mathbb{N}$ et $n \leq m$

$$D(L^m) = D(M^m) = D(L^n M^{m-n}) = D(M^n L^{m-n}).$$

6. $-A + rI \in \text{BIP}(X, \theta_A)$. Si $r > 0$, ce résultat est obtenu grâce à (H_3) (voir J. Prüss et H. Sohr [38], Theorem 3, p. 437), si $r < 0$, on utilise (H_3) et (H_4) (voir Théorème 1.5.10 du Chapitre 1, issu de l'article de W. Arendt, S. Bu et M. Haase [2], Théorème 2.3, p. 69). On en déduit que

$$-L, -M \in \text{BIP}(X, \theta_A/2),$$

(voir M. Haase [23], Proposition 3.2.1, e), p. 71). Puisque $0 < \theta_A/2 < \pi/2$, alors L et M génèrent chacun un semi-groupe analytique borné, respectivement $(e^{xL})_{x \geq 0}$ et $(e^{xM})_{x \geq 0}$ (voir J. Prüss et H. Sohr [38], Theorem 2, p. 437).

7. D'après (H_2) et (H_4) , on en déduit que $0 \in \rho(M) \cap \rho(L)$ (voir M. Haase [23], Proposition 3.3.1, e), p. 62). Ainsi, grâce aux hypothèses (H_1) , (H_2) , (H_3) et au Théorème 1.5.7, on obtient que $0 \in \rho(L + M)$.

8. Les définitions dans (3.6) impliquent que

$$\forall \psi \in D(L^2) = D(M^2), \quad (L^2 - M^2)\psi = r\psi. \quad (3.7)$$

De plus, $L - M = (L - M)(L + M)(L + M)^{-1}$, d'où

$$\forall \psi \in D(L), \quad (L - M)\psi = r(L + M)^{-1}\psi. \quad (3.8)$$

3.3 Résultats préliminaires

3.3.1 Solution particulière

On commence par résoudre le problème (3.5)-(CB1) dont les conditions aux limites sont bien adaptées à l'équation et qui peut être facilement traité en considérant deux problèmes du second ordre. On obtient :

Théorème 3.3.1. *Soit $f \in L^p(a, b; X)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $p \in]1, +\infty[$. on suppose que (H_1) , (H_2) , (H_3) et (H_4) sont vérifiées. Alors, il existe une unique solution classique de (3.5) – (CB1) si et seulement si*

$$\varphi_1, \varphi_2 \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2p}, p} \quad \text{et} \quad \varphi_3, \varphi_4 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}.$$

Cette unique solution classique est notée $F_{\Phi, f}$ avec $\Phi := (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ et est explicitement décrite par

$$\begin{aligned} F_{\Phi, f}(x) &= e^{(x-a)M} Z \varphi_1 + e^{(b-x)M} Z \varphi_2 \\ &\quad - \frac{1}{2} e^{(x-a)M} Z M^{-1} \int_a^b e^{(s-a)M} v_0(s) \, ds - \frac{1}{2} e^{(b-x)M} Z M^{-1} \int_a^b e^{(b-s)M} v_0(s) \, ds \\ &\quad + \frac{1}{2} M^{-1} \int_a^x e^{(x-s)M} v_0(s) \, ds + \frac{1}{2} M^{-1} \int_x^b e^{(s-x)M} v_0(s) \, ds \\ &\quad - e^{(b-x)M} e^{(b-a)M} \varphi_1 - e^{(x-a)M} e^{(b-a)M} \varphi_2 \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{(x-a)M} Z e^{(b-a)M} M^{-1} \int_a^b e^{(b-s)M} v_0(s) \, ds \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{(b-x)M} Z e^{(b-a)M} M^{-1} \int_a^b e^{(s-a)M} v_0(s) \, ds, \quad x \in [a, b], \end{aligned} \quad (3.9)$$

où

$$\begin{aligned}
 v_0(x) &:= e^{(x-a)L}W(\varphi_3 + A\varphi_1) + e^{(b-x)L}W(\varphi_4 + A\varphi_2) \\
 &\quad - \frac{1}{2}e^{(x-a)L}WL^{-1} \int_a^b e^{(s-a)L}f(s) ds - \frac{1}{2}e^{(b-x)L}WL^{-1} \int_a^b e^{(b-s)L}f(s) ds \\
 &\quad + \frac{1}{2}L^{-1} \int_a^x e^{(x-s)L}f(s) ds + \frac{1}{2}L^{-1} \int_x^b e^{(s-x)L}f(s) ds \\
 &\quad - e^{(b-x)L}e^{(b-a)L}(\varphi_3 + A\varphi_1) - e^{(x-a)L}e^{(b-a)L}(\varphi_4 + A\varphi_2) \\
 &\quad + \frac{1}{2}e^{(x-a)L}We^{(b-a)L}L^{-1} \int_a^b e^{(b-s)L}f(s) ds \\
 &\quad + \frac{1}{2}e^{(b-x)L}We^{(b-a)L}L^{-1} \int_a^b e^{(s-a)L}f(s) ds, \quad x \in [a, b],
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

avec $Z := (I - e^{2(b-a)M})^{-1}$ et $W := (I - e^{2(b-a)L})^{-1}$.

L'existence de Z et de W est prouvée grâce à la Remarque 2.3.1, pour $T := L$ ou M .

Démonstration. Soient $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \in X$ tels que

$$\varphi_1, \varphi_2 \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2p}, p} \quad \text{et} \quad \varphi_3, \varphi_4 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}. \tag{3.11}$$

D'après (3.11), il existe (voir A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe et A. Yagi [19], Theorem 5, p. 173) une unique solution classique

$$v_0 \in W^{2,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(A)),$$

de

$$\begin{cases} v''(x) + (A - rI)v(x) &= f(x), & p.p. x \in]a, b[\\ v(a) &= \varphi_3 + A\varphi_1 \\ v(b) &= \varphi_4 + A\varphi_2. \end{cases} \tag{3.12}$$

Ainsi, puisque $\varphi_1, \varphi_2 \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2p}, p} \subset (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}$, il existe une unique solution classique

$$u_0 \in W^{2,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(A)),$$

de

$$\begin{cases} u''(x) + Au(x) &= v_0(x), & p.p. x \in]a, b[\\ u(a) &= \varphi_1 \\ u(b) &= \varphi_2. \end{cases} \tag{3.13}$$

Par un calcul simple, on montre que u_0 satisfait (3.5)-(CB1). Puisque

$$v_0(x) = u''(x) + Au(x), \quad p.p. x \in]a, b[,$$

alors, on a

$$\begin{aligned}
 v_0''(x) + (A - rI)v_0(x) &= (u''(x) + Au(x))'' + (A - rI)(u''(x) + Au(x)) \\
 &= u^{(4)}(x) + Au''(x) + (A - rI)u''(x) + (A - rI)Au(x) \\
 &= u^{(4)}(x) + (2A - rI)u''(x) + (A^2 - rA)u(x) \\
 &= f(x).
 \end{aligned}$$

De même, on a

$$\varphi_3 + A\varphi_1 = v_0(a) = u''(a) + Au(a) = u''(a) + A\varphi_1,$$

d'où $u''(a) = \varphi_3$ et

$$\varphi_4 + A\varphi_2 = v_0(b) = u''(b) + Au(b) = u''(b) + A\varphi_2,$$

ainsi, $u''(b) = \varphi_4$. Il reste à montrer que u_0 a la régularité attendue.

Soit $w_0 \in W^{2,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(A))$ l'unique solution classique de

$$\begin{cases} w''(x) + Aw(x) &= Av_0(x), \quad p.p. x \in]a, b[\\ w(a) &= A\varphi_1 \\ w(b) &= A\varphi_2. \end{cases}$$

Alors $A^{-1}w_0$ est une solution classique de (3.13). D'où, par unicité de la solution, on obtient

$$u_0 = A^{-1}w_0 \in L^p(a, b; D(A^2)).$$

De plus, d'après (3.13), on a

$$u_0'' = v_0 - Au_0 = v_0 - w_0 \in W^{2,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(A)).$$

D'où u_0 est une solution classique de (3.5)-(CB1). L'unicité est évidente puisque si u est une solution classique de (3.5)-(CB1) alors $v := u'' + Au$ est une solution classique de (3.12). Par unicité, $v = v_0$, donc u est une solution classique de (3.13). De même, par unicité, $u = u_0$.

Réciproquement, s'il existe une solution classique de (3.5)-(CB1), alors (3.11) est vérifiée d'après (2.4).

La formule de représentation (3.9) de la solution classique $F_{\Phi, f}$ de (3.5)-(CB1) est obtenue de la manière suivante. Notons que

$$v_0 := F_{\Phi, f}'' + AF_{\Phi, f},$$

est la solution classique de (3.12), ainsi v_0 est donné par (3.10) (voir A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe et A. Yagi [19], p. 169-170). De ce fait, puisque $F_{\Phi, f}$ est la solution classique de (3.13), on utilise à nouveau A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe et A. Yagi [19] afin d'obtenir (3.9). $\square$

Le résultat concernant les conditions aux limites (CB1) peut être directement généralisé aux conditions aux limites (CB5) :

Théorème 3.3.2. *Soit $f \in L^p(a, b; X)$ avec $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ et $p \in]1, +\infty[$. On suppose que (H_1) , (H_2) , (H_3) et (H_4) sont vérifiées. Alors il existe une unique solution classique u de (3.5) – (CB5) si et seulement si*

$$\varphi_1, \varphi_2 \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2p}, p} \quad \text{et} \quad \varphi_3, \varphi_4 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}. \quad (3.14)$$

Dans ce cas l'unique solution est $u = F_{(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 - A\varphi_1, \varphi_4 - A\varphi_2), f}$.

Démonstration. Il suffit de noter que la condition (CB5) s'écrit

$$\begin{cases} u(a) &= \varphi_1, & u(b) &= \varphi_2, \\ u''(a) &= \varphi_3 - A\varphi_1, & u''(b) &= \varphi_4 - A\varphi_2. \end{cases}$$

Le Théorème 3.3.1 montre qu'il existe une unique solution classique au problème (3.5)-(CB5) si et seulement si

$$\varphi_1, \varphi_2 \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2p}, p} \quad \text{et} \quad \varphi_3 - A\varphi_1, \varphi_4 - A\varphi_2 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p},$$

ce qui équivaut à (3.14). $\square$

3.3.2 Formule de Représentation

Sous d'autres conditions aux limites, l'équation (3.5) est plus compliquée à étudier. On a alors besoin de deux résultats importants. Le premier est une formule de représentation de la solution classique de l'équation (3.5).

Proposition 3.3.3. *Si u est une solution classique de (3.5), alors il existe $K_i \in X$, $i = 1, 2, 3, 4$, tels que pour tout $x \in [a, b]$*

$$u(x) = e^{(x-a)M} K_1 + e^{(b-x)M} K_2 + e^{(x-a)L} K_3 + e^{(b-x)L} K_4 + F_{0,f}(x), \quad (3.15)$$

où $F_{0,f}$ est définie dans le Théorème 3.3.1.

Démonstration. Soit u une solution classique de (3.5). On considère la solution classique $F_{0,f}$ de (3.5)-(CB1) définie au Théorème 3.3.1, qui vérifie

$$F_{0,f}(a) = F_{0,f}(b) = F_{0,f}''(a) = F_{0,f}''(b) = 0. \quad (3.16)$$

On pose $u_{hom} := u - F_{0,f}$. Puisque u et $F_{0,f}$ sont des solutions classiques de (3.5), donc u_{hom} est une solution classique de

$$u_{hom}^{(4)}(x) + (2A - rI)u_{hom}''(x) + (A^2 - rA)u_{hom}(x) = 0, \quad p.p. x \in]a, b[.$$

Cela implique que

$$u_{hom}^{(4)}(x) = (L^2 + M^2)u_{hom}''(x) - L^2 M^2 u_{hom}(x), \quad p.p. x \in]a, b[. \quad (3.17)$$

Il reste donc à montrer l'existence des $K_i \in X$, pour $i = 1, 2, 3, 4$ tels que

$$u_{hom}(x) = e^{(x-a)M} K_1 + e^{(b-x)M} K_2 + e^{(x-a)L} K_3 + e^{(b-x)L} K_4, \quad p.p. x \in]a, b[, \quad (3.18)$$

notons que, dans ce cas, puisque $u_{hom} \in C^3(a, b; X)$, l'égalité précédente sera vraie pour tout $x \in [a, b]$.

Étant donné que

$$u_{hom} \in W^{4,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(M^4)) \quad \text{et} \quad u_{hom}'' \in L^p(a, b; D(M^2)), \quad (3.19)$$

on peut poser

$$\begin{cases} v &:= r^{-1}L^2 u_{hom} - r^{-1}u_{hom}'' &\in L^p(a, b; D(M^2)) \\ w &:= -r^{-1}M^2 u_{hom} + r^{-1}u_{hom}'' &\in L^p(a, b; D(L^2)). \end{cases}$$

D'après (3.7), on obtient

$$v + w = r^{-1}(L^2 - M^2)u_{hom} = u_{hom}. \quad (3.20)$$

De plus, d'après (3.17), pour presque tout $x \in]a, b[$, on en déduit que

$$\begin{aligned} v'' &= r^{-1}L^2 u_{hom}'' - r^{-1}u_{hom}^{(4)} \\ &= r^{-1}L^2 u_{hom}'' - r^{-1}((L^2 + M^2)u_{hom}'' - M^2 u_{hom}) \\ &= M^2 v, \end{aligned}$$

et de la même façon

$$w'' = -k^{-1}M^2 u_{hom}'' + k^{-1}u_{hom}^{(4)} = L^2 w.$$

Ainsi, v et w sont, respectivement, solutions de

$$v'' - M^2 v = 0 \quad \text{et} \quad w'' - L^2 w = 0.$$

Les égalités fonctionnelles précédentes sont posées dans $L^p(a, b; X)$ et sont justifiées grâce à (3.19). En utilisant les résultats de A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe et A. Yagi [19], on obtient que

$$v(x) = e^{(x-a)M} K_1 + e^{(b-x)M} K_2 \quad \text{et} \quad w(x) = e^{(x-a)L} K_3 + e^{(b-x)L} K_4, \quad x \in]a, b[. \quad (3.21)$$

Alors, d'après (3.20) et (3.21), on en déduit (3.18). $\square$

3.3.3 Régularité de la différence de semi-groupes

On établit ci-dessous le second résultat qui concerne la régularité de la différence entre les deux semi-groupes analytiques engendrés par L et M définis par (3.6).

Proposition 3.3.4. *On suppose que (H_1) , (H_2) , (H_3) et (H_4) sont vérifiées. Pour tout $\psi \in X$ et $x \in [a, b]$, on pose*

$$u_\psi(x) := \left(e^{(x-a)L} - e^{(x-a)M} \right) \psi \quad \text{et} \quad v_\psi(x) := \left(e^{(b-x)L} - e^{(b-x)M} \right) \psi.$$

On a

1. $u_\psi \in W^{2,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(M^2))$ et $u'_\psi \in L^p(a, b; D(M))$.
 2. $u_\psi \in W^{4,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(M^4))$ si et seulement si $\psi \in (D(M), X)_{1+\frac{1}{p}, p}$.
- De plus, dans ce cas, $u''_\psi \in L^p(a, b; D(M^2))$.
3. Les points 1. et 2. restent vrais si on remplace u_ψ par v_ψ .

La preuve est essentiellement basée sur des résultats sur les semi-groupes analytiques (voir A. Lunardi [30]) et sur les espaces d'interpolation (voir, G. Da Prato et P. Grisvard [9] p. 381-386 et H. Triebel [43], Theorem p. 96) ainsi que sur le Théorème 1.7.4 du bien connu théorème de Dore-Venni (voir Théorème 1.7.4 ou G. Dore et A. Venni [12]). Ces résultats, le Lemme 1.6.12, le Corollaire 1.6.13 et le Théorème 1.7.4 ont été rappelés dans le premier chapitre.

Notons que si $\psi \in (D(M), X)_{3+\frac{1}{p}, p}$ alors d'après le Corollaire 1.6.13, on a

$$e^{(\cdot-a)L}\psi, e^{(\cdot-a)M}\psi \in W^{4,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(M^4)).$$

On en déduit que $u_\psi \in W^{4,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(M^4))$, mais notre résultat est plus précis puisque $(D(M), X)_{3+\frac{1}{p}, p} \subset (D(M), X)_{1+\frac{1}{p}, p}$.

On établit maintenant la preuve de la Proposition 3.3.4.

Démonstration. 1. Soit $\psi \in X$. On rappelle que

$$\forall x \geq a, \quad u_\psi(x) := \left(e^{(x-a)L} - e^{(x-a)M} \right) \psi.$$

Puisque, pour $T := L$ ou M , $(e^{xT})_{x \geq 0}$ est un semi-groupe analytique, on a (voir A. Lunardi [30], Proposition 2.1.1, p. 35)

$$x \mapsto e^{(x-a)T}\psi \in C^\infty([a, b]; X) \cap C^0([a, b]; X), \quad (3.22)$$

et pour $x > a$,

$$e^{(x-a)L}\psi \in D(L^\infty) = D(M^\infty) \quad \text{et} \quad e^{(x-a)M}\psi \in D(M^\infty), \quad (3.23)$$

où

$$D(M^\infty) = D(L^\infty) := \bigcap_{k \geq 0} D(M^k) = \bigcap_{k \geq 0} D(L^k).$$

D'après (3.22) et (3.23), on en déduit

$$\forall x > a, \quad u_\psi \in C^\infty([a, b]; X) \cap C^0([a, b]; X) \quad \text{et} \quad u(x) \in D(M^\infty).$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} \forall x > a, \quad u'_\psi(x) &= (Le^{(x-a)L} - Me^{(x-a)M})\psi \\ &= M(e^{(x-a)L} - e^{(x-a)M})\psi + (L - M)e^{(x-a)L}\psi. \end{aligned}$$

D'après (3.8), on a

$$\forall x > a, \quad u'_\psi(x) = Mu_\psi(x) + r(L + M)^{-1}e^{(x-a)L}\psi.$$

De ce fait, $u_\psi \in C^1((a, b]; X) \cap C^0([a, b]; X)$ est une solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} u'(x) = Mu(x) + r(L + M)^{-1}e^{(x-a)L}\psi, & p.p. x \in]a, b], \\ u(a) = 0. \end{cases}$$

D'après la Proposition 1.7.3 (voir A. Pazy [35], Corollary 2.2 p. 106), u est donnée par la formule de la variation de la constante (1.2), d'où :

$$\begin{aligned} \forall x \in]a, b], \quad u_\psi(x) &= \int_a^x e^{(x-s)M} r(L + M)^{-1} e^{(s-a)L} \psi \, ds \\ &= r(L + M)^{-1} M^{-1} \left[M \int_a^x e^{(x-s)M} e^{(s-a)L} \psi \, ds \right]. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Puisque

$$s \mapsto e^{(s-a)L}\psi \in C^0([a, b]; X) \subset L^p(a, b; X),$$

d'après le Théorème 1.7.4, on a

$$g_\psi : x \mapsto M \int_a^x e^{(x-s)M} e^{(s-a)L} \psi \, ds \in L^p(a, b; X).$$

Ainsi, puisque $M^2(L + M)^{-1}M^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, on en déduit que

$$x \mapsto M^2 u_\psi(x) = r M^2 (L + M)^{-1} M^{-1} g_\psi(x) \in L^p(a, b; X).$$

On a aussi $u_\psi \in W^{1,p}(a, b; X)$ car $u_\psi \in C^1([a, b]; X) \cap C^0([a, b]; X)$ et

$$u'_\psi(\cdot) = Mu_\psi(\cdot) + r(L + M)^{-1}e^{(\cdot-a)L}\psi \in L^p(a, b; X).$$

De plus,

$$x \mapsto Mu'_\psi(x) = M^2 u_\psi(x) + r M(L + M)^{-1}e^{(x-a)L}\psi \in L^p(a, b; X).$$

donc $u'_\psi \in L^p(a, b; D(M))$. Puisque $e^{(x-a)L}\psi \in D(M^2)$, d'après (3.7) on obtient, pour $x \in]a, b]$, que

$$\begin{aligned} u''_\psi(x) &= \left(L^2 e^{(x-a)L} - M^2 e^{(x-a)L} \right) \psi \\ &= M^2 \left(e^{(x-a)L} - e^{(x-a)L} \right) \psi + (L^2 - M^2) e^{(x-a)L} \psi \\ &= M^2 u_\psi(x) + r e^{(x-a)L} \psi. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Ainsi $u''_\psi \in L^p(a, b; X)$, d'où $u_\psi \in W^{2,p}(a, b; X)$.

2. Première étape. On suppose que

$$\psi \in (D(M), X)_{1+\frac{1}{p}, p}.$$

On pose

$$\varphi := M\psi \in (D(M), X)_{\frac{1}{p}, p}.$$

Ainsi, pour $x \in]a, b[$, on déduit de l'égalité (3.24) que

$$\begin{aligned} M^3 u_\varphi(x) &= r M(L + M)^{-1} M^2 M^{-1} \left[M \int_a^x e^{(x-s)M} e^{(s-a)L} \varphi ds \right] \\ &= r M(L + M)^{-1} M L^{-1} \left[M \int_a^x e^{(x-s)M} L e^{(s-a)L} \varphi ds \right]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Puisque $\varphi = M\psi \in (D(M), X)_{\frac{1}{p}, p}$, d'après le Lemme 1.6.12 et le Corollaire 1.6.13, on a

$$s \longmapsto L e^{(s-a)L} \varphi \in L^p(a, b; X).$$

Ainsi, d'après le Théorème 1.7.4, on en déduit que

$$x \longmapsto M \int_a^x e^{(x-s)M} L e^{(s-a)L} \varphi ds \in L^p(a, b; X).$$

D'où, d'après (3.26) et le fait que $M(L + M)^{-1} M L^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, on obtient

$$x \longmapsto M^4 u_\psi(x) = M^3 u_\varphi \in L^p(a, b; X).$$

Il s'en suit que

$$u_\psi \in L^p(a, b; D(M^4)) \quad \text{et} \quad u_\varphi \in L^p(a, b; D(M^3)). \quad (3.27)$$

De plus, d'après (3.25) et (3.8), pour $x > a$, on a

$$\begin{aligned} u'''_\psi(x) &= M^2 u'_\psi(x) + r L e^{(x-a)L} \psi \\ &= M^2 \left(L e^{(x-a)L} - M e^{(x-a)L} \right) \psi + r L e^{(x-a)L} \psi \\ &= M^3 \left(e^{(x-a)L} - e^{(x-a)L} \right) \psi + M^2 (L - M) e^{(x-a)L} \psi + r L e^{(x-a)L} \psi \\ &= M^3 u_\psi(x) + r M^2 (L + M)^{-1} e^{(x-a)L} \psi + r L e^{(x-a)L} \psi \\ &= M^3 u_\psi(x) + r (M^2 (L + M)^{-1} + L) e^{(x-a)L} \psi \\ &= M^2 u_\varphi(x) + r (M^2 (L + M)^{-1} + L) M^{-1} e^{(x-a)L} \varphi. \end{aligned}$$

Puisque $(M^2(L + M)^{-1} + L) M^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, d'après (3.27) et (3.22), on en déduit que

$$u_\psi''' \in L^p(a, b; X). \quad (3.28)$$

De plus, pour $x > a$, on a

$$\begin{aligned} u_\psi^{(4)}(x) &= M^2 u_\varphi'(x) + r (M^2(L + M)^{-1} + L) M^{-1} L e^{(x-a)L} \varphi \\ &= M^3 u_\varphi(x) + r M^2(L + M)^{-1} e^{(x-a)L} \varphi + r (M^2(L + M)^{-1} + L) M^{-1} L e^{(x-a)L} \varphi \\ &= M^3 u_\varphi(x) + r (M^2(L + M)^{-1} L^{-1} + M^2(L + M)^{-1} M^{-1} + L M^{-1}) L e^{(x-a)L} \varphi. \end{aligned}$$

D'après le Lemme 1.6.12 et le Corollaire 1.6.13, puisque

$$\varphi = M\psi \in (D(M), X)_{\frac{1}{p}, p} = (D(L), X)_{\frac{1}{p}, p},$$

on obtient que

$$x \mapsto L e^{(x-a)L} \varphi \in L^p(a, b; X).$$

Ainsi, puisque $M^2(L + M)^{-1} L^{-1} + M^2(L + M)^{-1} M^{-1} + L M^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ et d'après (3.27), on en déduit que

$$u_\psi^{(4)} \in L^p(a, b; X). \quad (3.29)$$

D'après le point 1. (voir au dessus), (3.27), (3.28) et (3.29), on en déduit le résultat.

Seconde étape. On suppose que

$$u_\psi \in W^{4,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(M^4)).$$

D'après le Lemme 1.6.11, avec $k = n = 4$ et $j = 2$, on a $u_\psi''(a) \in (D(M^4), X)_{\frac{1}{4p} + \frac{1}{2}, p}$, ainsi, d'après le Théorème 1.6.8 et le Corollaire 1.6.9, on en déduit que $u_\psi''(a) \in (D(M), X)_{1 + \frac{1}{p}, p}$. D'après (3.25), pour $x > a$, on a

$$M^{-2} u_\psi''(x) = u_\psi(x) + r M^{-2} e^{(x-a)L} \psi.$$

En passant à la limite quand x tend vers a , on obtient $u_\psi''(a) = r \psi$ et ainsi

$$\psi = r^{-1} u_\psi''(a) \in (D(M), X)_{1 + \frac{1}{p}, p}.$$

Finalement, vu que $u_\psi(x) = M^{-1} u_\varphi(x)$, d'après (3.25), on obtient

$$\forall x > a, \quad M^2 u_\psi''(x) = M^3 u_\varphi(x) + r M L^{-1} L e^{(x-a)L} \varphi.$$

En appliquant le Corollaire 1.6.13 avec $\varphi := M\psi \in (D(M), X)_{\frac{1}{p}, p}$, le fait que $M L^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ et (3.27), on déduit de l'égalité précédente que $u_\psi'' \in L^p(a, b; D(M^2))$.

3. Il suffit d'écrire $v_\psi(x) = u_\psi(b + a - x)$. Ainsi, les propriétés de u_ψ sont vérifiées pour v_ψ . $\square$

3.4 Le Théorème principal

On peut désormais établir notre résultat principal qui vient compléter les Théorème 3.3.1 et Théorème 3.3.2 :

Théorème 3.4.1. *Soit $f \in L^p(a, b; X)$ avec $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ et $p \in]1, +\infty[$. On suppose que (H_1) , (H_2) , (H_3) et (H_4) sont vérifiées. Alors*

1. *il existe une unique solution classique u de (3.5) – (CB2) si et seulement si*

$$\varphi_1, \varphi_2 \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p} \quad \text{et} \quad \varphi_3, \varphi_4 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}. \quad (3.30)$$

Si, de plus, (H_5) est vérifiée, alors

2. *il existe une unique solution classique u de (3.5) – (CB3) si et seulement si*

$$\varphi_1, \varphi_2 \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2p}, p} \quad \text{et} \quad \varphi_3, \varphi_4 \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p}, \quad (3.31)$$

3. *il existe une unique solution classique u de (3.5) – (CB4) si et seulement si*

$$\varphi_1, \varphi_2 \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p} \quad \text{et} \quad \varphi_3, \varphi_4 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}. \quad (3.32)$$

Notons que d'après le Lemme 1.6.11, on doit uniquement montrer l'implication réciproque dans la preuve du Théorème 3.4.1. Pour chaque type de conditions aux bords, la preuve du Théorème 3.4.1 est divisée en deux étapes. Premièrement, d'après la formule de représentation obtenue dans la section 3.3.3, on montre l'unicité de la solution classique. Puis, dans un deuxième temps, on montre qu'il s'agit d'une solution classique. Dans toute la suite, on pose

$$c = b - a > 0.$$

3.4.1 Preuve du 1. du Théorème 3.4.1 (Conditions aux bords (CB2))

Démonstration. On suppose que (H_1) , (H_2) , (H_3) , (H_4) et (3.30) sont vérifiées. Tout d'abord, on prouve l'unicité de la solution de (3.5)-(CB2) en déterminant les constantes K_i , $i = 1, 2, 3, 4$, de la formule de représentation (3.15). Puis, on montre que la formule obtenue constitue une solution classique.

Première étape : Unicité.

Si u est une solution classique de (3.5)-(CB2), alors d'après la Proposition 3.3.3, u vérifie (3.15). Afin d'obtenir un modèle simplifié, on pose

$$\alpha_1 := \frac{K_1 - K_2}{2}, \quad \alpha_2 := \frac{K_3 - K_4}{2}, \quad \alpha_3 := \frac{K_1 + K_2}{2} \quad \text{et} \quad \alpha_4 := \frac{K_3 + K_4}{2}. \quad (3.33)$$

Ainsi, pour $p.p. x \in]a, b[$, u est donnée par

$$\begin{aligned} u(x) = & \left(e^{(x-a)M} - e^{(b-x)M} \right) \alpha_1 + \left(e^{(x-a)L} - e^{(b-x)L} \right) \alpha_2 + \left(e^{(x-a)M} + e^{(b-x)M} \right) \alpha_3 \\ & + \left(e^{(x-a)L} + e^{(b-x)L} \right) \alpha_4 + F_{0,f}(x). \end{aligned} \quad (3.34)$$

On considère $M^{-2}u$ au lieu de u . Puisque $F_{0,f}$ vérifie (3.16), alors les conditions aux bords impliquent les relations suivantes :

$$\begin{aligned} & \left(I + e^{(b-a)M} \right) M^{-1} \alpha_1 + \left(I + e^{(b-a)L} \right) LM^{-2} \alpha_2 \\ & + \left(I - e^{(b-a)M} \right) M^{-1} \alpha_3 + \left(I - e^{(b-a)L} \right) LM^{-2} \alpha_4 = M^{-2} \left(\varphi_1 - F'_{0,f}(a) \right), \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} & \left(e^{(b-a)M} + I \right) M^{-1} \alpha_1 + \left(e^{cL} + I \right) LM^{-2} \alpha_2 \\ & + \left(e^{cM} - I \right) M^{-1} \alpha_3 + \left(e^{cL} - I \right) LM^{-2} \alpha_4 = M^{-2} \left(\varphi_2 - F'_{0,f}(b) \right), \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\left(I - e^{(b-a)L} \right) \left(L^2 - M^2 \right) M^{-2} \alpha_2 + \left(I + e^{(b-a)L} \right) \left(L^2 - M^2 \right) M^{-2} \alpha_4 = M^{-2} \varphi_3, \quad (3.37)$$

$$\left(e^{(b-a)L} - I \right) \left(L^2 - M^2 \right) M^{-2} \alpha_2 + \left(e^{(b-a)L} + I \right) \left(L^2 - M^2 \right) M^{-2} \alpha_4 = M^{-2} \varphi_4. \quad (3.38)$$

Notons que l'on considère $M^{-2}u$ car on ne sait pas si $\alpha_i \in D(M)$, $i = 1, 2, 3, 4$. En utilisant (3.7) et en sommant (3.35) avec (3.36) et (3.37) avec (3.38), on obtient le système abstrait

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(I + e^{(b-a)M} \right) M^{-1} \alpha_1 + \left(I + e^{(b-a)L} \right) LM^{-2} \alpha_2 \\ + \left(I - e^{(b-a)M} \right) M^{-1} \alpha_3 + \left(I - e^{(b-a)L} \right) LM^{-2} \alpha_4 = M^{-2} \left(\varphi_1 - F'_{0,f}(a) \right) \\ 2 \left(I + e^{(b-a)M} \right) M^{-1} \alpha_1 + 2 \left(I + e^{cL} \right) LM^{-2} \alpha_2 = M^{-2} \left(\varphi_1 + \varphi_2 - F'_{0,f}(a) - F'_{0,f}(b) \right) \\ r \left(I - e^{(b-a)L} \right) M^{-2} \alpha_2 + r \left(I + e^{(b-a)L} \right) M^{-2} \alpha_4 = M^{-2} \varphi_3 \\ 2r \left(I + e^{cL} \right) M^{-2} \alpha_4 = M^{-2} \left(\varphi_3 + \varphi_4 \right). \end{array} \right.$$

Cela mène au système

$$\left\{ \begin{array}{l} M \left(I - e^{(b-a)M} \right) M^{-2} \alpha_3 + L \left(I - e^{(b-a)L} \right) M^{-2} \alpha_4 = M^{-2} \tilde{\varphi}_2 \\ M \left(I + e^{(b-a)M} \right) M^{-2} \alpha_1 + L \left(I + e^{(b-a)L} \right) M^{-2} \alpha_2 = M^{-2} \tilde{\varphi}_1 \\ r \left(I - e^{cL} \right) \alpha_2 = \frac{\varphi_3 - \varphi_4}{2} \\ r \left(I + e^{cL} \right) \alpha_4 = \frac{\varphi_3 + \varphi_4}{2}, \end{array} \right.$$

où

$$\tilde{\varphi}_1 := \frac{\varphi_1 + \varphi_2 - F'_{0,f}(a) - F'_{0,f}(b)}{2} \quad \text{et} \quad \tilde{\varphi}_2 := \frac{\varphi_1 - \varphi_2 - F'_{0,f}(a) + F'_{0,f}(b)}{2}. \quad (3.39)$$

Ainsi, d'après la Remarque 2.3.1 pour $T := L$ ou M , on en déduit que

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \left(I + e^{(b-a)M} \right)^{-1} \left(M^{-1} \tilde{\varphi}_1 - LM^{-1} \left(I + e^{(b-a)L} \right) \alpha_2 \right) \\ \alpha_2 = r^{-1} \left(I - e^{cL} \right)^{-1} \left(\frac{\varphi_3 - \varphi_4}{2} \right) \\ \alpha_3 = \left(I - e^{cM} \right)^{-1} \left(M^{-1} \tilde{\varphi}_2 - LM^{-1} \left(I - e^{(b-a)L} \right) \alpha_4 \right) \\ \alpha_4 = r^{-1} \left(I + e^{cL} \right)^{-1} \left(\frac{\varphi_3 + \varphi_4}{2} \right). \end{array} \right. \quad (3.40)$$

Il s'en suit que u est uniquement déterminée par (3.34), (3.39) et (3.40).

Seconde étape : Existence.

Soit u , déterminée dans la première étape. Il reste à montrer que u est la solution de notre problème avec la régularité attendue.

On pose

$$\tilde{K}_1 := K_1 + K_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \quad \text{et} \quad \tilde{K}_2 := K_2 + K_4 = \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_1 - \alpha_2,$$

ainsi, pour $x \in]a, b[$,

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{(x-a)M} \tilde{K}_1 + e^{(b-x)M} \tilde{K}_2 + \left(e^{(x-a)L} - e^{(x-a)M} \right) K_3 \\ &\quad + \left(e^{(b-x)L} - e^{(b-x)M} \right) K_4 + F_{0,f}(x). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Donc, d'après le Corollaire 1.6.13, la Proposition 3.3.4 et (2.5), il suffit de montrer que

$$\tilde{K}_1, \tilde{K}_2 \in (D(M), X)_{3+\frac{1}{p}, p} = (D(A), X)_{1+\frac{1}{2p}, p} \quad \text{et} \quad K_3, K_4 \in (D(M), X)_{1+\frac{1}{p}, p} = (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}.$$

D'après le Lemme 2.4.1, pour $T := L$ ou M , on a

$$\left(I \pm e^{2cT} \right)^{-1} = I + R_{\pm}, \quad \text{où} \quad R_{\pm}(X) \subset D(M^{\infty}) \quad \text{et} \quad R_{\pm}T = TR_{\pm}.$$

D'où, d'après (3.40), il existe $R_i \in D(M^{\infty})$, $i = 1, 2, 3, 4$, tels que

$$\begin{cases} \alpha_1 &= \frac{1}{2} M^{-1} \left(2\tilde{\varphi}_1 - r^{-1} L(\varphi_3 - \varphi_4) \right) + R_1 \\ \alpha_2 &= r^{-1} \frac{\varphi_3 - \varphi_4}{2} + R_2 \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2} M^{-1} \left(2\tilde{\varphi}_2 - r^{-1} L(\varphi_3 + \varphi_4) \right) + R_3 \\ \alpha_4 &= r^{-1} \frac{\varphi_3 + \varphi_4}{2} + R_4. \end{cases}$$

D'après (3.33) et (3.39), on obtient

$$\begin{cases} K_1 &= M^{-1} \left(\varphi_1 - F'_{0,f}(a) \right) - r^{-1} L M^{-1} \varphi_3 + \tilde{R}_1 \\ K_2 &= -M^{-1} \left(\varphi_2 - F'_{0,f}(b) \right) - r^{-1} L M^{-1} \varphi_4 + \tilde{R}_2 \\ K_3 &= r^{-1} \varphi_3 + \tilde{R}_3 \\ K_4 &= r^{-1} \varphi_4 + \tilde{R}_4, \end{cases}$$

où $\tilde{R}_i \in D(M^{\infty})$, $i = 1, 2, 3, 4$. Puisque $F_{0,f}$ est une solution classique de (3.5), d'après (2.4) et (2.5), on a

$$F'_{0,f}(a), F'_{0,f}(b) \in (D(M), X)_{2+\frac{1}{p}, p} = (D(A), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p}.$$

De plus, d'après (3.8), (3.30), on a

$$\begin{aligned} \tilde{K}_1 &= M^{-1} \left(\varphi_1 - F'_{0,f}(a) \right) - r^{-1} (L M^{-1} - I) \varphi_3 + \tilde{R}_1 + \tilde{R}_3 \\ &= M^{-1} \left(\varphi_1 - F'_{0,f}(a) \right) - r^{-1} (L - M) M^{-1} \varphi_3 + \tilde{R}_1 + \tilde{R}_3 \\ &= M^{-1} \left(\varphi_1 - F'_{0,f}(a) \right) - (L + M)^{-1} M^{-1} \varphi_3 + \tilde{R}_1 + \tilde{R}_3 \in (D(M), X)_{3+\frac{1}{p}, p}, \end{aligned}$$

d'où $\tilde{K}_1 \in (D(M), X)_{3+\frac{1}{p},p} = (D(A), X)_{1+\frac{1}{2p},p}$ et de la même manière,

$$\begin{aligned}\tilde{K}_2 &= -M^{-1}(\varphi_2 - F'_{0,f}(b)) - r^{-1}(LM^{-1} - I)\varphi_4 + \tilde{R}_2 + \tilde{R}_4 \\ &= -M^{-1}(\varphi_2 - F'_{0,f}(b)) - r^{-1}(L - M)M^{-1}\varphi_4 + \tilde{R}_2 + \tilde{R}_4 \\ &= -M^{-1}(\varphi_2 - F'_{0,f}(b)) - (L + M)^{-1}M^{-1}\varphi_4 + \tilde{R}_2 + \tilde{R}_4 \in (D(M), X)_{3+\frac{1}{p},p},\end{aligned}$$

d'où $\tilde{K}_2 \in (D(M), X)_{3+\frac{1}{p},p} = (D(A), X)_{1+\frac{1}{2p},p}$. De plus,

$$K_3 = r^{-1}\varphi_3 + \tilde{R}_3 \in (D(M), X)_{1+\frac{1}{p},p} \quad \text{et} \quad K_4 = r^{-1}\varphi_4 + \tilde{R}_4 \in (D(M), X)_{1+\frac{1}{p},p},$$

ce qui, grâce à la Proposition 3.3.4 et à (2.5), donne le résultat. $\square$

3.4.2 Preuve du 2. du Théorème 3.4.1 (Conditions aux bords (CB3))

Dans toute la suite, on suppose (H_1) , (H_2) , (H_3) , (H_4) et (H_5) . Dans la preuve du 1., la formule de représentation était facilement obtenue en prenant en compte les conditions aux bords. Cependant ici pour le 2. (et aussi pour le 3.), afin de construire la formule de représentation, on a besoin de l'inversibilité de certains déterminants opérateurs.

Plus précisément, on doit montrer que U et V donnés par

$$\begin{cases} U &:= I - e^{c(L+M)} - r^{-1}(L+M)^2(e^{cM} - e^{cL}) \\ V &:= I - e^{c(L+M)} + r^{-1}(L+M)^2(e^{cM} - e^{cL}), \end{cases} \quad (3.42)$$

sont inversibles avec inverse borné. Cela sera une conséquence d'un résultat de calcul fonctionnel. Afin d'établir ce résultat, on a besoin de poser certaines notations et de donner certains lemmes techniques. Pour $\theta \in]0, \pi[$, on désigne par $H(S_\theta)$ l'espace des fonctions holomorphes sur S_θ (voir Définition 1.1.28) à valeurs dans $\mathbb{C}$. De plus, on considère le sous-espace suivant de $H(S_\theta)$:

$$\mathcal{E}_\infty(S_\theta) := \{f \in H(S_\theta) : f = O(|z|^{-s}) \text{ } (|z| \rightarrow +\infty) \text{ pour un } s > 0\}.$$

En d'autres termes, $\mathcal{E}_\infty(S_\theta)$ est l'espace des fonctions holomorphes à décroissance polynomiale en $+\infty$. Soit T un opérateur sectoriel inversible d'angle $\theta_T \in]0, \pi[$. Si $f \in \mathcal{E}_\infty(S_\theta)$, avec $\theta \in]\theta_T, \pi[$, alors on peut définir, par le calcul fonctionnel, $f(T) \in \mathcal{L}(X)$ (voir Définition 1.3.6 ou M. Haase [23], p. 45).

On pose, pour $z \in \mathbb{C}$

$$f_r(z) := 1 - e^{-c(\sqrt{z} + \sqrt{z+r})} - r^{-1}(\sqrt{z} + \sqrt{z+r})^2(e^{-c\sqrt{z}} - e^{-c\sqrt{z+r}}),$$

et

$$g_r(z) := 1 - e^{-c(\sqrt{z} + \sqrt{z+r})} + r^{-1}(\sqrt{z} + \sqrt{z+r})^2(e^{-c\sqrt{z}} - e^{-c\sqrt{z+r}}),$$

où $c := b - a > 0$. Notons que l'on peut écrire formellement $U = f_r(-A)$ et $V = g_r(-A)$.

Lemme 3.4.2. *Pour $r > 0$, f_r et g_r ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}_+^*$.*

Démonstration. Tout d'abord, on considère pour $\tau > 0$, $\varphi(\tau) := \tau \frac{1 + e^{-\tau}}{1 - e^{-\tau}}$, ainsi φ est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ puisque

$$\varphi'(\tau) = 2 \frac{\sinh(\tau) - \tau}{e^{-\tau} (e^\tau - 1)^2} > 0, \quad \tau > 0.$$

Soit $x > 0$. Puisque $f_r(x) \leq g_r(x)$, il suffit de montrer que $f_r(x) > 0$.

On pose $s := c\sqrt{x}$ et $t := c\sqrt{x+r}$, alors $0 < s < t$ et

$$\begin{aligned} f_r(x) &= 1 - e^{-(s+t)} - \frac{t+s}{t-s} (e^{-s} - e^{-t}) \\ &= \frac{1}{t-s} [(t-s)(1 - e^{-(s+t)}) - (t+s)(e^{-s} - e^{-t})] \\ &= \frac{1}{t-s} [t(1 - e^{-s})(1 + e^{-t}) - s(1 - e^{-t})(1 + e^{-s})] \\ &= \frac{(1 - e^{-s})(1 - e^{-t})}{t-s} [\varphi(t) - \varphi(s)] > 0, \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat. $\square$

Proposition 3.4.3. *U et V , définis par (3.42), sont inversibles avec inverse borné.*

Démonstration. On considère tout d'abord le cas $r > 0$. Grâce à (H_5) , $-A$ vérifie les hypothèses de la Proposition 2.4.4. De plus, il est clair que pour un $\theta \in]0, \pi[$ donné, $f_r \in H(S_\theta)$ et $1 - f_r \in \mathcal{E}_\infty(S_\theta)$. De plus, d'après le Lemme 3.4.2, f_r ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc, en appliquant la Proposition 2.4.4, on obtient que $U = f_r(-A)$ est inversible. L'inversibilité de $V = g_r(-A)$ est obtenue de la même manière.

Maintenant, on suppose que $r < 0$. L'opérateur linéaire $-A + rI$ est un opérateur sectoriel d'après la Remarque 3.2.1, 5. et de la même façon que dans le premier cas, en posant $s := -r > 0$, on en déduit que $U = f_s(-A + rI)$ et $V = g_s(-A + rI)$ sont inversibles avec inverse borné. $\square$

Maintenant, on démontre le Théorème 3.4.1 pour les conditions aux bords (CB3). La preuve est divisée en deux étapes. Tout d'abord, on montre l'unicité de la solution de (3.5)-(CB3) en déterminant les constantes K_i , $i = 1, 2, 3, 4$, de la formule de représentation (3.15). Puis, on montre que la formule obtenue est une solution classique.

Démonstration.

Première étape : Unicité.

On suppose que (3.31) est vérifiée. Si u est une solution classique de (3.5)-(CB3) alors, comme dans la section 3.4.1, u vérifie (3.34). Puisque $F_{0,f}$ satisfait (3.16), on applique les conditions aux bords (CB3) à $M^{-1}u(\cdot)$ afin d'obtenir,

$$\begin{aligned} &(I - e^{cM}) M^{-1}\alpha_1 + (I - e^{cL}) M^{-1}\alpha_2 \\ &+ (I + e^{cM}) M^{-1}\alpha_3 + (I + e^{cL}) M^{-1}\alpha_4 = M^{-1}\varphi_1. \end{aligned} \tag{3.43}$$

$$\begin{aligned} &(e^{cM} - I) M^{-1}\alpha_1 + (e^{cL} - I) M^{-1}\alpha_2 \\ &+ (e^{cM} + I) M^{-1}\alpha_3 + (e^{cL} + I) M^{-1}\alpha_4 = M^{-1}\varphi_2. \end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned} & M(I + e^{cM})M^{-1}\alpha_1 + L(I + e^{cL})M^{-1}\alpha_2 \\ & + M(I - e^{cM})M^{-1}\alpha_3 + L(I - e^{cL})M^{-1}\alpha_4 = M^{-1}(\varphi_3 - F'_{0,f}(a)). \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} & M(e^{cM} + I)M^{-1}\alpha_1 + L(e^{cL} + I)M^{-1}\alpha_2 \\ & + M(e^{cM} - I)M^{-1}\alpha_3 + L(e^{cL} - I)M^{-1}\alpha_4 = M^{-1}(\varphi_4 - F'_{0,f}(b)). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Notons que l'on considère $M^{-1}u$ car on ne sait pas si $\alpha_i \in D(M)$, $i = 1, 2, 3, 4$. En utilisant (3.7) et en sommant (3.43) avec (3.44) et (3.45) avec (3.46), on obtient le système abstrait

$$\left\{ \begin{array}{l} 2(I + e^{cM})M^{-1}\alpha_3 + 2(I + e^{cL})M^{-1}\alpha_4 = M^{-1}(\varphi_1 + \varphi_2) \\ (e^{cM} - I)M^{-1}\alpha_1 + (e^{cL} - I)M^{-1}\alpha_2 \\ + (e^{cM} + I)M^{-1}\alpha_3 + (e^{cL} + I)M^{-1}\alpha_4 = M^{-1}\varphi_2 \\ 2M(I + e^{cM})M^{-1}\alpha_1 + 2L(I + e^{cL})M^{-1}\alpha_2 = M^{-1}(\varphi_3 + \varphi_4 - F'_{0,f}(b) - F'_{0,f}(a)) \\ M(e^{cM} + I)M^{-1}\alpha_1 + L(e^{cL} + I)M^{-1}\alpha_2 \\ + M(e^{cM} - I)M^{-1}\alpha_3 + L(e^{cL} - I)M^{-1}\alpha_4 = M^{-1}(\varphi_4 - F'_{0,f}(b)). \end{array} \right.$$

On en déduit alors que le système précédent est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} (I + e^{cM})M^{-1}\alpha_3 + (I + e^{cL})M^{-1}\alpha_4 = M^{-1}\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \\ (e^{cM} - I)M^{-1}\alpha_1 + (e^{cL} - I)M^{-1}\alpha_2 = M^{-1}\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \\ M(I + e^{cM})M^{-1}\alpha_1 + L(I + e^{cL})M^{-1}\alpha_2 = M^{-1}\left(\frac{\varphi_3 + \varphi_4 - F'_{0,f}(b) - F'_{0,f}(a)}{2}\right) \\ M(e^{cM} - I)M^{-1}\alpha_3 + L(e^{cL} - I)M^{-1}\alpha_4 = M^{-1}\left(\frac{\varphi_4 - \varphi_3 - F'_{0,f}(b) + F'_{0,f}(a)}{2}\right). \end{array} \right.$$

D'où les deux systèmes suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} (I - e^{(b-a)M})M^{-1}\alpha_1 + (I - e^{(b-a)L})M^{-1}\alpha_2 = M^{-1}\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \\ M(I + e^{(b-a)M})M^{-1}\alpha_1 + L(I + e^{cL})M^{-1}\alpha_2 = M^{-1}\tilde{\varphi}_1, \end{array} \right. \quad (3.47)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} (I + e^{cM})M^{-1}\alpha_3 + (I + e^{cL})M^{-1}\alpha_4 = M^{-1}\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \\ M(I - e^{(b-a)M})M^{-1}\alpha_3 + L(I - e^{(b-a)L})M^{-1}\alpha_4 = M^{-1}\tilde{\varphi}_2, \end{array} \right. \quad (3.48)$$

où

$$\tilde{\varphi}_1 := \frac{\varphi_3 + \varphi_4 - F'_{0,f}(a) - F'_{0,f}(b)}{2} \quad \text{et} \quad \tilde{\varphi}_2 := \frac{\varphi_3 - \varphi_4 - F'_{0,f}(a) + F'_{0,f}(b)}{2}. \quad (3.49)$$

Ainsi, montrer que les constantes α_i , $i = 1, 2, 3, 4$ sont uniquement déterminées, équivaut à montrer que les matrices Λ_1 et Λ_2 des systèmes (3.47) et (3.48) ont un déterminant inversible. D'après (3.8), on a

$$\begin{aligned} \det(\Lambda_1) &= \begin{vmatrix} (I - e^{cM})M^{-1} & (I - e^{(b-a)L})M^{-1} \\ M(I + e^{cM})M^{-1} & L(I + e^{cL})M^{-1} \end{vmatrix} \\ &= \left((I - e^{cM})L(I + e^{cL}) - M(I + e^{cM})(I - e^{(b-a)L}) \right) M^{-2} \\ &= \left(L - M - (L - M)e^{c(L+M)} - (L + M)(e^{cM} - e^{cL}) \right) M^{-2} \\ &= rM^{-2}(L + M)^{-1}U, \end{aligned}$$

et de la même manière

$$\begin{aligned} \det(\Lambda_2) &= \begin{vmatrix} (I + e^{cM})M^{-1} & (I + e^{cL})M^{-1} \\ M(I - e^{cM})M^{-1} & L(I - e^{cL})M^{-1} \end{vmatrix} \\ &= \left(L(I + e^{cM})(I - e^{cL}) - M(I - e^{cM})(I + e^{cL}) \right) M^{-2} \\ &= \left(L - M - (L - M)e^{c(L+M)} + (L + M)(e^{cM} - e^{cL}) \right) M^{-2} \\ &= rM^{-2}(L + M)^{-1}V, \end{aligned}$$

où U et V sont donnés par (3.42). Puisque U et V sont inversibles avec inverse borné (voir Proposition 3.4.3), d'après (3.47) et (3.48), on en déduit

$$\begin{cases} \alpha_1 &= \frac{1}{2r}(L + M)U^{-1} \left[L(I + e^{cL})(\varphi_1 - \varphi_2) - 2(I - e^{cL})\tilde{\varphi}_1 \right] \\ \alpha_2 &= -\frac{1}{2r}(L + M)U^{-1} \left[M(I + e^{cM})(\varphi_1 - \varphi_2) - 2(I - e^{cM})\tilde{\varphi}_1 \right] \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2r}(L + M)V^{-1} \left[L(I - e^{cL})(\varphi_1 + \varphi_2) - 2(I + e^{cL})\tilde{\varphi}_2 \right] \\ \alpha_4 &= -\frac{1}{2r}(L + M)V^{-1} \left[M(I - e^{cM})(\varphi_1 + \varphi_2) - 2(I + e^{cM})\tilde{\varphi}_2 \right]. \end{cases} \quad (3.50)$$

Notons que, puisque $F_{0,f} \in W^{4,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(M^4))$, d'après (2.4) et (2.5), on a

$$F'_{0,f}(a), F'_{0,f}(b) \in (D(M), X)_{2+\frac{1}{p}, p} = (D(A), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p}. \quad (3.51)$$

En combinant avec (3.31), on obtient que $F'_{0,f}(a), F'_{0,f}(b), \varphi_i \in D(M^2)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Ainsi, toutes les égalités précédentes sont bien définies. Donc la solution classique de (3.5)-(CB3) est caractérisée par (3.34), (3.49) et (3.50).

Seconde étape : Existence.

Il suffit de prouver que u , dont l'expression a été déterminée dans la première étape, est une solution classique de (3.5)-(CB3). D'après le Lemme 2.4.1, on a

$$U^{-1} = I + R_U \quad \text{et} \quad V^{-1} = I + R_V.$$

On pose $T := L$ ou M . Ainsi, d'après (3.23), puisque $Te^{xT} = e^{xT}T$ sur $D(T)$, pour $x \geq 0$, le Lemme 2.4.1 implique

$$R_U(X), R_V(X) \subset D(M^\infty), \quad R_UT = TR_U \quad \text{et} \quad R_VT = TR_V.$$

Donc, en tenant compte de (3.23), il existe $R_i \in D(M^\infty)$, $i = 1, 2, 3, 4$, tels que

$$\begin{cases} \alpha_1 &= \frac{1}{2r}(L+M)[L(\varphi_1 - \varphi_2) - 2\tilde{\varphi}_1] + R_1 \\ \alpha_2 &= -\frac{1}{2r}(L+M)[M(\varphi_1 - \varphi_2) - 2\tilde{\varphi}_1] + R_2 \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2r}(L+M)[L(\varphi_1 + \varphi_2) - 2\tilde{\varphi}_2] + R_3 \\ \alpha_4 &= -\frac{1}{2r}(L+M)[M(\varphi_1 + \varphi_2) - 2\tilde{\varphi}_2] + R_4. \end{cases}$$

Ainsi, d'après (3.33) et (3.49), on obtient

$$\begin{cases} K_1 &= \frac{1}{r}(L+M)[L\varphi_1 - \varphi_3 + F'_{0,f}(a)] + \tilde{R}_1 \\ K_2 &= \frac{1}{r}(L+M)[L\varphi_2 + \varphi_4 - F'_{0,f}(b)] + \tilde{R}_3 \\ K_3 &= -\frac{1}{r}(L+M)[M\varphi_1 - \varphi_3 + F'_{0,f}(a)] + \tilde{R}_2 \\ K_4 &= -\frac{1}{r}(L+M)[M\varphi_2 + \varphi_4 - F'_{0,f}(b)] + \tilde{R}_4, \end{cases} \quad (3.52)$$

avec $\tilde{R}_i \in D(M^\infty)$, $i = 1, 2, 3, 4$. On pose

$$\tilde{K}_1 := K_1 + K_3 \quad \text{et} \quad \tilde{K}_2 := K_2 + K_4,$$

de ce fait, d'après (3.41), pour $x \in]a, b[$,

$$u(x) = e^{(x-a)M}\tilde{K}_1 + e^{(b-x)M}\tilde{K}_2 + \left(e^{(x-a)L} - e^{(x-a)M}\right)K_3 + \left(e^{(b-x)L} - e^{(b-x)M}\right)K_4 + F_{0,f}(x).$$

D'où, puisque $\varphi_1, \varphi_2 \in (D(M), X)_{3+\frac{1}{p}, p}$, d'après (3.7) et (2.5), on a

$$\begin{aligned} \tilde{K}_1 = K_1 + K_3 &= \frac{1}{r}(L+M)(L-M)\varphi_1 + \tilde{R}_1 + \tilde{R}_3 \\ &= \varphi_1 + \tilde{R}_1 + \tilde{R}_3 \in (D(M), X)_{3+\frac{1}{p}, p} = (D(A), X)_{1+\frac{1}{2p}, p}, \end{aligned}$$

de la même manière,

$$\tilde{K}_2 = K_2 + K_4 = \varphi_2 + \tilde{R}_2 + \tilde{R}_4 \in (D(M), X)_{3+\frac{1}{p}, p} = (D(A), X)_{1+\frac{1}{2p}, p}.$$

Ainsi, d'après le Lemme 1.6.12 et le Corollaire 1.6.13, on obtient que

$$u_1 : x \mapsto e^{(x-a)M}\tilde{K}_1 \quad \text{et} \quad u_2 : x \mapsto e^{(b-x)M}\tilde{K}_2,$$

vérifient

$$u_1, u_2 \in W^{4,p}(a, b; X) \cap L^p\left(a, b; D(A^2)\right) \quad \text{et} \quad u_1'', u_2'' \in L^p(a, b; D(A)). \quad (3.53)$$

Donc, d'après (3.51), (3.31), $M\varphi_1, \varphi_3, F'_{0,f}(a) \in (D(M), X)_{2+\frac{1}{p}, p}$. D'après (3.52), on en déduit que

$$K_3 \in (D(M), X)_{1+\frac{1}{p}, p}.$$

D'où, d'après la Proposition 3.3.4 et (2.5), on obtient que $u_3 : x \mapsto (e^{(x-a)L} - e^{(x-a)M}) K_3$ vérifie

$$u_3 \in W^{4,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(A^2)) \quad \text{et} \quad u_3'' \in L^p(a, b; D(A)). \quad (3.54)$$

Par les mêmes arguments, $u_4 : x \mapsto (e^{(x-a)L} - e^{(x-a)M}) K_4$ vérifie

$$u_4 \in W^{4,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(A^2)) \quad \text{et} \quad u_4'' \in L^p(a, b; D(A)). \quad (3.55)$$

Puisque $F_{0,f}$ est une solution classique de (3.5), d'après (3.53), (3.54) et (3.55), on en déduit que u est une solution classique de (3.5)-(CB3). $\square$

3.4.3 Preuve du 3. du Théorème 3.4.1 (Conditions aux bords (CB4))

Démonstration. On procède de la même manière que dans la preuve précédente.

Première étape : Unicité.

On suppose que (3.32) est vérifié. Si u est une solution classique de (3.5)-(CB4), alors u est donnée par (3.34). Puisque $F_{0,f}$ vérifie (3.16), on peut appliquer les conditions aux limites (CB4) à $M^{-1}u'(a)$, $M^{-1}u'(b)$, $M^{-2}u''(a)$, $M^{-2}u''(b)$ afin d'obtenir

$$\begin{aligned} & M(I + e^{cM}) M^{-1}\alpha_1 + L(I + e^{cL}) M^{-1}\alpha_2 \\ & + M(I - e^{cM}) M^{-1}\alpha_3 + L(I - e^{cL}) M^{-1}\alpha_4 = M^{-1}(\varphi_1 - F'_{0,f}(a)) \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} & M(e^{cM} + I) M^{-1}\alpha_1 + L(e^{cL} + I) M^{-1}\alpha_2 \\ & + M(e^{cM} - I) M^{-1}\alpha_3 + L(e^{cL} - I) M^{-1}\alpha_4 = M^{-1}(\varphi_2 - F'_{0,f}(b)) \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} & M^2(I - e^{cM}) M^{-2}\alpha_1 + L^2(I - e^{cL}) M^{-2}\alpha_2 \\ & + M^2(I + e^{cM}) M^{-2}\alpha_3 + L^2(I + e^{cL}) M^{-2}\alpha_4 = M^{-2}\varphi_3 \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} & M^2(e^{cM} - I) M^{-2}\alpha_1 + L^2(e^{cL} - I) M^{-2}\alpha_2 \\ & + M^2(e^{cM} + I) M^{-2}\alpha_3 + L^2(e^{cL} + I) M^{-2}\alpha_4 = M^{-2}\varphi_4. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Notons que l'on considère $M^{-1}u$ et $M^{-2}u$ car on ne sait pas si $\alpha_i \in D(M)$, $i = 1, 2, 3, 4$. En utilisant (3.7) et en sommant (3.56) avec (3.57) et (3.58) avec (3.59), on obtient le système abstrait

$$\left\{ \begin{array}{l} 2M(I + e^{cM}) M^{-1}\alpha_1 + 2L(I + e^{cL}) M^{-1}\alpha_2 = M^{-1}(\varphi_1 + \varphi_2 - F'_{0,f}(b) - F'_{0,f}(a)) \\ \\ M(e^{cM} + I) M^{-1}\alpha_1 + L(e^{cL} + I) M^{-1}\alpha_2 \\ + M(e^{cM} - I) M^{-1}\alpha_3 + L(e^{cL} - I) M^{-1}\alpha_4 = M^{-1}(\varphi_2 - F'_{0,f}(b)) \\ \\ 2M^2(I + e^{cM}) M^{-2}\alpha_3 + 2L^2(I + e^{cL}) M^{-2}\alpha_4 = M^{-2}(\varphi_3 + \varphi_4) \\ \\ M^2(e^{cM} - I) M^{-2}\alpha_1 + L^2(e^{cL} - I) M^{-2}\alpha_2 \\ + M^2(e^{cM} + I) M^{-2}\alpha_3 + L^2(e^{cL} + I) M^{-2}\alpha_4 = M^{-2}\varphi_4. \end{array} \right.$$

On en déduit alors que le système précédent est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} M(I + e^{cM})M^{-1}\alpha_1 + L(I + e^{cL})M^{-1}\alpha_2 = M^{-1}\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2 - F'_{0,f}(b) - F'_{0,f}(a)}{2}\right) \\ M(e^{cM} - I)M^{-1}\alpha_3 + L(e^{cL} - I)M^{-1}\alpha_4 = M^{-1}\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1 - F'_{0,f}(b) + F'_{0,f}(a)}{2}\right) \\ M^2(I + e^{cM})M^{-2}\alpha_3 + L^2(I + e^{cL})M^{-2}\alpha_4 = M^{-2}\left(\frac{\varphi_3 + \varphi_4}{2}\right) \\ M^2(e^{cM} - I)M^{-2}\alpha_1 + L^2(e^{cL} - I)M^{-2}\alpha_2 = M^{-2}\left(\frac{\varphi_4 - \varphi_3}{2}\right), \end{array} \right.$$

ce qui mène aux deux systèmes du second ordre suivants

$$\left\{ \begin{array}{l} (I + e^{cM})\alpha_1 + LM^{-1}(I + e^{cL})\alpha_2 = M^{-1}\tilde{\varphi}_1 \\ (I - e^{cM})\alpha_1 + L^2M^{-2}(I - e^{cL})\alpha_2 = M^{-2}\left(\frac{\varphi_3 - \varphi_4}{2}\right), \end{array} \right. \quad (3.60)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} (I - e^{cM})\alpha_3 + LM^{-1}(I - e^{cL})\alpha_4 = M^{-1}\tilde{\varphi}_2 \\ (I + e^{cM})\alpha_3 + L^2M^{-2}(I + e^{cL})\alpha_4 = M^{-2}\left(\frac{\varphi_3 + \varphi_4}{2}\right), \end{array} \right. \quad (3.61)$$

où

$$\tilde{\varphi}_1 := \frac{\varphi_1 + \varphi_2 - F'_{0,f}(a) - F'_{0,f}(b)}{2} \quad \text{et} \quad \tilde{\varphi}_2 := \frac{\varphi_1 - \varphi_2 - F'_{0,f}(a) + F'_{0,f}(b)}{2}. \quad (3.62)$$

Soient Λ_1 et Λ_2 leurs matrices correspondantes. D'après (3.8), on a

$$\begin{aligned} \det(\Lambda_1) &= \begin{vmatrix} I + e^{cM} & LM^{-1}(I + e^{cL}) \\ I - e^{cM} & L^2M^{-2}(I - e^{cL}) \end{vmatrix} \\ &= L^2M^{-2}(I - e^{cL})(I + e^{cM}) - LM^{-1}(I + e^{cL})(I - e^{cM}) \\ &= rLM^{-2}V(L + M)^{-1}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \det(\Lambda_2) &= \begin{vmatrix} I - e^{cM} & LM^{-1}(I - e^{cL}) \\ I + e^{cM} & L^2M^{-2}(I + e^{cL}) \end{vmatrix} \\ &= L^2M^{-2}(I - e^{cM})(I + e^{cL}) - LM^{-1}(I - e^{cL})(I + e^{cM}) \\ &= rLM^{-2}(L + M)^{-1}U, \end{aligned}$$

où U et V sont donnés par (3.42). Puisque U et V sont inversibles dans $\mathcal{L}(X)$ (voir Proposi-

tion 3.4.3), d'après (3.60) et (3.61), on en déduit que

$$\begin{cases} \alpha_1 &= \frac{1}{2r} (L + M) V^{-1} \left[2(I - e^{cL}) L M^{-1} \tilde{\varphi}_1 - (I + e^{cL}) M^{-1} (\varphi_3 - \varphi_4) \right] \\ \alpha_2 &= -\frac{1}{2r} (L + M) V^{-1} \left[2(I - e^{cM}) M L^{-1} \tilde{\varphi}_1 - (I + e^{cM}) L^{-1} (\varphi_3 - \varphi_4) \right] \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2r} (L + M) U^{-1} \left[2(I + e^{cL}) L M^{-1} \tilde{\varphi}_2 - (I - e^{cL}) M^{-1} (\varphi_3 + \varphi_4) \right] \\ \alpha_4 &= -\frac{1}{2r} (L + M) U^{-1} \left[2(I + e^{cM}) M L^{-1} \tilde{\varphi}_2 - (I - e^{cM}) L^{-1} (\varphi_3 + \varphi_4) \right]. \end{cases} \quad (3.63)$$

Ainsi, d'après (3.33) et (3.63) on obtient l'unicité de la solution de (3.5)-(CB4).

Seconde étape : Existence.

Soit u , déterminée dans la première étape, alors u est aussi donnée par (3.41). De ce fait, d'après (2.5), il suffit de montrer que $\tilde{K}_1, \tilde{K}_2 \in (D(M), X)_{3+\frac{1}{p}, p}$ et $K_3, K_4 \in (D(M), X)_{1+\frac{1}{p}, p}$. D'après le Lemme 2.4.1 et (3.23), il existe $R_i \in D(M^\infty)$, $i = 1, 2, 3, 4$, tels que

$$\begin{cases} \alpha_1 &= \frac{1}{2r} (L + M) \left[2LM^{-1} \tilde{\varphi}_1 - M^{-1} (\varphi_3 - \varphi_4) \right] + R_1 \\ \alpha_2 &= -\frac{1}{2r} (L + M) \left[2ML^{-1} \tilde{\varphi}_1 - L^{-1} (\varphi_3 - \varphi_4) \right] + R_2 \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2r} (L + M) \left[2LM^{-1} \tilde{\varphi}_2 - M^{-1} (\varphi_3 + \varphi_4) \right] + R_3 \\ \alpha_4 &= -\frac{1}{2r} (L + M) \left[2ML^{-1} \tilde{\varphi}_2 - L^{-1} (\varphi_3 + \varphi_4) \right] + R_4. \end{cases}$$

Ainsi, d'après (3.33) et (3.62), on obtient

$$\begin{cases} K_1 &= \frac{1}{r} (L + M) \left[LM^{-1} (\varphi_1 - F'_{0,f}(a)) - M^{-1} \varphi_3 \right] + \tilde{R}_1 \\ K_2 &= \frac{1}{r} (L + M) \left[LM^{-1} (-\varphi_2 + F'_{0,f}(b)) - M^{-1} \varphi_4 \right] + \tilde{R}_2 \\ K_3 &= -\frac{1}{r} (L + M) \left[ML^{-1} (\varphi_1 - F'_{0,f}(a)) - L^{-1} \varphi_3 \right] + \tilde{R}_3 \\ K_4 &= -\frac{1}{r} (L + M) \left[ML^{-1} (-\varphi_2 + F'_{0,f}(b)) - L^{-1} \varphi_4 \right] + \tilde{R}_4, \end{cases} \quad (3.64)$$

avec $\tilde{R}_i \in D(M^\infty)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Puisque $\varphi_1, F'_{0,f}(a) \in (D(M), X)_{2+\frac{1}{p}, p}$ et $\varphi_3 \in (D(M), X)_{1+\frac{1}{p}, p}$, d'après (3.7), on a

$$\begin{aligned} \tilde{K}_1 &= K_1 + K_3 = \frac{1}{r} (L + M) \left[(LM^{-1} - ML^{-1}) (\varphi_1 - F'_{0,f}(a)) + (L^{-1} - M^{-1}) \varphi_3 \right] + \tilde{R}_1 + \tilde{R}_2 \\ &= \frac{1}{r} (L + M) \left[(L^2 - M^2) M^{-1} L^{-1} (\varphi_1 - F'_{0,f}(a)) - (L - M) M^{-1} L^{-1} \varphi_3 \right] + \tilde{R}_1 + \tilde{R}_2 \\ &= (L + M) M^{-1} L^{-1} (\varphi_1 - F'_{0,f}(a)) - M^{-1} L^{-1} \varphi_3 + \tilde{R}_1 + \tilde{R}_2 \in (D(M), X)_{3+\frac{1}{p}, p}, \end{aligned}$$

de la même manière, on a

$$\tilde{K}_2 = K_2 + K_4 = (L + M) M^{-1} L^{-1} (F'_{0,f}(b) - \varphi_2) - M^{-1} L^{-1} \varphi_4 + \tilde{R}_2 + \tilde{R}_4 \in (D(M), X)_{3+\frac{1}{p}, p}.$$

Ainsi, d'après le Lemme 1.6.12 et la Corollaire 1.6.13 et (2.5), on obtient que

$$u_1 : x \mapsto e^{(x-a)M} \tilde{K}_1 \quad \text{et} \quad u_2 : x \mapsto e^{(b-x)M} \tilde{K}_2,$$

vérifient

$$u_1, u_2 \in W^{4,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(A^2)) \quad \text{et} \quad u_1'', u_2'' \in L^p(a, b; D(A)). \quad (3.65)$$

De plus, puisque $(L+M)\varphi_1, (L+M)F'_{0,f}(a), \varphi_3 \in (D(M), X)_{1+\frac{1}{p}, p}$, d'après (3.64), on en déduit que

$$K_3 \in (D(M), X)_{1+\frac{1}{p}, p}.$$

D'où, d'après la Proposition 3.3.4 et (2.5), on obtient que $u_3 : x \mapsto (e^{(x-a)L} - e^{(x-a)M}) K_3$ vérifie

$$u_3 \in W^{4,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(A^2)) \quad \text{et} \quad u_3'' \in L^p(a, b; D(A)). \quad (3.66)$$

De même, puisque $(L+M)\varphi_2, (L+M)F'_{0,f}(b), \varphi_4 \in (D(M), X)_{1+\frac{1}{p}, p}$, d'après (3.64), on en déduit que

$$K_4 \in (D(M), X)_{1+\frac{1}{p}, p}.$$

D'où, d'après la Proposition 3.3.4 et (2.5), on obtient que $u_4 : x \mapsto (e^{(x-a)L} - e^{(x-a)M}) K_4$ vérifie

$$u_4 \in W^{4,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(A^2)) \quad \text{et} \quad u_4'' \in L^p(a, b; D(A)). \quad (3.67)$$

Puisque $F_{0,f}$ est une solution classique de (3.5), d'après (3.65), (3.66) et (3.67), on en déduit que $u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$ est une solution classique de (3.5)-(CB4). $\square$

3.4.4 Application

Du Théorème 3.4.1, on déduit des résultats de régularité pour l'équation (3.3) sous certaines conditions aux limites particulières (d'autres conditions aux limites peuvent être considérées). On va rendre explicite le Théorème 3.3.2 en considérant, par exemple, le problème (3.3)-(CB5) avec $A := A_0$ défini par (3.4).

Corollaire 3.4.4. *On considère un domaine cylindrique $\Omega :=]a, b[\times \omega$ de $\mathbb{R}^n$, où $n \geq 2$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^{n-1}$, où $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, avec un bord de classe C^2 . Soit $f \in L^p(\Omega)$ avec $p \in]1, +\infty[$ et $p > \frac{n}{2}$; soit $l, k \in \mathbb{R}^*$ tels que $l > k C_\omega$, où $C_\omega > 0$ est la constante de Poincaré dans ω . Alors, il existe une unique solution $u \in W^{4,p}(\Omega)$ de*

$$\left\{ \begin{array}{ll} k\Delta^2 u(x, y) - l\Delta u(x, y) = f(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = \Delta u(x, y) = 0, & (x, y) \in]a, b[\times \partial\omega \\ u(a, y) = \varphi_1(y), & y \in \omega \\ u(b, y) = \varphi_2(y), & y \in \omega \\ \Delta u(a, y) = \varphi_3(y), & y \in \omega \\ \Delta u(b, y) = \varphi_4(y), & y \in \omega, \end{array} \right. \quad (3.68)$$

si et seulement si

$$\varphi_1, \varphi_2 \in W^{2,p}(\omega) \cap W_0^{1,p}(\omega) \quad \text{et} \quad \Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \in W^{2-\frac{1}{p},p}(\omega) \cap W_0^{1,p}(\omega).$$

Démonstration. On pose $X := L^p(\omega)$ et

$$\begin{cases} D(A_0) &:= W^{2,p}(\omega) \cap W_0^{1,p}(\omega) \\ (A_0\psi)(y) &:= \Delta_y \psi(y). \end{cases}$$

avec ces notations, le problème (3.68) devient (3.5) avec les conditions aux limites (CB5). D'après J. L. Rubio de Francia [40] (Proposition 3, p. 207), X satisfait (H_1) et d'après D. Gilbarg et N. Trudinger [20] (Theorem 9.15 et Lemma 9.17), A_0 satisfait (H_2) . De plus, (H_3) est satisfait d'après J. Prüss et H. Sohr [39] (Theorem C, p. 166-167). Puisque C_ω est la constante de Poincaré dans ω , on a $[C_\omega, +\infty[\subset \rho(A_0)$. De plus, $r := l/k > C_\omega$, d'où (H_4) est satisfait.

Finalement, toutes les hypothèses du Théorème 3.3.2 sont vérifiées. il s'en suit qu'il existe une unique solution classique de (3.5)-(CB5) si et seulement si

$$\varphi_1, \varphi_2 \in (D(A_0), X)_{1+\frac{1}{2p}, p} \quad \text{et} \quad \varphi_3, \varphi_4 \in (D(A_0), X)_{\frac{1}{2p}, p}. \quad (3.69)$$

Maintenant, il reste à montrer que si $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ vérifient (3.69), alors la solution classique u vérifie $u \in W^{4,p}(\Omega)$. A cette fin, on va expliciter l'espace d'interpolation qui apparaît dans (3.69). On a

$$(D(A_0), X)_{\frac{1}{2p}, p} = (W^{2,p}(\omega) \cap W_0^{1,p}(\omega), L^p(\omega))_{\frac{1}{2p}, p},$$

et d'après P. Grisvard [22] (p. 683, proposizione 3 et p. 681, 1.10) et H. Triebel [43] (p. 317, Theorem 1), puisque $2 - \frac{1}{p} > 1$ n'est jamais un entier, on a

$$(W^{2,p}(\omega), L^p(\omega))_{\frac{1}{2p}, p} = W^{2-\frac{1}{p}, p}(\omega). \quad (3.70)$$

On pose $\nu := 2 - \frac{1}{p} - \frac{n-1}{p} = 2 - \frac{n}{p}$. Puisque $p > \frac{n}{2}$, on a $\nu > 0$. D'après le théorème d'injection de Sobolev (voir H. Triebel [43], section 4.6.1, p. 327-328), on a :

$$W^{2-\frac{1}{p}, p}(\omega) \hookrightarrow C(\overline{\omega}).$$

Ainsi, les traces des éléments de l'espace décrit dans (3.70) sont bien définies. D'après P. Grisvard [21] (Proposition 5.9, p. 334) et H. Triebel [43] (section 4.3.3, Theorem, p. 321), on en déduit que

$$(D(A_0), X)_{\frac{1}{2p}, p} = \left\{ \psi \in W^{2-\frac{1}{p}, p}(\omega) : \psi = 0 \text{ sur } \partial\omega \right\},$$

et

$$\begin{aligned} (D(A_0), X)_{1+\frac{1}{2p}, p} &= \left\{ \psi \in D(A_0) : A_0\psi \in W^{2-\frac{1}{p}, p}(\omega) \text{ et } \Delta\psi = 0 \text{ sur } \partial\omega \right\} \\ &= \left\{ \psi \in W^{2,p}(\omega) : \Delta\psi \in W^{2-\frac{1}{p}, p}(\omega) \text{ et } \psi = \Delta\psi = 0 \text{ sur } \partial\omega \right\}. \end{aligned}$$

De ce fait, la solution classique u de

$$u^{(4)}(x) + (2A_0 - rI)u''(x) + (A_0^2 - rA_0)u(x) = f(x), \quad p.p. x \in]a, b[,$$

vérifie

$$\begin{cases} u \in W^{4,p}(a, b; L^p(\omega)) \\ x \mapsto A_0 u''(x) \in L^p(a, b; L^p(\omega)) \\ x \mapsto A_0^2 u(x) \in L^p(a, b; L^p(\omega)), \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} u(a, y) = \varphi_1(y), & u(b, y) = \varphi_2(y), & y \in \omega \\ \Delta u(a, y) = \varphi_3(y), & \Delta u(b, y) = \varphi_4(y), & y \in \omega \\ u(x, \zeta) = \Delta u(x, \zeta) = 0, & & x \in]a, b[\text{ et } \zeta \in \partial\omega. \end{cases}$$

Or, puisque

$$\begin{cases} u \in W^{2,p}(a, b; L^p(\omega)) \cap L^p(a, b; W^{2,p}(\omega) \cap W_0^{1,p}(\omega)) \\ u(x, \zeta) = 0, \quad \zeta \in \partial\omega \\ \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = 0, \quad \text{sur } \partial\omega, \end{cases}$$

on peut appliquer sur $u(x, \cdot)$, $x \in]a, b[$, grâce au théorème de prolongement de Sobolev sur $\mathbb{R}^{n-1}$, un opérateur de prolongement qui injecte continûment $L^p(\omega)$ dans $L^p(\mathbb{R}^{n-1})$ et qui injecte continûment $W^{2,p}(\omega)$ dans $W^{2,p}(\mathbb{R}^{n-1})$. Ainsi, d'après le Théorème de Mihlin (voir Théorème 1.2.20 et Corollaire 1.2.21 du Chapitre 1 ou l'article [31]), on en déduit que

$$u \in W^{2,p}(]a, b[\times \omega) = W^{2,p}(\Omega).$$

En réitérant les mêmes arguments aux autres régularités, on obtient que $u \in W^{4,p}(\Omega)$. $\square$

L'équation (3.3) peut être étudiée avec d'autres conditions aux limites en utilisant les résultats du Théorème 3.4.1. On peut aussi obtenir des résultats anisotropiques en considérant $f \in L^p(a, b; L^q(\omega))$ avec $p, q \in]1, +\infty[$.

Chapitre 4

Généralisation

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on généralise le travail effectué dans le chapitre précédant en considérant P et Q , deux opérateurs linéaires sur un espace de Banach X , $p \in]1, +\infty[$ et $f \in L^p(a, b; X)$. On cherche à étudier ici l'équation opérationnelle

$$u^{(4)}(x) + (P + Q)u''(x) + PQ u(x) = f(x), \quad x \in]a, b[, \quad (4.1)$$

sous l'une des conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} u(a) = \varphi_1, & u(b) = \varphi_2, \\ u''(a) = \varphi_3, & u''(b) = \varphi_4, \end{cases} \quad (\text{CB1})$$

$$\begin{cases} u'(a) = \varphi_1, & u'(b) = \varphi_2, \\ u''(a) + Pu(a) = \varphi_3, & u''(b) + Pu(b) = \varphi_4, \end{cases} \quad (\text{CB2})$$

$$\begin{cases} u(a) = \varphi_1, & u(b) = \varphi_2, \\ u'(a) = \varphi_3, & u'(b) = \varphi_4, \end{cases} \quad (\text{CB3})$$

$$\begin{cases} u'(a) = \varphi_1, & u'(b) = \varphi_2, \\ u''(a) = \varphi_3, & u''(b) = \varphi_4, \end{cases} \quad (\text{CB4})$$

$$\begin{cases} u(a) = \varphi_1, & u(b) = \varphi_2, \\ u''(a) + Pu(a) = \varphi_3, & u''(b) + Pu(b) = \varphi_4. \end{cases} \quad (\text{CB5})$$

où $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \in X$.

L'équation (4.1) a déjà été étudiée par A. Eltaïef [14] sur $]0, +\infty[$ et non sur $]a, b[$ sous des conditions aux limites de type (CB3) et des hypothèses différentes telles que l'inversibilité de l'opérateur $L - M$ (et donc de $P - Q$).

Dans notre étude, afin d'obtenir une généralisation du chapitre précédent, on a considéré l'hypothèse (H_5) (voir Section 4.2) qui rend impossible l'inversibilité de $L - M$ (voir Remarque 4.3.3, 4.). On pourrait aussi réaliser une étude s'inspirant du travail de A. Eltaïef [14] concernant nos problèmes (4.1)-(CBi), $i = 1, 2, 3, 4, 5$, en remplaçant l'hypothèse (H_5) par $0 \in \rho(P - Q)$.

On obtient (voir Théorème 4.3.1, Théorème 4.3.2 et Théorème 4.4.1) l'existence et l'unicité d'une solution classique u de (4.1)-(BCi), $i = 1, 2, 3, 4, 5$, si et seulement si $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ appartiennent à des espaces d'interpolation réels clairement identifiés.

On cherche une solution classique u de (4.1), ce qui dans ce chapitre signifie une solution u telle que

$$u \in W^{4,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(PQ)) \quad \text{et} \quad u'' \in L^p(a, b; D(P) \cap D(Q)).$$

On pose pour toute la suite $c = b - a$ et on définit U et V par

$$\begin{cases} U &:= I - e^{c(L+M)} - B^{-1}(L+M)^2(e^{cM} - e^{cL}) = I - T_- \in \mathcal{L}(X) \\ V &:= I - e^{c(L+M)} + B^{-1}(L+M)^2(e^{cM} - e^{cL}) = I - T_+ \in \mathcal{L}(X), \end{cases} \quad (4.2)$$

où $L = -\sqrt{-Q}$, $M = -\sqrt{-P}$ et $B \in \mathcal{L}(X)$ est un prolongement inversible de $P - Q$.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante : dans la section 4.2, on détaille nos hypothèses sur l'espace X et les opérateurs P et Q ; puis on effectue quelques remarques sur nos hypothèses. Dans la section 4.3, on établit tout d'abord l'existence et l'unicité de la solution de (4.1)-(CB1) dans le Théorème 4.3.1 et de (4.1)-(CB5) dans le 4.3.2. Cela nous permet de déterminer dans la Proposition 4.3.6, une formule de représentation générale pour les solutions classiques de (4.1). Puis, on établit un résultat sur la régularité de la différence de deux semi-groupes analytiques (Théorème 4.3.7) qui constitue un outil important pour prouver le résultat principal, le Théorème 4.4.1. Finalement, dans la section 4.4, on prouve le Théorème 4.4.1, qui complète le Théorème 4.3.1, qui donne l'existence et l'unicité d'une solution classique u de (4.1) sous l'une des conditions aux limites (CB2), (CB3) ou (CB4).

4.2 Hypothèses

Dans tout le chapitre, $(X, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach complexe. De plus, on suppose :

- (H₁) X est un espace UMD,
- (H₂) P et Q sont fermés et $0 \in \rho(P) \cap \rho(Q)$,
- (H₃) $D(P) = D(Q)$ et $P^{-1}Q^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$,
- (H₄) $-P, -Q \in \text{BIP}(X, \theta_0)$, pour un $\theta_0 \in [0, \pi[$,
- (H₅) $P - Q$ admet un prolongement inversible $B \in \mathcal{L}(X)$.

Certains de nos résultats nécessiteront une hypothèse supplémentaire :

$$(H_6) \quad 0 \in \rho(U) \cap \rho(V).$$

Remarque 4.2.1.

1. Les problèmes

$$\begin{cases} u^{(4)}(x) + (2A - rI)u''(x) + (A^2 - rA)u(x) = f(x), & x \in]a, b[, \\ \text{(CBi)}, \end{cases}$$

où $i = 1, 2, 3, 4$ correspondent aux problèmes (4.1)-(CBi) du chapitre précédent avec $P = A$ et $Q = A - rI$.

2. L'hypothèse (H_2) permet de définir $L = -\sqrt{-Q}$ et $M = -\sqrt{-P}$, qui sont générateurs infinitésimaux de semi-groupes analytiques bornés.
3. L'hypothèse (H_3) entraîne que : $D(PQ) = D(QP) = D(P^2) = D(Q^2)$ et aussi

$$D(LM) = D(ML) = D(L^2) = D(M^2) \quad \text{et} \quad LM = ML. \quad (4.3)$$

4. $-L$ et $-M$ sont BIP $(X, \theta_0/2)$, donc d'après Théorème 1.5.7, $L+M$ est BIP $(X, \theta_0/2+\varepsilon)$ avec $\varepsilon > 0$ aussi petit qu'on veut et $L+M$ est inversible (voir J. Prüss et H. Sohr [38], Corollary 4 et la remarque en fin de la page 445).
5. L'hypothèse (H_5) signifie que les opérateurs $-P$ et $-Q$ vérifie la propriété suivante :

$$\exists B \in \mathcal{L}(X) : 0 \in \rho(B) \quad \text{et} \quad P = Q + B.$$

Si $P = A$ et $Q = A - rI$ alors $P - Q = rI \in \mathcal{L}(X)$ et est inversible si $r \neq 0$.

6. Supposons que les hypothèses (H_1) , (H_2) , (H_3) , (H_4) et (H_5) sont vérifiées. Alors (H_6) est réalisée si $c = b - a$ est suffisamment grand. En effet, vu que L , M et $L+M$ sont inversibles à inverse borné et génèrent des semi-groupes analytiques bornés, il existe $\delta > 0$, $C \geq 1$ (voir A. Lunardi [30], (2.1.1) et (2.1.2) p. 35 en prenant $\omega = -\delta$ où $\delta > 0$ est suffisamment petit) tels que

$$\max \left\{ \|e^{x(L+M)}\|_{\mathcal{L}(X)}, \|M^2 e^{xM}\|_{\mathcal{L}(X)}, \|L^2 e^{xL}\|_{\mathcal{L}(X)} \right\} \leq C e^{-\delta x},$$

et donc

$$\begin{aligned} M_B &:= \max \left\{ \|T_-\|_{\mathcal{L}(X)}, \|T_+\|_{\mathcal{L}(X)} \right\} \\ &\leq \|e^{c(L+M)}\|_{\mathcal{L}(X)} + \|B^{-1} (L+M)^2 M^{-2}\|_{\mathcal{L}(X)} \|M^2 e^{cM}\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\quad + \|B^{-1} (L+M)^2 L^{-2}\|_{\mathcal{L}(X)} \|L^2 e^{cL}\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq \left(1 + \|B^{-1} (L+M)^2 M^{-2}\|_{\mathcal{L}(X)} + \|B^{-1} (L+M)^2 L^{-2}\|_{\mathcal{L}(X)} \right) C e^{-\delta c} \end{aligned}$$

donc, pour $c = b - a$ assez grand, $\|T_-\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$ et $\|T_+\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$. D'où U, V sont inversibles.

7. Dans certains cas particuliers, on pourra vérifier l'hypothèse (H_6) en utilisant le calcul fonctionnel des opérateurs sectoriels.

4.3 Résultats préliminaires

4.3.1 Solution particulière

On commence par résoudre le problème (4.1)-(CB1) dont les conditions aux limites sont bien adaptées à l'équation et qui peut être facilement traité en considérant deux problèmes du second ordre. On obtient :

Théorème 4.3.1. Soit $f \in L^p(a, b; X)$, $p \in]1, +\infty[$ et supposons que les hypothèses (H_1) , (H_2) , (H_3) et (H_4) sont vérifiées. Alors, le problème (4.1)-(CB1) admet une unique solution classique u si et seulement si

$$\varphi_1, \varphi_2 \in (D(P), X)_{1+\frac{1}{2p}, p} \quad \text{et} \quad \varphi_3, \varphi_4 \in (D(P), X)_{\frac{1}{2p}, p}. \quad (4.4)$$

Cette unique solution classique est notée $F_{\Phi, f}$ avec $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ et est explicitement décrite par

$$\begin{aligned} F_{\Phi, f}(x) &= e^{(x-a)M} Z \varphi_1 + e^{(b-x)M} Z \varphi_2 \\ &\quad - \frac{1}{2} e^{(x-a)M} Z M^{-1} \int_a^b e^{(s-a)M} v_0(s) \, ds - \frac{1}{2} e^{(b-x)M} Z M^{-1} \int_a^b e^{(b-s)M} v_0(s) \, ds \\ &\quad + \frac{1}{2} M^{-1} \int_a^x e^{(x-s)M} v_0(s) \, ds + \frac{1}{2} M^{-1} \int_x^b e^{(s-x)M} v_0(s) \, ds \\ &\quad - e^{(b-x)M} e^{cM} \varphi_1 - e^{(x-a)M} e^{cM} \varphi_2 \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{(x-a)M} Z e^{cM} M^{-1} \int_a^b e^{(b-s)M} v_0(s) \, ds \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{(b-x)M} Z e^{cM} M^{-1} \int_a^b e^{(s-a)M} v_0(s) \, ds, \quad x \in [a, b], \end{aligned} \quad (4.5)$$

où

$$\begin{aligned} v_0(x) &:= e^{(x-a)L} W (\varphi_3 + P \varphi_1) + e^{(b-x)L} W (\varphi_4 + P \varphi_2) \\ &\quad - \frac{1}{2} e^{(x-a)L} W L^{-1} \int_a^b e^{(s-a)L} f(s) \, ds - \frac{1}{2} e^{(b-x)L} W L^{-1} \int_a^b e^{(b-s)L} f(s) \, ds \\ &\quad + \frac{1}{2} L^{-1} \int_a^x e^{(x-s)L} f(s) \, ds + \frac{1}{2} L^{-1} \int_x^b e^{(s-x)L} f(s) \, ds \\ &\quad - e^{(b-x)L} e^{cL} (\varphi_3 + P \varphi_1) - e^{(x-a)L} e^{cL} (\varphi_4 + P \varphi_2) \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{(x-a)L} W e^{cL} L^{-1} \int_a^b e^{(b-s)L} f(s) \, ds \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{(b-x)L} W e^{cL} L^{-1} \int_a^b e^{(s-a)L} f(s) \, ds, \quad x \in [a, b], \end{aligned} \quad (4.6)$$

avec $Z := (I - e^{2cM})^{-1}$ et $W := (I - e^{2cL})^{-1}$.

L'existence de Z et de W est prouvée grâce à la Remarque 2.3.1, pour $T := L$ ou M .

Démonstration. Supposons que (4.4) soit vérifiée, alors il existe (voir A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe et A. Yagi [18], Theorem 5, p. 173) une unique solution classique

$$v_0 \in W^{2,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(P)),$$

de

$$\begin{cases} v''(x) + Qv(x) &= f(x), & p.p. \, x \in]a, b[\\ v(a) &= \varphi_3 + P \varphi_1 \\ v(b) &= \varphi_4 + P \varphi_2. \end{cases} \quad (4.7)$$

Ainsi, puisque $\varphi_1, \varphi_2 \in (D(P), X)_{1+\frac{1}{2p}, p} \subset (D(P), X)_{\frac{1}{2p}, p}$, il existe une unique solution classique

$$u_0 \in W^{2,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(P)),$$

de

$$\begin{cases} u''(x) + Pu(x) &= v_0(x), \quad p.p. \ x \in]a, b[\\ u(a) &= \varphi_1 \\ u(b) &= \varphi_2. \end{cases} \quad (4.8)$$

Par un calcul simple, on montre que u_0 satisfait (4.1)-(CB1). Puisque

$$v_0(x) = u''(x) + Pu(x), \quad p.p. \ x \in]a, b[,$$

alors, d'après (4.3), on a

$$\begin{aligned} v_0''(x) + Qv_0(x) &= (u''(x) + Pu(x))'' + Q(u''(x) + Pu(x)) \\ &= u^{(4)}(x) + Pu''(x) + Qu''(x) + PQu(x) \\ &= u^{(4)}(x) + (P + Q)u''(x) + PQu(x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

De même, on a

$$\varphi_3 + P\varphi_1 = v_0(a) = u''(a) + Pu(a) = u''(a) + P\varphi_1,$$

d'où $u''(a) = \varphi_3$ et

$$\varphi_4 + P\varphi_2 = v_0(b) = u''(b) + Pu(b) = u''(b) + P\varphi_2,$$

d'où $u''(b) = \varphi_4$. Il reste à montrer que u_0 a la régularité attendue.

Soit $w_0 \in W^{2,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(P))$ l'unique solution classique de

$$\begin{cases} w''(x) + Pw(x) &= Pv_0(x), \quad p.p. \ x \in]a, b[\\ w(a) &= P\varphi_1 \\ w(b) &= P\varphi_2. \end{cases}$$

Alors $P^{-1}w_0$ est une solution classique de (4.8). D'où, par unicité de la solution, on obtient

$$u_0 = P^{-1}w_0 \in L^p(a, b; D(P^2)).$$

De plus, d'après (4.8), on a

$$u_0'' = v_0 - Pu_0 = v_0 - w_0 \in W^{2,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(P)).$$

D'où u_0 est une solution classique de (4.1)-(CB1). L'unicité est évidente puisque si u est une solution classique de (4.1)-(CB1) alors $v := u'' + Pu$ est une solution classique de (4.7). Par unicité, $v = v_0$, donc u est une solution classique de (4.8). De même, par unicité, $u = u_0$.

Réciproquement, s'il existe une unique solution classique de (4.1)-(CB1), alors d'après le Lemme 1.6.11, (4.4) est vérifiée.

La formule de représentation (4.5) de la solution classique $F_{\Phi, f}$ de (4.1)-(CB1) est obtenue de la manière suivante. Notons que

$$v_0 := F_{\Phi, f}'' + PF_{\Phi, f}$$

est la solution classique de (4.7), ainsi v_0 est donné par (4.6) (voir A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe et A. Yagi [18], p. 169-170). De ce fait, puisque $F_{\Phi, f}$ est la solution classique de (4.8), on utilise à nouveau A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe et A. Yagi [18] afin d'obtenir (4.5). $\square$

On obtient alors le résultat suivant :

Théorème 4.3.2. *Soit $f \in L^p(a, b; X)$ avec $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ et $p \in]1, +\infty[$. On suppose que (H_1) , (H_2) , (H_3) et (H_4) sont vérifiées. Alors il existe une unique solution classique u de (4.1) – (CB5) si et seulement si*

$$\varphi_1, \varphi_2 \in (D(P), X)_{1+\frac{1}{2p}, p} \text{ et } \varphi_3, \varphi_4 \in (D(P), X)_{\frac{1}{2p}, p}. \quad (4.9)$$

Dans ce cas l'unique solution est $u = F_{(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 - P\varphi_1, \varphi_4 - P\varphi_2), f}$.

Démonstration. Il suffit de noter que la condition (CB5) s'écrit

$$\begin{cases} u(a) = \varphi_1, & u(b) = \varphi_2, \\ u''(a) = \varphi_3 - P\varphi_1, & u''(b) = \varphi_4 - P\varphi_2. \end{cases}$$

Le Théorème 4.3.1 montre qu'il existe une unique solution classique au problème (4.1)-(CB5) si et seulement si

$$\varphi_1, \varphi_2 \in (D(P), X)_{1+\frac{1}{2p}, p} \text{ et } \varphi_3 - P\varphi_1, \varphi_4 - P\varphi_2 \in (D(P), X)_{\frac{1}{2p}, p},$$

ce qui équivaut à (4.9). □

4.3.2 Formule de Représentation

On suppose ici que (H_1) , (H_2) , (H_3) , (H_4) et (H_5) sont vérifiées. Afin de démontrer notre résultat, nous devons tout d'abord faire quelques remarques et donner deux résultats techniques sous formes de Lemme.

Remarque 4.3.3.

1. $-P$ et $-Q$ sont sectoriels et X est réflexif donc

$$\overline{D(P - Q)} = \overline{D(P)} = \overline{D(Q)} = X.$$

2. $P - Q \subset B \in \mathcal{L}(X)$ entraîne que $P - Q$ est fermable mais, en général, n'est pas fermé. En fait, $P - Q$ ne sera fermé que si $P, Q \in \mathcal{L}(X)$. En effet, si $P - Q$ est fermé, alors vu que $\overline{D(P - Q)} = X$ et $P - Q \subset B \in \mathcal{L}(X)$, on en déduit que $D(P - Q) = X$, d'où $D(P) = D(Q) = X$.
3. Rappelons que $L = -\sqrt{-Q}$ et $M = -\sqrt{-P}$.
Si C_j , $j = 1, 2, 3, 4$ sont des opérateurs linéaires, on a toujours

$$C_1 C_3 + C_1 C_4 + C_2 C_3 + C_2 C_4 \subset (C_1 + C_2)(C_3 + C_4),$$

mais on n'a pas nécessairement l'égalité. Donc dans notre cas, d'après (4.3), on a

$$P - Q = L^2 - M^2 = L^2 + LM - ML - M^2 \subset (L - M)(L + M).$$

En fait, ici on a l'égalité

$$(L - M)(L + M) = L^2 - M^2 = P - Q, \quad (4.10)$$

en effet, il suffit de vérifier que

$$D((L - M)(L + M)) \subset D(L^2 - M^2).$$

Si $x \in D((L - M)(L + M))$, alors $x \in D((L + M))$ et donc il existe $y \in X$ tel que $x = (L + M)^{-1}y$. De plus

$$y = (L + M)x \in D(L - M) = D(M),$$

donc, il existe $z \in X$ tel que $y = M^{-1}z$. D'où

$$x = (L + M)^{-1}M^{-1}z \in D(M^2).$$

De même, il existe $w \in X$ tel que $y = L^{-1}w$. D'où

$$x = (L + M)^{-1}y = (L + M)^{-1}L^{-1}w \in D(L^2).$$

4. L'opérateur linéaire $L + M$ est fermé et inversible (voir Remarque 4.2.1, 4.) mais $L - M$ n'est pas en général fermé. En effet, s'il l'était $P - Q = (L + M)(L - M)$, serait fermé et donc vu le 2., $P, Q \in \mathcal{L}(X)$.
5. Rappelons que par hypothèse, $L^2 - M^2 \subset B$, c'est-à-dire

$$\forall y \in D(M^2), (L^2 - M^2)y = By.$$

De plus, d'après (4.10), on a

$$\begin{cases} L - M &= (P - Q)(L + M)^{-1} \subset B(L + M)^{-1} \in \mathcal{L}(X) \\ \text{soit : } L &= M + B(L + M)^{-1}. \end{cases} \quad (4.11)$$

D'où

$$\forall y \in D(M), (L - M)y = (P - Q)(L + M)^{-1}y = B(L + M)^{-1}y. \quad (4.12)$$

6. Pour $z \in \rho(P) \cap \rho(Q)$, on a

$$\begin{aligned} B(-Q - zI)^{-1}(-P - zI)^{-1} &= (P - Q)(-Q - zI)^{-1}(-P - zI)^{-1} \\ &= (-Q - zI + P + zI)(-Q - zI)^{-1}(-P - zI)^{-1} \\ &= (-P - zI)^{-1} - (-Q - zI)^{-1}. \end{aligned}$$

Donc

$$B(-Q - zI)^{-1}(-P - zI)^{-1} = (-P - zI)^{-1} - (-Q - zI)^{-1}. \quad (4.13)$$

Lemme 4.3.4. On a $P^{-1}B = BP^{-1}$, ce qui signifie que

$$\forall y \in D(P), By \in D(P) \text{ et } PBy = BP y. \quad (4.14)$$

De même $Q^{-1}B = BQ^{-1}$, ce qui signifie que

$$\forall y \in D(Q), By \in D(Q) \text{ et } QB y = BQ y. \quad (4.15)$$

Démonstration. Notons d'abord que, d'après (H_3) , $P - Q$ commute (au sens des résolvantes) avec P , Q , $P + Q$ et aussi avec toute combinaison linéaire de P et de Q .

Soit $x \in X$ alors il existe $(x_n)_{n \geq 0} \subset D(P)$ tel que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} P^{-1}Bx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} P^{-1}Bx_n \text{ car } P^{-1}B \in \mathcal{L}(X) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} P^{-1}(P - Q)x_n \text{ car } B = P - Q \text{ sur } D(P) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (P - Q)P^{-1}x_n \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} BP^{-1}x_n \\ &= BP^{-1}x \text{ car } BP^{-1} \in \mathcal{L}(X), \end{aligned}$$

Donc $P^{-1}B = BP^{-1}$.

De ce fait, si $y \in D(P)$ alors on pose $x = Py$ et

$$By = BP^{-1}x = P^{-1}Bx = P^{-1}BP y,$$

d'où $By = P^{-1}BP y \in D(P)$ et $PBy = BP y$. De la même manière, en remplaçant P par Q dans la démonstration précédente, on obtient le résultat. $\square$

Lemme 4.3.5. *On a $D(L) = D(M)$.*

Démonstration. Par définition

$$-M = \sqrt{-P} = \frac{1}{2\pi i} (I - P) \int_{\gamma} \frac{\sqrt{z}}{1+z} (-P - zI)^{-1} dz,$$

où γ est une courbe sectorielle entourant $\sigma(-P)$, (voir M. Haase [23], p. 61). De plus,

$$\int_{\gamma} \frac{\sqrt{z}}{1+z} (-P - zI)^{-1} dz \in \mathcal{L}(X) \quad \text{et} \quad \psi \in D(M) = D(\sqrt{-P})$$

si et seulement si

$$\int_{\gamma} \frac{\sqrt{z}}{1+z} (-P - zI)^{-1} \psi dz \in D(P).$$

Montrons que $D(L) \subset D(M)$. Soit $\psi \in D(L)$, alors on a

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{\sqrt{z}}{1+z} (-Q - zI)^{-1} \psi dz &= \int_{\gamma} \frac{\sqrt{z}}{1+z} (-P - zI) (-Q - zI)^{-1} (-P - zI)^{-1} \psi dz \\ &= \int_{\gamma} \frac{\sqrt{z}}{1+z} (-P + Q - Q - zI) (-Q - zI)^{-1} (-P - zI)^{-1} \psi dz \\ &= \int_{\gamma} \frac{\sqrt{z}}{1+z} (-P + Q) (-Q - zI)^{-1} (-P - zI)^{-1} \psi dz \\ &\quad + \int_{\gamma} \frac{\sqrt{z}}{1+z} (-P - zI)^{-1} \psi dz \\ &= - \int_{\gamma} \frac{\sqrt{z}}{1+z} B (-Q - zI)^{-1} (-P - zI)^{-1} \psi dz \\ &\quad + \int_{\gamma} \frac{\sqrt{z}}{1+z} (-P - zI)^{-1} \psi dz \\ &= -BQ^{-1}\zeta + \int_{\gamma} \frac{\sqrt{z}}{1+z} (-P - zI)^{-1} \psi dz, \end{aligned}$$

où

$$\zeta := \int_{\gamma} \frac{\sqrt{z}}{1+z} Q(-Q - zI)^{-1} (-P - zI)^{-1} \psi \, dz \in X,$$

car

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\sqrt{z}}{1+z} Q(-Q - zI)^{-1} (-P - zI)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq c |z|^{-1/2} \left\| Q(-Q - zI)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \left\| \frac{\sqrt{z}}{1+z} (-P - zI)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq c |z|^{-1/2} K \frac{C}{|z|} \\ &\leq \frac{\tilde{c}}{|z|^{3/2}}. \end{aligned}$$

Donc

$$\int_{\gamma} \frac{\sqrt{z}}{1+z} (-Q - zI)^{-1} \psi \, dz = Q^{-1} B \zeta + \int_{\gamma} \frac{\sqrt{z}}{1+z} (-P - zI)^{-1} \psi \, dz \in D(P),$$

car $Q^{-1} B \zeta \in D(Q) = D(P)$ et $\int_{\gamma} \frac{\sqrt{z}}{1+z} (-P - zI)^{-1} \psi \, dz \in D(P)$.

Ce qui signifie que $\psi \in D(\sqrt{-P}) = D(M)$. En échangeant les rôles de P et Q dans la démonstration précédente, on montre de même que $D(M) \subset D(L)$, ce qui donne le résultat. $\square$

On établit maintenant un résultat qui nous donne une formule de représentation explicite de la solution classique u de l'équation (4.1).

Proposition 4.3.6. *Soit $f \in L^p(a, b; X)$, où $p \in]1, +\infty[$ et supposons que (H_1) , (H_2) , (H_3) , (H_4) et (H_5) sont vérifiées. Si u est une solution classique de l'équation (4.1) alors, il existe $K_1, K_2, K_3, K_4 \in X$, tels que pour $x \in [a, b]$,*

$$u(x) = e^{(x-a)M} K_1 + e^{(b-x)M} K_2 + e^{(x-a)L} K_3 + e^{(b-x)L} K_4 + F_{0,f}(x), \quad (4.16)$$

où $F_{0,f}$ est définie dans le Théorème 4.3.1.

Démonstration. Si u est une solution classique de l'équation (4.1), d'après le Théorème 4.3.1, on peut prendre la solution classique $F_{0,f}$ de (4.1)-(CB1); i.e. qui vérifie

$$F_{0,f}(a) = F_{0,f}(b) = F_{0,f}''(a) = F_{0,f}''(b) = 0. \quad (4.17)$$

On considère $u_{hom} := u - F_{0,f}$ qui est alors une solution classique de

$$u^{(4)}(x) + (P + Q)u''(x) + PQ u(x) = 0, \quad x \in]a, b[.$$

On pose alors

$$v := -QB^{-1}u_{hom} - B^{-1}u_{hom}'', \quad \text{et} \quad w := PB^{-1}u_{hom} + B^{-1}u_{hom}''.$$

On a $v + w = (P - Q)B^{-1}u_{hom} = u_{hom}$. De plus, d'après (4.15), on a

$$\begin{aligned} v'' + Pv &= -QB^{-1}u_{hom}'' - B^{-1}u_{hom}^{(4)} - PQB^{-1}u_{hom} - PB^{-1}u_{hom}'' \\ &= -B^{-1} \left(u_{hom}^{(4)} + (P + Q)u_{hom}'' + PQ u_{hom} \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} w'' + Qw &= PB^{-1}u''_{hom} + B^{-1}u^{(4)}_{hom} + QPB^{-1}u_{hom} + QB^{-1}u''_{hom} \\ &= B(u^{(4)}_{hom} + (P + Q)u''_{hom} + PQu_{hom}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Notons que $u''_{hom} \in L^p(a, b; D(P))$ donc, d'après (4.14), $PBu''_{hom} = BPu''_{hom}$ dans $L^p(a, b; X)$. De même $QB u''_{hom} = BQ u''_{hom}$. On a aussi

$$QPBu_{hom} = BQPu_{hom} = PQBu_{hom} = BPQu_{hom},$$

car $u_{hom} \in L^p(a, b; D(PQ))$.

Donc, on en déduit que, d'après A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe et A. Yagi [19], il existe $K_1, K_2, K_3, K_4 \in X$ tels que

$$v(x) = e^{(x-a)M}K_1 + e^{(b-x)M}K_2 \quad \text{et} \quad w(x) = e^{(x-a)L}K_3 + e^{(b-x)L}K_4.$$

Finalement, pour tout $x \in [a, b]$, on a

$$\begin{aligned} u(x) &= u_{hom}(x) + F_{0,f}(x) \\ &= v(x) + w(x) + F_{0,f}(x) \\ &= e^{(x-a)M}K_1 + e^{(b-x)M}K_2 + e^{(x-a)L}K_3 + e^{(b-x)L}K_4 + F_{0,f}. \end{aligned}$$

□

4.3.3 Régularité de la différence de semi-groupes

Rappelons qu'un opérateur linéaire Λ sur X , vérifie la propriété de régularité maximale $(\mathcal{RM})$ si et seulement si : il existe $q \in]1, +\infty[$ et $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ tels que pour tout $h \in L^q(a, b; X)$ il existe une unique $u \in L^q(a, b; X) \cap W^{1,q}(a, b; X)$ vérifiant

$$\begin{cases} u'(x) = \Lambda u(x) + h(x), & \text{p. p. } x \in]a, b[\\ u(a) = 0. \end{cases}$$

Notons que la propriété $(\mathcal{RM})$ est indépendante du q , du a et du b choisis. De plus on a :

1. $-\Lambda \in \text{BIP}(X, \theta)$, $0 < \theta < \pi/2$ entraîne que Λ sur X , vérifie la propriété $(\mathcal{RM})$.
2. Λ vérifie la propriété $(\mathcal{RM})$ implique que Λ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique.

On considère ici C, D et E trois opérateurs linéaires sur X tels que

$$\begin{cases} D \text{ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique,} \\ D \text{ vérifie la propriété } (\mathcal{RM}) \\ 0 \in \rho(D) \\ E \in \mathcal{L}(X) \\ DE = ED \text{ sur } D(D) \text{ (cadre commutatif)} \\ C = D + E. \end{cases}$$

Donc, d'après H. Tanabe [42], on en déduit que C est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique.

Théorème 4.3.7. Soit $\psi \in X$. On pose pour $x \in]a, b[\subset \mathbb{R}$

$$u_\psi(x) = \left(e^{(x-a)C} - e^{(x-a)D} \right) \psi \quad \text{et} \quad v_\psi(x) = \left(e^{(b-x)C} - e^{(b-x)D} \right) \psi.$$

Alors, pour tout $b > a$ et tout $m, q \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, les propriétés suivantes sont vérifiées

1. $u_\psi \in C^\infty([a, b]; X) \cap C^0([a, b]; X)$, de plus pour $\ell \geq 1$ et $x \in]a, b[$

$$u_\psi^{(\ell)}(x) = D^\ell u_\psi(x) + T_\ell D^{\ell-1} e^{(x-a)C} E \psi$$

$$\text{où } T_\ell = \sum_{k=1}^{\ell} C^{k-1} D^{-(k-1)} \in \mathcal{L}(X).$$

(par convention $C^0 = D^0 = I$ donc en particulier $T_1 = I$).

2. $u_\psi \in W^{1,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(D))$.
3. $u_\psi \in W^{m,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(D^m))$ si et seulement si

$$E\psi \in \left(D(D^{m-1}), X \right)_{\frac{1}{(m-1)p}, p},$$

4. Si $u_\psi \in W^{m,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(D^m))$ alors pour tout $\ell \in \{1, \dots, m-1\}$

$$u_\psi^{(\ell)} \in W^{m-\ell,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(D^{m-\ell})).$$

5. Si E vérifie $E(X) \subset (D(D^{q-1}), X)_{\frac{1}{(q-1)p}, p}$, alors pour tout $\psi \in X$:

$$u_\psi \in W^{q,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(D^q)).$$

6. Si de plus E vérifie

$$\begin{cases} 1) D(E) \subset D(D^q) \text{ donc } D^q E \in \mathcal{L}(X). \\ 2) 0 \in \rho(D^q E), \end{cases}$$

alors, on a :

- (a) $\forall \psi \in X : u_\psi \in W^{q+1,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(D^{q+1}))$
- (b) Soit $m \geq q+2 : u_\psi \in W^{m,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(D^m))$ si et seulement si

$$\psi \in \left(D(D^{m-q-1}), X \right)_{\frac{1}{(m-q-1)p}, p},$$

7. Les six points précédents restent vrais si on remplace u_ψ par v_ψ .

Démonstration.

1. Notons d'abord que pour $x > a$

$$e^{(x-a)C} \psi \in D(D^\infty) \quad \text{et} \quad e^{(x-a)D} \psi \in D(D^\infty);$$

de plus $u_\psi \in C^\infty([a, b]; X) \cap C^0([a, b]; X)$.

Enfin pour $\ell \geq 1$ et $x \in]a, b]$ on a

$$\begin{aligned}
 u_{\psi}^{(\ell)}(x) &= C^{\ell} e^{(x-a)C} - D^{\ell} e^{(x-a)D} \psi \\
 &= D^{\ell} \left(e^{(x-a)C} - e^{(x-a)D} \right) \psi + (C^{\ell} - D^{\ell}) e^{(x-a)C} \psi \\
 &= D^{\ell} u_{\psi}(x) + \left(\sum_{k=1}^{\ell} C^{k-1} D^{\ell-k} \right) (C - D) e^{(x-a)C} \psi \\
 &= D^{\ell} u_{\psi}(x) + \left(\sum_{k=1}^{\ell} C^{k-1} D^{\ell-k} \right) e^{(x-a)C} E \psi \\
 &= D^{\ell} u_{\psi}(x) + \left(\sum_{k=1}^{\ell} C^{k-1} D^{-(k-1)} \right) D^{\ell-1} e^{(x-a)C} E \psi
 \end{aligned}$$

2. D'après le point précédent, u_{ψ} est une solution $C^1([a, b]; X) \cap C^0([a, b]; X)$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} u'(x) = Du(x) + e^{(x-a)C} E \psi, & x \in]a, b] \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

D'où, d'après T. Kato [24], pour $x \in]a, b]$, u est donnée par la formule de variation de la constante

$$u_{\psi}(x) = \int_0^x e^{(x-s)D} e^{(s-a)C} E \psi \, ds = D^{-1} \left[D \int_0^x e^{(x-s)D} e^{(s-a)C} E \psi \, ds \right]. \quad (4.18)$$

Or

$$s \mapsto e^{(s-a)C} E \psi \in C^0([a, b]; X) \subset L^p(a, b; X).$$

D'après G. Dore et A. Venni [12], on a

$$g_{1,\psi} : x \mapsto D \int_0^x e^{(x-s)D} e^{(s-a)C} E \psi \, ds \in L^p(a, b; X).$$

On en déduit que $u_{\psi} = D^{-1} g_{1,\psi} \in L^p(a, b; D(D))$ et donc

$$u' = Du + e^{(\cdot-a)C} E \psi \in L^p(a, b; X)$$

3. Supposons que $E \psi \in (D(D^{m-1}), X)_{\frac{1}{(m-1)p}, p}$. D'après (4.18), on a

$$u_{\psi}(x) = D^{-m} \left[D \int_0^x e^{(x-s)D} D^{m-1} e^{(s-a)C} E \psi \, ds \right], x \in]a, b].$$

Puisque $E \psi \in (D(D^{m-1}), X)_{\frac{1}{(m-1)p}, p}$ on a

$$s \mapsto D^{m-1} e^{(s-a)D} E \psi \in L^p(a, b; X),$$

D'après H. Triebel [43], on en déduit que

$$s \mapsto D^{m-1} e^{(s-a)C} E \psi = e^{(s-a)E} D^{m-1} e^{(s-a)D} E \psi \in L^p(a, b; X)$$

et d'après G. Dore et A. Venni [12], on a

$$g_{m,\psi} : x \mapsto D \int_0^x e^{(x-s)D} D^{m-1} e^{(s-a)C} E \psi \, ds \in L^p(a, b; X).$$

On en déduit que

$$u_\psi = D^{-m} g_{m,\psi} \in L^p(a, b; D(D^m)).$$

Or $u_\psi \in W^{m,p}(a, b; X)$ car $u_\psi \in C^1([a, b]; X) \cap C^0([a, b]; X)$ et, d'après le point 1., on a, pour $\ell \in \{1, \dots, m\}$ et $x \in]a, b]$

$$u_\psi^{(\ell)}(x) = D^\ell u_\psi(x) + T_\ell D^{\ell-1} e^{(x-a)C} E\psi.$$

D'où $u_\psi^{(\ell)} \in L^p(a, b; X)$.

Réciproquement, si $u_\psi \in W^{m,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(D^m))$ alors, d'après le Lemme 1.6.11, on a

$$\begin{aligned} E\psi = u'_\psi(a) &\in (D(D^m), X)_{\frac{1}{mp} + \frac{1}{m}, p} = (X, D(D^m))_{1 - \frac{1}{mp} - \frac{1}{m}, p} \\ &= (X, D(D))_{m - \frac{1}{p} - 1, p} \\ &= (D(D^{m-1}), X)_{\frac{1}{(m-1)p}, p}. \end{aligned}$$

4. Notons d'abord que, d'après le point 3., on a $E\psi \in (D(D^{m-1}), X)_{\frac{1}{(m-1)p}, p}$, donc

$$D^{m-1} e^{(\cdot-a)D} C\psi \in L^p(a, b; X).$$

Soit $\ell \in \{1, \dots, m-1\}$. Pour $x \in]a, b]$, on a

$$u_\psi^{(\ell)}(x) = D^\ell u_\psi(x) + T_\ell D^{\ell-1} e^{(x-a)C} E\psi.$$

D'où :

(a) $u_\psi^{(\ell)} \in L^p(a, b; D(D^{m-\ell}))$ car

$$D^{m-\ell} u_\psi^{(\ell)} = D^m u_\psi(x) + T_\ell D^{m-1} e^{(x-a)C} E\psi \in L^p(a, b; X).$$

(b) $u_\psi^{(\ell)} \in W^{m-\ell,p}(a, b; X)$ car, pour $k \in \{1, \dots, m-\ell\}$, on a $(u_\psi^{(\ell)})^{(k)} \in L^p(a, b; X)$, puisque

$$\begin{aligned} (u_\psi^{(\ell)})^{(k)} &= u_\psi^{(\ell+k)} \\ &= D^{\ell+k} u_\psi + T_{\ell+k} D^{\ell+k-1} e^{(\cdot-a)C} E\psi, \\ &= D^{\ell+k} u_\psi + T_{\ell+k} D^{\ell+k-m} D^{m-1} e^{(\cdot-a)C} E\psi \in L^p(a, b; X). \end{aligned}$$

Notons que $D^{\ell+k} u_\psi \in L^p(a, b; X)$ car $\ell+k \leq m$ et

$$T_{\ell+k} D^{\ell+k-m} D^{m-1} e^{(\cdot-a)C} E\psi \in L^p(a, b; X)$$

car $T_{\ell+k} D^{\ell+k-m} \in \mathcal{L}(X)$.

5. Si $\psi \in X$, alors par hypothèse $E\psi \in (D(D^{q-1}), X)_{\frac{1}{(q-1)p}, p}$ et d'après le point 3., on obtient le résultat.

6. Pour le a) il suffit de noter que si $\psi \in X$, alors

$$E\psi \in D(D^q) \subset D(D^{q-1}) \quad \text{et} \quad D^{q-1}E\psi = D(D) \subset (D(D), X)_{\frac{1}{p}, p}.$$

D'après le point 3., $u_\psi \in W^{q+1,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(D^{q+1}))$.

Pour le b) on note que si $\psi \in (D(D^{m-q-1}), X)_{\frac{1}{(m-q-1)p}, p}$, alors d'après le Lemme 1.6.11, on a

$$\psi \in D(D^{m-q-2}) \quad \text{et} \quad D^{m-q-2}\psi \in (D(D), X)_{\frac{1}{p}, p}.$$

D'où

$$E\psi = D^q E D^{-q} \psi \in D(D^{m-2})$$

et

$$D^{m-2}E\psi = D^{m-2}D^q E D^{-q} \psi = D^q E D^{m-q-2} \psi \in (D(D), X)_{\frac{1}{p}, p}.$$

Donc, d'après le point 3., on a $u_\psi \in W^{m,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(D^m))$.

Réciproquement, si $u_\psi \in W^{m,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(D^m))$, alors d'après le point 3., on a $E\psi \in (D(D^{m-1}), X)_{\frac{1}{(m-1)p}, p}$. Ainsi, d'après le Lemme 1.6.11, on en déduit que

$$E\psi \in D(D^{m-2}) \quad \text{et} \quad D^{m-2}E\psi \in (D(D), X)_{\frac{1}{p}, p}.$$

Donc, il existe $\chi \in (D(D), X)_{\frac{1}{p}, p}$ tel que $E\psi = D^{-m+2}\chi$, d'où

$$\psi = (D^q E)^{-1} D^q E \psi = (D^q E)^{-1} D^{-m+q+2} \chi \in D(D^{m-q-2})$$

et

$$D^{m-q-2}\psi = (D^q E)^{-1} \chi \in (D(D), X)_{\frac{1}{p}, p},$$

ce qui donne $\psi \in (D(D^{m-q-1}), X)_{\frac{1}{(m-q-1)p}, p}$.

7. Il suffit d'écrire $v_\psi(x) = u_\psi(b + a - x)$. Ainsi, les propriétés de u_ψ sont vérifiées pour v_ψ . □

Corollaire 4.3.8. *Supposons que (H_1) , (H_2) , (H_3) , (H_4) et (H_5) sont vérifiées. Soit $\psi \in X$. On pose pour $x \in]a, b[\subset \mathbb{R}$*

$$u_\psi(x) = (e^{(x-a)L} - e^{(x-a)M}) \psi \quad \text{et} \quad v_\psi(x) = (e^{(b-x)L} - e^{(b-x)M}) \psi.$$

Alors, pour $m \geq 3$, on a

1. $\forall \psi \in X : u_\psi \in W^{2,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(M^2))$
2. $u_\psi \in W^{m,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(M^m)) \iff \psi \in (D(M^{m-2}), X)_{\frac{1}{(m-2)p}, p}$.

Dans ce cas, pour tout $\ell \in \{1, \dots, m-1\}$

$$u_\psi^{(\ell)} \in W^{m-\ell,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(M^{m-\ell})).$$

En particulier,

$$u_\psi \in W^{4,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(M^4)) \iff \psi \in (D(M), X)_{1+\frac{1}{p}, p}$$

et dans ce cas $u_\psi'' \in L^p(a, b; D(M^2))$.

3. Les points précédents restent vrais si on remplace u_ψ par v_ψ .

Démonstration. On pose $E = B(L + M)^{-1}$. Or E vérifie

$$\begin{cases} 1) D(E) \subset D(L + M) = D(M) \text{ donc } ME \in \mathcal{L}(X). \\ 2) 0 \in \rho(ME) \text{ avec } (ME)^{-1} = (L + M)M^{-1}B^{-1}. \end{cases}$$

D'après (4.11), on a

$$L = M + B(L + M)^{-1}.$$

Ainsi, en considérant $C = L$, $D = M$ et $E = B(L + M)^{-1}$ dans le 6. du Théorème 4.3.7, on obtient les points 1. et 2. De plus, en appliquant le point 7. du Théorème 4.3.7, on obtient le point 3. $\square$

4.4 Le Théorème principal

On peut désormais établir notre résultat principal qui vient compléter le Théorème 4.3.1 et le Théorème 4.3.2 :

Théorème 4.4.1. *Soit $f \in L^p(a, b; X)$ avec $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ et $p \in]1, +\infty[$. On suppose que (H_1) , (H_2) , (H_3) , (H_4) et (H_5) soient vérifiées. Alors*

1. *il existe une unique solution classique u de (4.1) – (CB2) si et seulement si*

$$\varphi_1, \varphi_2 \in (D(P), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p} \quad \text{et} \quad \varphi_3, \varphi_4 \in (D(P), X)_{\frac{1}{2p}, p}. \quad (4.19)$$

Si, de plus, (H_6) est vérifiée, alors

2. *il existe une unique solution classique u de (4.1) – (CB3) si et seulement si*

$$\varphi_1, \varphi_2 \in (D(P), X)_{1+\frac{1}{2p}, p} \quad \text{et} \quad \varphi_3, \varphi_4 \in (D(P), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p}, \quad (4.20)$$

3. *il existe une unique solution classique u de (4.1) – (CB4) si et seulement si*

$$\varphi_1, \varphi_2 \in (D(P), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p} \quad \text{et} \quad \varphi_3, \varphi_4 \in (D(P), X)_{\frac{1}{2p}, p}. \quad (4.21)$$

Notons que d'après le Lemme 1.6.11, on doit uniquement montrer l'implication réciproque dans le Théorème 4.4.1. Pour chaque type de conditions aux bords, la preuve du Théorème 4.4.1 est divisée en deux étapes. Premièrement, d'après la formule de représentation obtenue dans la section 4.3.2, on montre l'unicité de la solution classique. Puis, dans un deuxième temps, on établit l'existence de cette solution. De la même manière que dans les chapitres précédents, d'après le Lemme 1.6.11, on en déduit que si

$$u \in W^{4,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(M^4)).$$

Alors, pour $s \in [a, b]$, on obtient que

$$u(s) \in (D(M^4), X)_{\frac{1}{4p}, p}, \quad u'(s) \in (D(M^4), X)_{\frac{1}{4}+\frac{1}{4p}, p} \quad \text{et} \quad u''(s) \in (D(M^4), X)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{4p}, p}.$$

Or, d'après le Théorème 1.6.8 et le Corollaire 1.6.9, on en déduit que pour $s \in [a, b]$, on a

$$u(s) \in (D(M), X)_{3+\frac{1}{p}, p}, \quad u'(s) \in (D(M), X)_{2+\frac{1}{p}, p} \quad \text{et} \quad u''(s) \in (D(M), X)_{1+\frac{1}{p}, p}.$$

Par le même raisonnement, on obtient les égalités suivantes :

$$\begin{cases} (D(M), X)_{3+\frac{1}{p}, p} = (D(P), X)_{1+\frac{1}{2p}, p}, \\ (D(M), X)_{2+\frac{1}{p}, p} = (D(P), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p}, \\ (D(M), X)_{1+\frac{1}{p}, p} = (D(P), X)_{\frac{1}{2p}, p}. \end{cases} \quad (4.22)$$

4.4.1 Preuve du 1. du Théorème 4.4.1 (Conditions aux bords (CB2))

Démonstration. On suppose $(H_1), (H_2), (H_3), (H_4), (H_5)$ et (4.19) sont vérifiées. Tout d'abord, on prouve l'unicité de la solution de (4.1)-(CB2) en déterminant les constantes $K_i, i = 1, 2, 3, 4$, de la formule de représentation (4.16). Puis, on montre que la formule obtenue constitue une solution classique.

Première étape : Unicité.

Si u est une solution classique de (4.1)-(CB2), alors d'après la Proposition 4.3.6, u vérifie (4.16). Afin d'obtenir un modèle simplifié, on pose

$$\alpha_1 := \frac{K_1 - K_2}{2}, \quad \alpha_2 := \frac{K_3 - K_4}{2}, \quad \alpha_3 := \frac{K_1 + K_2}{2} \quad \text{et} \quad \alpha_4 := \frac{K_3 + K_4}{2}. \quad (4.23)$$

Ainsi, pour $p.p. x \in]a, b[, u$ est donnée par

$$\begin{aligned} u(x) = & \left(e^{(x-a)M} - e^{(b-x)M} \right) \alpha_1 + \left(e^{(x-a)L} - e^{(b-x)L} \right) \alpha_2 \\ & + \left(e^{(x-a)M} + e^{(b-x)M} \right) \alpha_3 + \left(e^{(x-a)L} + e^{(b-x)L} \right) \alpha_4 + F_{0,f}(x). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Il reste à calculer les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in X$. Puisque $F_{0,f}$ vérifie (4.17), les conditions aux bords (CB2) appliquées à $M^{-2}u(x)$ pour $p.p. x \in]a, b[,$ implique les relations suivantes :

$$\begin{aligned} & \left(I + e^{cM} \right) M^{-1} \alpha_1 + \left(I + e^{cL} \right) LM^{-2} \alpha_2 \\ & + \left(I - e^{cM} \right) M^{-1} \alpha_3 + \left(I - e^{cL} \right) LM^{-2} \alpha_4 = M^{-2} \left(\varphi_1 - F'_{0,f}(a) \right), \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} & \left(I + e^{cM} \right) M^{-1} \alpha_1 + \left(I + e^{cL} \right) LM^{-2} \alpha_2 \\ & - \left(I - e^{cM} \right) M^{-1} \alpha_3 - \left(I - e^{cL} \right) LM^{-2} \alpha_4 = M^{-2} \left(\varphi_2 - F'_{0,f}(b) \right), \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\left(I - e^{cL} \right) (L^2 - M^2) M^{-2} \alpha_2 + \left(I + e^{cL} \right) (L^2 - M^2) M^{-2} \alpha_4 = M^{-2} \varphi_3, \quad (4.27)$$

$$- \left(I - e^{cL} \right) (L^2 - M^2) M^{-2} \alpha_2 + \left(I + e^{cL} \right) (L^2 - M^2) M^{-2} \alpha_4 = M^{-2} \varphi_4. \quad (4.28)$$

Notons que l'on considère $M^{-2}u(x)$ pour $p.p. x \in]a, b[,$ car on ne sait pas si $\alpha_i \in D(M), i = 1, 2, 3, 4$. D'après (4.10), $L^2 - M^2 = B$ sur $D(M^2)$. En sommant (4.25) avec (4.26) et (4.27) avec (4.28), on obtient le système abstrait suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(I + e^{cM} \right) M^{-1} \alpha_1 + \left(I + e^{cL} \right) LM^{-2} \alpha_2 \\ + \left(I - e^{cM} \right) M^{-1} \alpha_3 + \left(I - e^{cL} \right) LM^{-2} \alpha_4 = M^{-2} \left(\varphi_1 - F'_{0,f}(a) \right) \\ 2 \left(I + e^{cM} \right) M^{-1} \alpha_1 + 2 \left(I + e^{cL} \right) LM^{-2} \alpha_2 = M^{-2} \left(\varphi_2 + \varphi_1 - F'_{0,f}(a) - F'_{0,f}(b) \right) \\ \left(I - e^{cL} \right) BM^{-2} \alpha_2 + \left(I + e^{cL} \right) BM^{-2} \alpha_4 = M^{-2} \varphi_3 \\ 2 \left(I + e^{cL} \right) BM^{-2} \alpha_4 = M^{-2} \left(\varphi_4 + \varphi_3 \right). \end{array} \right.$$

On en déduit alors que le système précédent est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} (I - e^{cM}) M^{-1} \alpha_3 + (I - e^{cL}) L M^{-2} \alpha_4 = M^{-2} \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2 + F'_{0,f}(b) - F'_{0,f}(a)}{2} \right) \\ (I + e^{cM}) M^{-1} \alpha_1 + (I + e^{cL}) L M^{-2} \alpha_2 = M^{-2} \left(\frac{\varphi_2 + \varphi_1 - F'_{0,f}(a) - F'_{0,f}(b)}{2} \right) \\ (I - e^{cL}) B M^{-2} \alpha_2 = M^{-2} \left(\frac{\varphi_3 - \varphi_4}{2} \right) \\ (I + e^{cL}) B M^{-2} \alpha_4 = M^{-2} \left(\frac{\varphi_3 + \varphi_4}{2} \right). \end{array} \right.$$

D'après la Remarque 2.3.1, $I - e^{cL}$ et $I + e^{cL}$ sont inversibles, donc on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 = (I - e^{cL})^{-1} B^{-1} \left(\frac{\varphi_3 - \varphi_4}{2} \right) \\ \alpha_4 = (I + e^{cL})^{-1} B^{-1} \left(\frac{\varphi_3 + \varphi_4}{2} \right). \end{array} \right. \quad (4.29)$$

De même, d'après la Remarque 2.3.1, $I - e^{cM}$ et $I + e^{cM}$ sont inversibles, donc d'après (4.29), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = (I + e^{cM})^{-1} (M^{-1} \tilde{\varphi}_1 - (I + e^{cL}) L M^{-1} \alpha_2) \\ \alpha_3 = (I - e^{cM})^{-1} (M^{-1} \tilde{\varphi}_2 - (I - e^{cL}) L M^{-1} \alpha_4), \end{array} \right. \quad (4.30)$$

où

$$\tilde{\varphi}_1 := \frac{\varphi_1 + \varphi_2 - F'_{0,f}(a) - F'_{0,f}(b)}{2} \quad \text{et} \quad \tilde{\varphi}_2 := \frac{\varphi_1 - \varphi_2 - F'_{0,f}(a) + F'_{0,f}(b)}{2}. \quad (4.31)$$

Finalement u est uniquement déterminée par (4.24), (4.29), (4.30) et (4.31).

Seconde étape : Existence.

On considère que u est unique et on pose

$$\tilde{K}_1 := K_1 + K_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \quad \text{et} \quad \tilde{K}_2 := K_2 + K_4 = \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_1 - \alpha_2,$$

ainsi, pour $x \in]a, b[$,

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{(x-a)M} \tilde{K}_1 + e^{(b-x)M} \tilde{K}_2 + F_{0,f}(x) \\ &\quad + (e^{(x-a)L} - e^{(x-a)M}) K_3 + (e^{(b-x)L} - e^{(b-x)M}) K_4. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Donc, d'après le Corollaire 1.6.13, le Théorème 4.3.1, le Corollaire 4.3.8 et (4.22), il suffit de montrer que

$$\tilde{K}_1, \tilde{K}_2 \in (D(M), X)_{3+\frac{1}{p}, p} \quad \text{et} \quad K_3, K_4 \in (D(M), X)_{1+\frac{1}{p}, p}.$$

D'après le Lemme 2.4.1, pour $T = L$ ou M , on a

$$(I \pm e^{cT})^{-1} = I + R_{\pm}, \quad \text{où} \quad R_{\pm}(X) \subset D(M^{\infty}) \quad \text{et} \quad R_{\pm}T = TR_{\pm}.$$

D'où, d'après (4.32), (4.30), (4.29) et (4.31), il existe $R_i \in D(M^\infty)$, $i = 1, 2, 3, 4$, tel que

$$\begin{cases} \alpha_1 &= \frac{1}{2}M^{-1} \left(2\tilde{\varphi}_1 - LB^{-1}(\varphi_3 - \varphi_4) \right) + R_1 \\ \alpha_2 &= B^{-1} \left(\frac{\varphi_3 - \varphi_4}{2} \right) + R_2 \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2}M^{-1} \left(2\tilde{\varphi}_2 - LB^{-1}(\varphi_3 + \varphi_4) \right) + R_3 \\ \alpha_4 &= B^{-1} \left(\frac{\varphi_3 + \varphi_4}{2} \right) + R_4. \end{cases} \quad (4.33)$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} K_3 &= \alpha_2 + \alpha_4 = B^{-1} \left(\frac{\varphi_3 - \varphi_4}{2} \right) + B^{-1} \left(\frac{\varphi_3 + \varphi_4}{2} \right) + R_2 + R_4 \\ &= B^{-1}\varphi_3 + R_2 + R_4 \in (D(M), X)_{1+\frac{1}{p}, p}. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} K_4 &= -\alpha_2 + \alpha_4 = -B^{-1} \left(\frac{\varphi_3 - \varphi_4}{2} \right) + B^{-1} \left(\frac{\varphi_3 + \varphi_4}{2} \right) - R_2 + R_4 \\ &= B^{-1}\varphi_4 - R_2 + R_4 \in (D(M), X)_{1+\frac{1}{p}, p}. \end{aligned}$$

Enfin, d'après (4.12), on a

$$\begin{aligned} \tilde{K}_1 &= \frac{1}{2}M^{-1} \left(2\tilde{\varphi}_1 - LB^{-1}(\varphi_3 - \varphi_4) \right) + \frac{1}{2}M^{-1} \left(2\tilde{\varphi}_2 - LB^{-1}(\varphi_3 + \varphi_4) \right) \\ &\quad + B^{-1}\varphi_3 + R_1 + R_2 + R_3 + R_4 \\ &= M^{-1} \left(\varphi_1 - F'_{0,f}(a) \right) - (L - M)B^{-1}M^{-1}\varphi_3 + R_1 + R_2 + R_3 + R_4 \\ &= M^{-1} \left(\varphi_1 - F'_{0,f}(a) \right) - B(L + M)^{-1}B^{-1}M^{-1}\varphi_3 + R_1 + R_2 + R_3 + R_4 \\ &= M^{-1} \left(\varphi_1 - F'_{0,f}(a) \right) - (L + M)^{-1}M^{-1}\varphi_3 + R_1 + R_2 + R_3 + R_4. \end{aligned}$$

Puisque $F_{0,f}$ est une solution classique de (4.1), d'après le Lemme 1.6.11, (2.4) reste vrai, ainsi on a $F'_{0,f}(a) \in (D(M), X)_{2+\frac{1}{p}, p}$. Or $\varphi_1 \in (D(M), X)_{2+\frac{1}{p}, p}$ et $\varphi_3 \in (D(M), X)_{1+\frac{1}{p}, p}$, on en déduit donc que $\tilde{K}_1 \in (D(M), X)_{3+\frac{1}{p}, p}$. De même, d'après (4.12), on a

$$\begin{aligned} \tilde{K}_2 &= -\frac{1}{2}M^{-1} \left(2\tilde{\varphi}_1 - LB^{-1}(\varphi_3 - \varphi_4) \right) + \frac{1}{2}M^{-1} \left(2\tilde{\varphi}_2 - LB^{-1}(\varphi_3 + \varphi_4) \right) \\ &\quad + B^{-1}\varphi_4 - R_1 - R_2 + R_3 + R_4 \\ &= -M^{-1} \left(\varphi_2 - F'_{0,f}(b) \right) - (L - M)B^{-1}M^{-1}\varphi_4 - R_1 - R_2 + R_3 + R_4 \\ &= -M^{-1} \left(\varphi_2 - F'_{0,f}(b) \right) - (L + M)^{-1}M^{-1}\varphi_4 - R_1 - R_2 + R_3 + R_4. \end{aligned}$$

Puisque $F_{0,f}$ est une solution classique de (4.1), d'après le Lemme 1.6.11, (2.4) reste vrai, ainsi on a $F'_{0,f}(b) \in (D(M), X)_{2+\frac{1}{p}, p}$. Or $\varphi_2 \in (D(M), X)_{2+\frac{1}{p}, p}$ et $\varphi_4 \in (D(M), X)_{1+\frac{1}{p}, p}$, on en déduit que $\tilde{K}_2 \in (D(M), X)_{3+\frac{1}{p}, p}$, ce qui donne le résultat. $\square$

4.4.2 Preuve du 2. du Théorème 4.4.1 (Conditions aux bords (CB3))

Dans toute la suite, on suppose (H_1) , (H_2) , (H_3) , (H_4) , (H_5) et (H_6) . Maintenant, on démontre le Théorème 4.4.1 pour les conditions aux bords (CB3). La preuve est divisée en deux étapes. Tout d'abord, on montre l'unicité de la solution de (4.1)-(CB3) en déterminant les constantes K_i , $i = 1, 2, 3, 4$, de la formule de représentation (4.16). Puis, on montre que la formule obtenue est une solution classique.

Démonstration.

Première étape : Unicité.

On suppose que (4.20) soit vérifiée. Si u est une solution classique de (4.1)-(CB3) alors, comme dans la section précédente, u vérifie (4.24). Puisque $F_{0,f}$ satisfait (4.17), on applique les conditions aux bords (CB3) à $M^{-1}u(\cdot)$ afin d'obtenir,

$$\begin{aligned} & (I - e^{cM}) M^{-1}\alpha_1 + (I - e^{cL}) M^{-1}\alpha_2 \\ & + (I + e^{cM}) M^{-1}\alpha_3 + (I + e^{cL}) M^{-1}\alpha_4 = M^{-1}\varphi_1. \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} & - (I - e^{cM}) M^{-1}\alpha_1 - (I - e^{cL}) M^{-1}\alpha_2 \\ & + (I + e^{cM}) M^{-1}\alpha_3 + (I + e^{cL}) M^{-1}\alpha_4 = M^{-1}\varphi_2. \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} & M(I + e^{cM}) M^{-1}\alpha_1 + L(I + e^{cL}) M^{-1}\alpha_2 \\ & + M(I - e^{cM}) M^{-1}\alpha_3 + L(I - e^{cL}) M^{-1}\alpha_4 = M^{-1}(\varphi_3 - F'_{0,f}(a)). \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} & M(I + e^{cM}) M^{-1}\alpha_1 + L(I + e^{cL}) M^{-1}\alpha_2 \\ & - M(I - e^{cM}) M^{-1}\alpha_3 - L(I - e^{cL}) M^{-1}\alpha_4 = M^{-1}(\varphi_4 - F'_{0,f}(b)). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Notons que l'on considère $M^{-1}u(x)$ pour p.p. $x \in]a, b[$, car on ne sait pas si $\alpha_i \in D(M)$, $i = 1, 2, 3, 4$. De plus, en sommant (4.34) avec (4.35) et (4.36) avec (4.37), on obtient le système abstrait

$$\left\{ \begin{array}{l} 2(I + e^{cM}) M^{-1}\alpha_3 + 2(I + e^{cL}) M^{-1}\alpha_4 = M^{-1}(\varphi_1 + \varphi_2) \\ - (I - e^{cM}) M^{-1}\alpha_1 - (I - e^{cL}) M^{-1}\alpha_2 \\ + (e^{cM} + I) M^{-1}\alpha_3 + (e^{cL} + I) M^{-1}\alpha_4 = M^{-1}\varphi_2 \\ 2M(I + e^{cM}) M^{-1}\alpha_1 + 2L(I + e^{cL}) M^{-1}\alpha_2 = M^{-1}(\varphi_3 + \varphi_4 - F'_{0,f}(b) - F'_{0,f}(a)) \\ M(I + e^{cM}) M^{-1}\alpha_1 + L(I + e^{cL}) M^{-1}\alpha_2 \\ - M(I - e^{cM}) M^{-1}\alpha_3 - L(I - e^{cL}) M^{-1}\alpha_4 = M^{-1}(\varphi_4 - F'_{0,f}(b)). \end{array} \right.$$

On en déduit alors que le système précédent est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} (I + e^{cM}) M^{-1} \alpha_3 + (I + e^{cL}) M^{-1} \alpha_4 = M^{-1} \left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right) \\ - (I - e^{cM}) M^{-1} \alpha_1 - (I - e^{cL}) M^{-1} \alpha_2 = M^{-1} \left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \right) \\ M (I + e^{cM}) M^{-1} \alpha_1 + L (I + e^{cL}) M^{-1} \alpha_2 = M^{-1} \left(\frac{\varphi_3 + \varphi_4 - F'_{0,f}(b) - F'_{0,f}(a)}{2} \right) \\ -M (I - e^{cM}) M^{-1} \alpha_3 - L (I - e^{cL}) M^{-1} \alpha_4 = M^{-1} \left(\frac{\varphi_4 - \varphi_3 - F'_{0,f}(b) + F'_{0,f}(a)}{2} \right). \end{array} \right.$$

D'où les deux systèmes suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} (I - e^{cM}) M^{-1} \alpha_1 + (I - e^{cL}) M^{-1} \alpha_2 = M^{-1} \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right) \\ M (I + e^{cM}) M^{-1} \alpha_1 + L (I + e^{cL}) M^{-1} \alpha_2 = M^{-1} \tilde{\varphi}_1, \end{array} \right. \quad (4.38)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} (I + e^{cM}) M^{-1} \alpha_3 + (I + e^{cL}) M^{-1} \alpha_4 = M^{-1} \left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right) \\ M (I - e^{cM}) M^{-1} \alpha_3 + L (I - e^{cL}) M^{-1} \alpha_4 = M^{-1} \tilde{\varphi}_2, \end{array} \right. \quad (4.39)$$

où

$$\tilde{\varphi}_1 := \frac{\varphi_3 + \varphi_4 - F'_{0,f}(a) - F'_{0,f}(b)}{2} \quad \text{et} \quad \tilde{\varphi}_2 := \frac{\varphi_3 - \varphi_4 - F'_{0,f}(a) + F'_{0,f}(b)}{2}. \quad (4.40)$$

Ainsi, la détermination unique des constantes α_i , $i = 1, 2, 3, 4$, est équivalente à montrer que les matrices Λ_1 et Λ_2 des systèmes (4.38) et (4.39) ont un déterminant inversible.

D'après (4.12), on obtient $L - M = B(L + M)^{-1}$ sur $D(M)$, ainsi on a

$$\begin{aligned} \det(\Lambda_1) &= \begin{vmatrix} (I - e^{cM})M^{-1} & (I - e^{cL})M^{-1} \\ M(I + e^{cM})M^{-1} & L(I + e^{cL})M^{-1} \end{vmatrix} \\ &= (I - e^{cM})M^{-1}L(I + e^{cL})M^{-1} - M(I + e^{cM})M^{-1}(I - e^{cL})M^{-1} \\ &= ((I - e^{cM})L(I + e^{cL}) - M(I + e^{cM})(I - e^{cL})) M^{-2} \\ &= (L - M - (L - M)e^{c(L+M)} - (L + M)(e^{cM} - e^{cL})) M^{-2} \\ &= (B(L + M)^{-1} - B(L + M)^{-1}e^{c(L+M)} - (L + M)(e^{cM} - e^{cL})) M^{-2} \\ &= B(L + M)^{-1} (I - e^{c(L+M)} - B^{-1}(L + M)^2 (e^{cM} - e^{cL})) M^{-2} \\ &= B(L + M)^{-1} M^{-2} U, \end{aligned}$$

et de la même manière

$$\begin{aligned}
 \det(\Lambda_2) &= \begin{vmatrix} (I + e^{cM})M^{-1} & (I + e^{cL})M^{-1} \\ M(I - e^{cM})M^{-1} & L(I - e^{cL})M^{-1} \end{vmatrix} \\
 &= \left(L(I + e^{cM})(I - e^{cL}) - M(I - e^{cM})(I + e^{cL}) \right) M^{-2} \\
 &= \left(B(L + M)^{-1} - B(L + M)^{-1}e^{c(L+M)} + (L + M)(e^{cM} - e^{cL}) \right) M^{-2} \\
 &= B(L + M)^{-1} \left(I - e^{c(L+M)} + B^{-1}(L + M)^2 (e^{cM} - e^{cL}) \right) M^{-2} \\
 &= B(L + M)^{-1} M^{-2} V,
 \end{aligned}$$

où U et V sont donnés par (4.2). Puisque, d'après (H_6) , U et V sont inversibles avec inverse borné, on déduit de (4.38), (4.39) et (4.40), l'expression des α_i , $i = 1, 2, 3, 4$.

$$\begin{cases} \alpha_1 &= \frac{1}{2}B^{-1}(L + M)U^{-1} \left[L(I + e^{cL})(\varphi_1 - \varphi_2) - 2(I - e^{cL})\tilde{\varphi}_1 \right] \\ \alpha_2 &= -\frac{1}{2}B^{-1}(L + M)U^{-1} \left[M(I + e^{cM})(\varphi_1 - \varphi_2) - 2(I - e^{cM})\tilde{\varphi}_1 \right] \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2}B^{-1}(L + M)V^{-1} \left[L(I - e^{cL})(\varphi_1 + \varphi_2) - 2(I + e^{cL})\tilde{\varphi}_2 \right] \\ \alpha_4 &= -\frac{1}{2}B^{-1}(L + M)V^{-1} \left[M(I - e^{cM})(\varphi_1 + \varphi_2) - 2(I + e^{cM})\tilde{\varphi}_2 \right]. \end{cases} \quad (4.41)$$

Notons que, puisque $F_{0,f} \in W^{4,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(M^4))$, d'après (2.4), on a

$$F'_{0,f}(a) \in (D(M), X)_{2+\frac{1}{p}, p} \quad \text{et} \quad F'_{0,f}(b) \in (D(M), X)_{2+\frac{1}{p}, p}. \quad (4.42)$$

En combinant cela avec (4.20), on obtient que $F'_{0,f}(a), F'_{0,f}(b), \varphi_i \in D(M^2)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Ainsi, toutes les égalités précédentes sont bien définies. Cela montre que la solution classique du problème (4.1)-(CB3) est caractérisée par (4.24), (4.40) et (4.41).

Seconde étape : Existence.

Il suffit de prouver que u , dont l'expression a été déterminée dans la première étape, est une solution classique de (4.1)-(CB3). D'après le Lemme 2.4.1, on a

$$U^{-1} = I + R_U \quad \text{et} \quad V^{-1} = I + R_V.$$

On pose $T := L$ ou M . Ainsi, d'après le Lemme 2.4.1, il existe R_U et R_V tels que

$$R_U(X), R_V(X) \subset D(M^\infty), \quad R_U T = T R_U \quad \text{et} \quad R_V T = T R_V.$$

On en déduit qu'il existe $R_i \in D(M^\infty)$, $i = 1, 2, 3, 4$, tels que

$$\begin{cases} \alpha_1 &= \frac{1}{2}B^{-1}(L + M) [L(\varphi_1 - \varphi_2) - 2\tilde{\varphi}_1] + R_1 \\ \alpha_2 &= -\frac{1}{2}B^{-1}(L + M) [M(\varphi_1 - \varphi_2) - 2\tilde{\varphi}_1] + R_2 \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2}B^{-1}(L + M) [L(\varphi_1 + \varphi_2) - 2\tilde{\varphi}_2] + R_3 \\ \alpha_4 &= -\frac{1}{2}B^{-1}(L + M) [M(\varphi_1 + \varphi_2) - 2\tilde{\varphi}_2] + R_4. \end{cases}$$

Ainsi, d'après (4.23) et (4.40), on obtient

$$\begin{cases} K_1 = B^{-1}(L+M) [L\varphi_1 - \varphi_3 + F'_{0,f}(a)] + \tilde{R}_1 \\ K_2 = B^{-1}(L+M) [L\varphi_2 + \varphi_4 - F'_{0,f}(b)] + \tilde{R}_2 \\ K_3 = -B^{-1}(L+M) [M\varphi_1 - \varphi_3 + F'_{0,f}(a)] + \tilde{R}_3 \\ K_4 = -B^{-1}(L+M) [M\varphi_2 + \varphi_4 - F'_{0,f}(b)] + \tilde{R}_4, \end{cases} \quad (4.43)$$

avec $\tilde{R}_i \in D(M^\infty)$, $i = 1, 2, 3, 4$. On pose

$$\tilde{K}_1 := K_1 + K_3 \quad \text{et} \quad \tilde{K}_2 := K_2 + K_4,$$

de ce fait, d'après (4.24), pour $x \in]a, b[$,

$$u(x) = e^{(x-a)M} \tilde{K}_1 + e^{(b-x)M} \tilde{K}_2 + \left(e^{(x-a)L} - e^{(x-a)M} \right) K_3 + \left(e^{(b-x)L} - e^{(b-x)M} \right) K_4 + F_{0,f}(x).$$

D'où, puisque $\varphi_1, \varphi_2 \in (D(M), X)_{3+\frac{1}{p}, p}$, d'après (4.10), $(L+M)(L-M) = B$, ainsi on a

$$\tilde{K}_1 = K_1 + K_3 = B^{-1}(L+M)(L-M)\varphi_1 + \tilde{R}_1 + \tilde{R}_3 = \varphi_1 + \tilde{R}_1 + \tilde{R}_3 \in (D(M), X)_{3+\frac{1}{p}, p},$$

de la même manière,

$$\tilde{K}_2 = K_2 + K_4 = B^{-1}(L+M)(L-M)\varphi_2 + \tilde{R}_2 + \tilde{R}_4 = \varphi_2 + \tilde{R}_2 + \tilde{R}_4 \in (D(M), X)_{3+\frac{1}{p}, p}.$$

Ainsi, d'après le Lemme 1.6.12, le Corollaire 1.6.13 et (4.22), on obtient que

$$u_M : x \mapsto e^{(x-a)M} \tilde{K}_1 + e^{(b-x)M} \tilde{K}_2,$$

vérifie

$$u_M \in W^{4,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(P^2)) \quad \text{et} \quad u''_M \in L^p(a, b; D(P)). \quad (4.44)$$

Donc, d'après (4.42), (4.20), $M\varphi_1, \varphi_3, F'_{0,f}(a) \in (D(M), X)_{2+\frac{1}{p}, p}$. D'après (4.43), on en déduit que

$$K_3 \in (D(M), X)_{1+\frac{1}{p}, p}.$$

D'où, d'après le Corollaire 4.3.8 et (4.22), on obtient que $v_{K_3} : x \mapsto \left(e^{(x-a)L} - e^{(x-a)M} \right) K_3$ vérifie

$$v_{K_3} \in W^{4,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(P^2)) \quad \text{et} \quad v''_{K_3} \in L^p(a, b; D(P)). \quad (4.45)$$

Par les mêmes arguments, $v_{K_4} : x \mapsto \left(e^{(x-a)L} - e^{(x-a)M} \right) K_4$ vérifie

$$v_{K_4} \in W^{4,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(P^2)) \quad \text{et} \quad v''_{K_4} \in L^p(a, b; D(P)). \quad (4.46)$$

Puisque $F_{0,f}$ est une solution classique de (4.1), d'après (4.44), (4.45) et (4.46), on en déduit que u est une solution classique de (4.1)-(CB3). $\square$

4.4.3 Preuve du 3. du Théorème 4.4.1 (Conditions aux bords (CB4))

Démonstration. On procède de la même manière que dans la preuve précédente.

Première étape : Unicité.

On suppose que (4.21) est vérifiée. Si u est une solution classique de (4.1)-(CB4), alors u est donnée par (4.24).

Puisque $F_{0,f}$ vérifie (4.17), on peut appliquer les conditions aux limites (CB4) à

$$M^{-1}u'(a), M^{-1}u'(b), M^{-2}u''(a), M^{-2}u''(b),$$

afin d'obtenir

$$\begin{aligned} & M(I + e^{cM}) M^{-1}\alpha_1 + L(I + e^{cL}) M^{-1}\alpha_2 \\ & + M(I - e^{cM}) M^{-1}\alpha_3 + L(I - e^{cL}) M^{-1}\alpha_4 = M^{-1}(\varphi_1 - F'_{0,f}(a)), \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} & M(e^{cM} + I) M^{-1}\alpha_1 + L(e^{cL} + I) M^{-1}\alpha_2 \\ & + M(e^{cM} - I) M^{-1}\alpha_3 + L(e^{cL} - I) M^{-1}\alpha_4 = M^{-1}(\varphi_2 - F'_{0,f}(b)), \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} & M^2(I - e^{cM}) M^{-2}\alpha_1 + L^2(I - e^{cL}) M^{-2}\alpha_2 \\ & + M^2(I + e^{cM}) M^{-2}\alpha_3 + L^2(I + e^{cL}) M^{-2}\alpha_4 = M^{-2}\varphi_3, \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} & M^2(e^{cM} - I) M^{-2}\alpha_1 + L^2(e^{cL} - I) M^{-2}\alpha_2 \\ & + M^2(e^{cM} + I) M^{-2}\alpha_3 + L^2(e^{cL} + I) M^{-2}\alpha_4 = M^{-2}\varphi_4. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Notons que l'on considère $M^{-1}u(x)$ et $M^{-2}u(x)$ pour p.p. $x \in]a, b[$, car on ne sait pas si $\alpha_i \in D(M)$, $i = 1, 2, 3, 4$.

En sommant (4.47) avec (4.48) et (4.49) avec (4.50), on obtient le système abstrait

$$\left\{ \begin{array}{l} 2M(I + e^{cM}) M^{-1}\alpha_1 + 2L(I + e^{cL}) M^{-1}\alpha_2 = M^{-1}(\varphi_1 + \varphi_2 - F'_{0,f}(b) - F'_{0,f}(a)) \\ M(e^{cM} + I) M^{-1}\alpha_1 + L(e^{cL} + I) M^{-1}\alpha_2 \\ + M(e^{cM} - I) M^{-1}\alpha_3 + L(e^{cL} - I) M^{-1}\alpha_4 = M^{-1}(\varphi_2 - F'_{0,f}(b)) \\ 2M^2(I + e^{cM}) M^{-2}\alpha_3 + 2L^2(I + e^{cL}) M^{-2}\alpha_4 = M^{-2}(\varphi_3 + \varphi_4) \\ M^2(e^{cM} - I) M^{-2}\alpha_1 + L^2(e^{cL} - I) M^{-2}\alpha_2 \\ + M^2(e^{cM} + I) M^{-2}\alpha_3 + L^2(e^{cL} + I) M^{-2}\alpha_4 = M^{-2}\varphi_4. \end{array} \right.$$

On en déduit alors que le système précédent est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} M(I + e^{cM})M^{-1}\alpha_1 + L(I + e^{cL})M^{-1}\alpha_2 = M^{-1}\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2 - F'_{0,f}(b) - F'_{0,f}(a)}{2}\right) \\ M(e^{cM} - I)M^{-1}\alpha_3 + L(e^{cL} - I)M^{-1}\alpha_4 = M^{-1}\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1 - F'_{0,f}(b) + F'_{0,f}(a)}{2}\right) \\ M^2(I + e^{cM})M^{-2}\alpha_3 + L^2(I + e^{cL})M^{-2}\alpha_4 = M^{-2}\left(\frac{\varphi_3 + \varphi_4}{2}\right) \\ M^2(e^{cM} - I)M^{-2}\alpha_1 + L^2(e^{cL} - I)M^{-2}\alpha_2 = M^{-2}\left(\frac{\varphi_4 - \varphi_3}{2}\right), \end{array} \right.$$

ce qui mène aux deux systèmes du second ordre suivants

$$\left\{ \begin{array}{l} (I + e^{cM})\alpha_1 + LM^{-1}(I + e^{cL})\alpha_2 = M^{-1}\tilde{\varphi}_1 \\ (I - e^{cM})\alpha_1 + L^2M^{-2}(I - e^{cL})\alpha_2 = M^{-2}\left(\frac{\varphi_3 - \varphi_4}{2}\right), \end{array} \right. \quad (4.51)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} (I - e^{cM})\alpha_3 + LM^{-1}(I - e^{cL})\alpha_4 = M^{-1}\tilde{\varphi}_2 \\ (I + e^{cM})\alpha_3 + L^2M^{-2}(I + e^{cL})\alpha_4 = M^{-2}\left(\frac{\varphi_3 + \varphi_4}{2}\right), \end{array} \right. \quad (4.52)$$

où

$$\tilde{\varphi}_1 := \frac{\varphi_1 + \varphi_2 - F'_{0,f}(a) - F'_{0,f}(b)}{2} \quad \text{et} \quad \tilde{\varphi}_2 := \frac{\varphi_1 - \varphi_2 - F'_{0,f}(a) + F'_{0,f}(b)}{2}. \quad (4.53)$$

Soient Λ_1 et Λ_2 leurs matrices correspondantes. D'après (4.12), $L - M = B(L + M)^{-1}$ sur $D(M)$, ainsi on a

$$\begin{aligned} \det(\Lambda_1) &= \begin{vmatrix} I + e^{cM} & LM^{-1}(I + e^{cL}) \\ I - e^{cM} & L^2M^{-2}(I - e^{cL}) \end{vmatrix} \\ &= L^2M^{-2}(I - e^{cL})(I + e^{cM}) - LM^{-1}(I + e^{cL})(I - e^{cM}) \\ &= \left((L - M) - (L - M)e^{c(L+M)} + (L + M)(e^{cM} - e^{cL})\right)LM^{-2} \\ &= \left(B(L + M)^{-1} - B(L + M)^{-1}e^{c(L+M)} + (L + M)(e^{cM} - e^{cL})\right)LM^{-2} \\ &= BLM^{-2}(L + M)^{-1}\left(I - e^{c(L+M)} + B^{-1}(L + M)^2(e^{cM} - e^{cL})\right) \\ &= BLM^{-2}(L + M)^{-1}V, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \det(\Lambda_2) &= \begin{vmatrix} I - e^{cM} & LM^{-1}(I - e^{cL}) \\ I + e^{cM} & L^2M^{-2}(I + e^{cL}) \end{vmatrix} \\
 &= L^2M^{-2}(I - e^{cM})(I + e^{cL}) - LM^{-1}(I - e^{cL})(I + e^{cM}) \\
 &= \left((L - M) - (L - M)e^{c(L+M)} - (L + M)(e^{cM} - e^{cL}) \right) LM^{-2} \\
 &= \left(B(L + M)^{-1} - B(L + M)^{-1}e^{c(L+M)} - (L + M)(e^{cM} - e^{cL}) \right) LM^{-2} \\
 &= BLM^{-2}(L + M)^{-1} \left(I - e^{c(L+M)} - B^{-1}(L + M)^2(e^{cM} - e^{cL}) \right) \\
 &= BLM^{-2}(L + M)^{-1}U,
 \end{aligned}$$

où U et V sont donnés par (4.2). Puisque, d'après (H_6) , U et V sont inversibles dans $\mathcal{L}(X)$, on déduit de (4.51), (4.52) et (4.53) que

$$\begin{cases} \alpha_1 &= \frac{1}{2}B^{-1}(L + M)V^{-1} \left[2(I - e^{cL})LM^{-1}\tilde{\varphi}_1 - (I + e^{cL})M^{-1}(\varphi_3 - \varphi_4) \right] \\ \alpha_2 &= -\frac{1}{2}B^{-1}(L + M)V^{-1} \left[2(I - e^{cM})ML^{-1}\tilde{\varphi}_1 - (I + e^{cM})L^{-1}(\varphi_3 - \varphi_4) \right] \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2}B^{-1}(L + M)U^{-1} \left[2(I + e^{cL})LM^{-1}\tilde{\varphi}_2 - (I - e^{cL})M^{-1}(\varphi_3 + \varphi_4) \right] \\ \alpha_4 &= -\frac{1}{2}B^{-1}(L + M)U^{-1} \left[2(I + e^{cM})ML^{-1}\tilde{\varphi}_2 - (I - e^{cM})L^{-1}(\varphi_3 + \varphi_4) \right]. \end{cases} \quad (4.54)$$

Ainsi, d'après (4.23) et (4.54) on obtient l'unicité de la solution de (4.1)-(CB4).

Seconde étape : Existence.

Soit u , déterminée dans la première étape, alors u est aussi donnée par (4.24). De ce fait, d'après (4.22), il suffit de montrer que $\tilde{K}_1, \tilde{K}_2 \in (D(M), X)_{3+\frac{1}{p}, p}$ et $K_3, K_4 \in (D(M), X)_{1+\frac{1}{p}, p}$. D'après le Lemme 2.4.1, il existe $R_i \in D(M^\infty)$, $i = 1, 2, 3, 4$, tels que

$$\begin{cases} \alpha_1 &= \frac{1}{2}B^{-1}(L + M) \left[2LM^{-1}\tilde{\varphi}_1 - M^{-1}\varphi_3 - \varphi_4 \right] + R_1 \\ \alpha_2 &= -\frac{1}{2}B^{-1}(L + M) \left[2ML^{-1}\tilde{\varphi}_1 - L^{-1}(\varphi_3 - \varphi_4) \right] + R_2 \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2}B^{-1}(L + M) \left[2LM^{-1}\tilde{\varphi}_2 - M^{-1}(\varphi_3 + \varphi_4) \right] + R_3 \\ \alpha_4 &= -\frac{1}{2}B^{-1}(L + M) \left[2ML^{-1}\tilde{\varphi}_2 - L^{-1}(\varphi_3 + \varphi_4) \right] + R_4. \end{cases}$$

Ainsi, d'après (4.23) et (4.53), il existe $\tilde{R}_i \in D(M^\infty)$, $i = 1, 2, 3, 4$, tels que

$$\begin{cases} K_1 &= B^{-1}(L + M) \left[LM^{-1}(\varphi_1 - F'_{0,f}(a)) - M^{-1}\varphi_3 \right] + \tilde{R}_1 \\ K_2 &= B^{-1}(L + M) \left[LM^{-1}(-\varphi_2 + F'_{0,f}(b)) - M^{-1}\varphi_4 \right] + \tilde{R}_2 \\ K_3 &= -B^{-1}(L + M) \left[ML^{-1}(\varphi_1 - F'_{0,f}(a)) - L^{-1}\varphi_3 \right] + \tilde{R}_3 \\ K_4 &= -B^{-1}(L + M) \left[ML^{-1}(-\varphi_2 + F'_{0,f}(b)) - L^{-1}\varphi_4 \right] + \tilde{R}_4. \end{cases} \quad (4.55)$$

Puisque

$$\varphi_1, F'_{0,f}(a) \in (D(M), X)_{2+\frac{1}{p},p} \quad \text{et} \quad \varphi_3 \in (D(M), X)_{1+\frac{1}{p},p},$$

alors d'après (4.10), on a $L^2 - M^2 = B$ sur $D(M^2)$ et d'après (4.12), on a $L - M = B(L + M)^{-1}$ sur $D(M)$. Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{K}_1 &= K_1 + K_3 \\ &= B^{-1}(L + M) \left[(LM^{-1} - ML^{-1})(\varphi_1 - F'_{0,f}(a)) + (L^{-1} - M^{-1})\varphi_3 \right] + \tilde{R}_1 + \tilde{R}_2 \\ &= B^{-1}(L + M) \left[(L^2 - M^2)M^{-1}L^{-1}(\varphi_1 - F'_{0,f}(a)) - (L - M)M^{-1}L^{-1}\varphi_3 \right] + \tilde{R}_1 + \tilde{R}_2 \\ &= B^{-1}(L + M) \left[BM^{-1}L^{-1}(\varphi_1 - F'_{0,f}(a)) - B(L + M)^{-1}M^{-1}L^{-1}\varphi_3 \right] + \tilde{R}_1 + \tilde{R}_2 \\ &= (L + M)M^{-1}L^{-1}(\varphi_1 - F'_{0,f}(a)) - M^{-1}L^{-1}\varphi_3 + \tilde{R}_1 + \tilde{R}_2 \in (D(M), X)_{3+\frac{1}{p},p}. \end{aligned}$$

De la même manière, puisque

$$\varphi_2, F'_{0,f}(b) \in (D(M), X)_{2+\frac{1}{p},p} \quad \text{et} \quad \varphi_4 \in (D(M), X)_{1+\frac{1}{p},p},$$

alors d'après (4.10) et (4.12), on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{K}_2 &= K_2 + K_4 \\ &= B^{-1}(L + M) \left[(LM^{-1} - ML^{-1})(-\varphi_2 + F'_{0,f}(b)) + (L^{-1} - M^{-1})\varphi_4 \right] + \tilde{R}_2 + \tilde{R}_4 \\ &= B^{-1}(L + M) \left[(L^2 - M^2)M^{-1}L^{-1}(-\varphi_2 + F'_{0,f}(b)) - (L - M)M^{-1}L^{-1}\varphi_4 \right] + \tilde{R}_2 + \tilde{R}_4 \\ &= B^{-1}(L + M) \left[BM^{-1}L^{-1}(-\varphi_2 + F'_{0,f}(b)) - B(L + M)^{-1}M^{-1}L^{-1}\varphi_4 \right] + \tilde{R}_2 + \tilde{R}_4 \\ &= (L + M)M^{-1}L^{-1}(F'_{0,f}(b) - \varphi_2) - M^{-1}L^{-1}\varphi_4 + \tilde{R}_2 + \tilde{R}_4 \in (D(M), X)_{3+\frac{1}{p},p}. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après le Lemme 1.6.12, le Corollaire 1.6.13 et (4.22), on obtient que

$$u_M : x \mapsto e^{(x-a)M} \tilde{K}_1 + e^{(b-x)M} \tilde{K}_2,$$

vérifie

$$u_M \in W^{4,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(P^2)) \quad \text{et} \quad u''_M \in L^p(a, b; D(P)). \quad (4.56)$$

De plus, d'après (4.21) et (4.42),

$$(L + M)\varphi_1, (L + M)F'_{0,f}(a), \varphi_3 \in (D(M), X)_{1+\frac{1}{p},p},$$

d'après (4.55), on en déduit que

$$K_3 \in (D(M), X)_{1+\frac{1}{p},p}.$$

D'où, d'après le Corollaire 4.3.8 et (4.22), on obtient que

$$v_{K_3} : x \mapsto \left(e^{(x-a)L} - e^{(x-a)M} \right) K_3,$$

vérifie

$$v_{K_3} \in W^{4,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(P^2)) \quad \text{et} \quad v''_{K_3} \in L^p(a, b; D(P)). \quad (4.57)$$

De même, puisque

$$(L + M)\varphi_2, (L + M)F'_{0,f}(b), \varphi_4 \in (D(M), X)_{1+\frac{1}{p}, p},$$

d'après (4.55), on en déduit que

$$K_4 \in (D(M), X)_{1+\frac{1}{p}, p}.$$

Ainsi, d'après le Corollaire 4.3.8 et (4.22), on obtient que

$$v_{K_4} : x \mapsto \left(e^{(x-a)L} - e^{(x-a)M} \right) K_4,$$

vérifie

$$v_{K_4} \in W^{4,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(P^2)) \quad \text{et} \quad v''_{K_4} \in L^p(a, b; D(P)). \quad (4.58)$$

Puisque $F_{0,f}$ est une solution classique de (4.1), d'après (4.56), (4.57) et (4.58), on en déduit que u est une solution classique de (4.1)-(CB4). $\square$

Chapitre 5

Problème de transmission lié au biharmonique

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, on utilise ici les résultats du chapitre 2 afin de traiter le cas d'un problème de transmission entre deux habitats juxtaposés avec une interface commune. La motivation ici est l'étude de problèmes ne faisant intervenir que le bilaplacien, cette dernière étant étendue à des opérateurs plus généraux.

Notons que l'on étudiera au chapitre suivant un problème de transmission similaire utilisant les résultats du chapitre 3 et permettant de considérer comme cas particulier des opérateurs combinant laplacien et bilaplacien.

Plus précisément, on considère l'ouvert cylindrique $\Omega = \Omega_- \cup \Omega_+$ de $\mathbb{R}^n$ constitué des deux habitats juxtaposés

$$\begin{cases} \Omega_- &:=]a, \gamma[\times \omega \\ \Omega_+ &:=]\gamma, b[\times \omega, \end{cases}$$

et de leur interface

$$\Gamma = \{\gamma\} \times \omega,$$

où ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^{n-1}$. On considère les équations linéaires stationnaires suivantes

$$(EQ_{edp}) \begin{cases} k_- \Delta^2 u_- = f_- & \text{dans } \Omega_- \\ k_+ \Delta^2 u_+ = f_+ & \text{dans } \Omega_+, \end{cases}$$

où

$$u = \begin{cases} u_- & \text{dans } \Omega_- \\ u_+ & \text{dans } \Omega_+ \end{cases} \quad \text{et} \quad f = \begin{cases} f_- & \text{dans } \Omega_- \\ f_+ & \text{dans } \Omega_+, \end{cases}$$

avec f donnée dans $L^p(a, b; L^p(\omega)) = L^p(\Omega)$, et k_+, k_- des réels non nuls. Le fait de ne considérer que le bilaplacien permet ici de considérer k_+ et k_- de signe quelconque.

Les variables d'espace sont notées (x, y) avec $x \in]a, b[$ et $y \in \omega$. Les équations précédentes

sont considérées sous les conditions aux bords

$$(CB_{edp}) \begin{cases} (1) \begin{cases} u_-(x, \zeta) = 0, & x \in]a, \gamma[, \zeta \in \partial\omega \\ u_+(x, \zeta) = 0, & x \in]\gamma, b[, \zeta \in \partial\omega \\ \Delta u_-(x, \zeta) = 0, & x \in]a, \gamma[, \zeta \in \partial\omega \\ \Delta u_+(x, \zeta) = 0, & x \in]\gamma, b[, \zeta \in \partial\omega \end{cases} \\ (2) \begin{cases} u_-(a, y) = \varphi_1^-(y), & u_+(b, y) = \varphi_1^+(y), & y \in \omega \\ \frac{\partial u_-}{\partial x}(a, y) = \varphi_2^-(y), & \frac{\partial u_+}{\partial x}(b, y) = \varphi_2^+(y), & y \in \omega, \end{cases} \end{cases}$$

($\varphi_1^\pm$ et $\varphi_2^\pm$ seront données dans des espaces appropriés) et sous les conditions de transmissions

$$(CT_{edp}) \begin{cases} u_- = u_+ & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial u_-}{\partial x} = \frac{\partial u_+}{\partial x} & \text{sur } \Gamma \\ k_- \Delta u_- = k_+ \Delta u_+ & \text{sur } \Gamma \\ k_- \frac{\partial \Delta u_-}{\partial x} = k_+ \frac{\partial \Delta u_+}{\partial x} & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Les deux premières conditions aux bords de (1) dans (CB_{edp}) signifient simplement que les individus meurent quand ils atteignent les autres parties des bords $]a, b[\times \partial\omega$ (c'est-à-dire que l'on a un bord inhospitalier); les deux dernières conditions de (1) signifient qu'il n'y a pas de dispersion dans la direction de la normale. On en déduit que la dispersion s'annule sur $]a, b[\times \partial\omega$, ce qui se traduit par

$$\begin{cases} \Delta u_- = 0 & \text{sur }]a, \gamma[\times \partial\omega \\ \Delta u_+ = 0 & \text{sur }]\gamma, b[\times \partial\omega. \end{cases}$$

Dans (2) de (CB_{edp}) , la densité de population et le flux sont donnés, par exemple sur $\{a\} \times \omega$ et sur $\{b\} \times \omega$. Cela signifie que les habitats ne sont pas séparés.

Dans (CT_{edp}) , les deux premières conditions de transmission traduisent la continuité de la densité et de son flux à l'interface, alors que les deux secondes modélisent (en un certain sens) la continuité (ou proportionnalité) de la dispersion et de son flux en Γ .

Notons que lorsque l'on considère différents types d'habitats, la réponse des individus à l'interface est importante pour le comportement du mouvement général.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante :

Dans la section 5.2, on transforme le problème de transmission EDP en un problème de transmission opérationnel (P) .

Dans la section 5.3, on détaille nos hypothèses sur l'espace X et l'opérateur A ; puis on effectue quelques remarques sous forme de conséquences sur nos hypothèses.

Dans la section 5.4, on fait tout d'abord une remarque importante dans laquelle, on définit les problèmes auxiliaires (P_+) et (P_-) ainsi que la notion de solution classique du problème (P) ; puis on rappelle deux lemmes techniques avant de montrer l'existence et l'unicité de la solution des problèmes (P_+) et (P_-) . Ensuite, on établit un théorème technique qui montre l'équivalence entre la résolution du problème (P) et la résolution d'un système linéaire opérationnel à deux inconnues.

Dans la section 5.5, on démontre le résultat principal, le Théorème 5.5.1, qui donne l'existence et l'unicité d'une solution classique u au problème (P) .

Finalement, dans la section 5.6, comme conséquence du Théorème 5.5.1, on obtient le Corollaire 5.6.1 qui établit l'existence et l'unicité d'une solution u du problème (P_{edp}) .

5.2 Formulation opérationnelle

Dans cette section, on présente tout d'abord le problème EDP noté (P_{edp}) qui est composé de $(EQ_{edp}) - (CB_{edp}) - (CT_{edp})$. Puis, en utilisant l'opérateur A_0 (que l'on rappelle), on réécrit ce problème sous la forme d'un problème opérationnel. On généralise ensuite en remplaçant A_0 par un opérateur A .

On considère le problème

$$(P_{edp}) \left\{ \begin{array}{lll} k_- \Delta^2 u_- & = & f_- \quad \text{dans } \Omega_- \\ k_+ \Delta^2 u_+ & = & f_+ \quad \text{dans } \Omega_+ \\ u_-(x, \zeta) & = & 0, \quad x \in]a, \gamma[, \zeta \in \partial\omega \\ u_+(x, \zeta) & = & 0, \quad x \in]\gamma, b[, \zeta \in \partial\omega \\ \Delta u_-(x, \zeta) & = & 0, \quad x \in]a, \gamma[, \zeta \in \partial\omega \\ \Delta u_+(x, \zeta) & = & 0, \quad x \in]\gamma, b[, \zeta \in \partial\omega \\ u_-(a, y) & = & \varphi_1^-(y), \quad y \in \omega \\ u_+(b, y) & = & \varphi_1^+(y), \quad y \in \omega \\ \frac{\partial u_-}{\partial x}(a, y) & = & \varphi_2^-(y), \quad y \in \omega \\ \frac{\partial u_+}{\partial x}(b, y) & = & \varphi_2^+(y), \quad y \in \omega \\ u_- & = & u_+ \quad \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial u_-}{\partial x} & = & \frac{\partial u_+}{\partial x} \quad \text{sur } \Gamma \\ k_- \Delta u_- & = & k_+ \Delta u_+ \quad \text{sur } \Gamma \\ k_- \frac{\partial \Delta u_-}{\partial x} & = & k_+ \frac{\partial \Delta u_+}{\partial x} \quad \text{sur } \Gamma. \end{array} \right.$$

On rappelle la définition de l'opérateur linéaire A_0 , l'opérateur laplacien dans $\mathbb{R}^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} D(A_0) := \{\psi \in W^{2,p}(\omega) : \psi = 0 \text{ sur } \partial\omega\} \\ \forall \psi \in D(A_0), \quad A_0 \psi = \Delta_y \psi. \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Ainsi, en utilisant l'opérateur A_0 et les notations usuelles

$$u_{\pm}(x) := u_{\pm}(x, \cdot) \quad \text{et} \quad f_{\pm}(x) := f_{\pm}(x, \cdot)/k_{\pm},$$

le problème (P_{edp}) devient

$$\left\{ \begin{array}{l} u_-^{(4)}(x) + 2A_0 u_-''(x) + A_0^2 u_-(x) = f_-(x), \quad \text{p.p. } x \in]a, \gamma[\\ u_+^{(4)}(x) + 2A_0 u_+''(x) + A_0^2 u_+(x) = f_+(x), \quad \text{p.p. } x \in]\gamma, b[\\ u_-(a) = \varphi_1^-, \quad u_+(b) = \varphi_1^+ \\ u'_-(a) = \varphi_2^-, \quad u'_+(b) = \varphi_2^+ \\ u_-(\gamma) = u_+(\gamma) \\ u'_-(\gamma) = u'_+(\gamma) \\ k_- u_-''(\gamma) + k_- A_0 u_-(\gamma) = k_+ u_+''(\gamma) + k_+ A_0 u_+(\gamma) \\ k_- u_-^{(3)}(\gamma) + k_- A_0 u'_-(\gamma) = k_+ u_+^{(3)}(\gamma) + k_+ A_0 u'_+(\gamma), \end{array} \right.$$

où

$$f_- \in L^p(a, \gamma; L^p(\omega)), \quad f_+ \in L^p(\gamma, b; L^p(\omega)) \quad \text{avec} \quad p \in]1, +\infty[.$$

On considère une généralisation de ce problème en remplaçant $L^p(\omega)$ par X , un espace de Banach complexe de type UMD (voir Théorème 1.5.4) et $(-A_0, D(-A_0))$ par $(-A, D(-A))$ un opérateur BIP d'angle $\theta_A \in [0, \pi[$ sur X , (voir Définition 1.3.17).

Plus précisément, on étudie le problème de transmission (P) suivant :

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} (EQ) \left\{ \begin{array}{l} u_-^{(4)}(x) + 2Au_-''(x) + A^2u_-(x) = f_-(x), \quad \text{p.p. } x \in]a, \gamma[\\ u_+^{(4)}(x) + 2Au_+''(x) + A^2u_+(x) = f_+(x), \quad \text{p.p. } x \in]\gamma, b[\end{array} \right. \\ (CB) \left\{ \begin{array}{l} u_-(a) = \varphi_1^-, \quad u_+(b) = \varphi_1^+ \\ u'_-(a) = \varphi_2^-, \quad u'_+(b) = \varphi_2^+ \end{array} \right. \\ (CT) \left\{ \begin{array}{l} u_-(\gamma) = u_+(\gamma) \\ u'_-(\gamma) = u'_+(\gamma) \\ k_-u_-''(\gamma) + k_-Au_-(\gamma) = k_+u_+''(\gamma) + k_+Au_+(\gamma) \\ k_-u_-^{(3)}(\gamma) + k_-Au'_-(\gamma) = k_+u_+^{(3)}(\gamma) + k_+Au'_+(\gamma). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Les conditions de transmission (CT) se divisent en

$$(CT1) \left\{ \begin{array}{l} u_-(\gamma) = u_+(\gamma) \\ u'_-(\gamma) = u'_+(\gamma), \end{array} \right.$$

et

$$(CT2) \left\{ \begin{array}{l} k_-u_-''(\gamma) + k_-Au_-(\gamma) = k_+u_+''(\gamma) + k_+Au_+(\gamma) \\ k_-u_-^{(3)}(\gamma) + k_-Au'_-(\gamma) = k_+u_+^{(3)}(\gamma) + k_+Au'_+(\gamma). \end{array} \right.$$

Notons que $(CT2)$ est bien définie d'après le Lemme 1.6.11.

On cherche une solution classique du problème (P) , qui est une solution u telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} u_- := u|_{]a, \gamma[} \in W^{4,p}(a, \gamma; X) \cap L^p(a, \gamma; D(A^2)), \quad u_-'' \in L^p(a, \gamma; D(A)) \\ u_+ := u|_{] \gamma, b[} \in W^{4,p}(\gamma, b; X) \cap L^p(\gamma, b; D(A^2)), \quad u_+'' \in L^p(\gamma, b; D(A)), \end{array} \right.$$

et qui vérifie $(EQ) - (CB) - (CT)$.

5.3 Hypothèses

Dans la suite de ce chapitre, $(X, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach complexe, $k_+, k_- \in \mathbb{R}^*$ et A désigne un opérateur linéaire fermé dans X . Une partie des résultats de ce chapitre utilise le célèbre Théorème de Dore-Venni (voir Théorème 1.7.4 du Chapitre 1 ou l'article [12]) et sa généralisation due à J. Prüss et H. Sohr (voir le Théorème 1.5.7 du Chapitre 1 ou l'article [38]), qui nécessite de considérer un espace X de type UMD. (voir Théorème 1.5.4 du Chapitre 1).

On suppose que :

- (H_1) X est un espace UMD,
- (H_2) A est un opérateur linéaire inversible,
- (H_3) $-A \in \text{BIP}(X, \theta_A)$ avec $\theta_A \in [0, \pi[$,

Certains de nos résultats nécessiteront des hypothèses supplémentaires :

$$(H_4) \quad \sigma(A) \subset]-\infty, 0[\quad \text{et} \quad \forall \theta \in]0, \pi[, \sup_{\lambda \in S_\theta} \|\lambda(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty,$$

$$(H_5) \quad k_+ k_- > 0,$$

Notons que (H_4) signifie que $-A$ est un opérateur sectoriel d'angle 0 (voir Définition 1.1.29). On donne maintenant quelques conséquences sur nos hypothèses.

Remarque 5.3.1.

1. Notons que A_0 vérifie toutes les hypothèses précédentes avec $X = L^q(\omega)$, $q \in]1, +\infty[$.
2. Afin de résoudre chaque équation de (EQ) dans le cas scalaire (avec $-A > 0$), il est nécessaire d'introduire les racines $\pm\sqrt{-A}$ de l'équation caractéristique

$$X^4 + 2AX^2 + A^2 = 0,$$

c'est pourquoi dans notre cas opérationnel, on considère l'opérateur

$$M := -\sqrt{-A}.$$

Grâce à (H_3) , $-A$ est un opérateur sectoriel, d'où l'existence de M (voir M. Haase [23]).

3. D'après (H_2) on en déduit que $0 \in \rho(M)$ (voir M. Haase [23], Proposition 3.3.1, e), p. 62).
4. D'après (H_3) et M. Haase [23], Proposition 3.2.1, e), p. 71, on en déduit que

$$-M \in \text{BIP}(X, \theta_A/2).$$

5. Enfin, puisque $\theta/2 \in [0, \pi/2[$, M génère un semi-groupe analytique $(e^{xM})_{x \geq 0}$ (voir J. Prüss et H. Sohr [38], Theorem 2, p. 437). Notons que pour tout $\alpha > 0$, on a

$$-\alpha M \in \text{BIP}(X, \theta_A/2).$$

D'où, αM génère un semi-groupe analytique $(e^{x\alpha M})_{x \geq 0}$.

5.4 Résultats préliminaires

Afin de résoudre le problème (P) , on introduit deux problèmes :

$$(P_-) \quad \begin{cases} u_-^{(4)}(x) + 2Au_-''(x) + A^2u_-(x) = f_-(x), & \text{p.p. } x \in]a, \gamma[, \\ u_-(a) = \varphi_1^-, & u_-(\gamma) = \psi_1, \\ u_-'(a) = \varphi_2^-, & u_-'(\gamma) = \psi_2, \end{cases}$$

et

$$(P_+) \quad \begin{cases} u_+^{(4)}(x) + 2Au_+''(x) + A^2u_+(x) = f_+(x), & \text{p.p. } x \in]\gamma, b[, \\ u_+(\gamma) = \psi_1, & u_+(b) = \varphi_1^+, \\ u_+'(\gamma) = \psi_2, & u_+'(b) = \varphi_2^+. \end{cases}$$

Remarque 5.4.1. On obtient que u est une solution classique de (P) si et seulement s'il existe $\psi_1, \psi_2 \in X$ telles que :

- (i) u_- est une solution classique de (P_-) ,
- (ii) u_+ est une solution classique de (P_+) ,
- (iii) u_- et u_+ vérifient (CT2).

Notre but est donc de montrer qu'il existe un unique couple (ψ_1, ψ_2) qui vérifie (i), (ii) et (iii).

D'après la remarque précédente, pour résoudre le problème (P) , il nous faut tout d'abord résoudre les problèmes (P_+) et (P_-) . Afin de simplifier les notations, on pose

$$c = \gamma - a > 0 \quad \text{et} \quad d = b - \gamma > 0.$$

Tout d'abord, on a besoin d'un résultat d'inversibilité obtenu dans la section 2.4.2 du Chapitre 2.

Lemme 5.4.2. *Les opérateurs U_- , U_+ , V_- , $V_+ \in \mathcal{L}(X)$ définis par*

$$\begin{cases} U_- := I - e^{2cM} + 2cMe^{cM}, & U_+ := I - e^{2dM} + 2dMe^{dM}, \\ V_- := I - e^{2cM} - 2cMe^{cM}, & V_+ := I - e^{2dM} - 2dMe^{dM}, \end{cases} \quad (5.2)$$

sont inversibles avec inverse borné.

Toutes ces exponentielles sont bien définies grâce au point 3. de la Remarque 5.3.1. Pour une preuve détaillée, voir chapitre 2, section 2.4.2, Proposition 2.4.5 avec $b - a = c$ ou $b - a = d$.

5.4.1 Le problème (P_-)

Proposition 5.4.3. *Soit $f_- \in L^p(a, \gamma; X)$. On suppose que (H_1) , (H_2) , (H_3) et (H_4) sont vraies. Alors il existe une unique solution classique u_- au problème (P_-) si et seulement si*

$$\varphi_1^-, \psi_1 \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2p}, p} \quad \text{et} \quad \varphi_2^-, \psi_2 \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p}. \quad (5.3)$$

De plus

$$\begin{aligned} u_-(x) = & \left(e^{(x-a)M} - e^{(\gamma-x)M} \right) \alpha_1 + \left((x-a)e^{(x-a)M} - (\gamma-x)e^{(\gamma-x)M} \right) \alpha_2 \\ & + \left(e^{(x-a)M} + e^{(\gamma-x)M} \right) \alpha_3 + \left((x-a)e^{(x-a)M} + (\gamma-x)e^{(\gamma-x)M} \right) \alpha_4 + F_-(x), \end{aligned} \quad (5.4)$$

où

$$\begin{cases} \alpha_1^- := -\frac{1}{2}U_-^{-1} \left((I + (I + cM)e^{cM}) \psi_1 + ce^{cM} \psi_2 \right) + \tilde{\varphi}_1^- \\ \alpha_2^- := \frac{1}{2}U_-^{-1} \left((I + e^{cM}) M \psi_1 + (I - e^{cM}) \psi_2 \right) + \tilde{\varphi}_2^- \\ \alpha_3^- := \frac{1}{2}V_-^{-1} \left((I - (I + cM)e^{cM}) \psi_1 + ce^{cM} \psi_2 \right) + \tilde{\varphi}_3^- \\ \alpha_4^- := -\frac{1}{2}V_-^{-1} \left((I - e^{cM}) M \psi_1 + (I + e^{cM}) \psi_2 \right) + \tilde{\varphi}_4^-, \end{cases} \quad (5.5)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\varphi}_1^- := \frac{1}{2}U_-^{-1} \left(\varphi_1^- + e^{cM} \left(\varphi_1^- + c \left(M\varphi_1^- + \varphi_2^- - F'_-(a) - F'_-(\gamma) \right) \right) \right) \\ \tilde{\varphi}_2^- := -\frac{1}{2}U_-^{-1} \left(M\varphi_1^- + \varphi_2^- + F'_-(a) + F'_-(\gamma) \right) \\ \quad -\frac{1}{2}U_-^{-1}e^{cM} \left(M\varphi_1^- - \varphi_2^- - F'_-(a) - F'_-(\gamma) \right) \\ \tilde{\varphi}_3^- := \frac{1}{2}V_-^{-1} \left(\varphi_1^- - e^{cM} \left(\varphi_1^- + c \left(M\varphi_1^- + \varphi_2^- - F'_-(a) + F'_-(\gamma) \right) \right) \right) \\ \tilde{\varphi}_4^- := -\frac{1}{2}V_-^{-1} \left(M\varphi_1^- - \varphi_2^- + F'_-(a) - F'_-(\gamma) \right) \\ \quad +\frac{1}{2}V_-^{-1}e^{cM} \left(M\varphi_1^- + \varphi_2^- - F'_-(a) + F'_-(\gamma) \right), \end{array} \right. \quad (5.6)$$

et F_- est l'unique solution classique au problème

$$\left\{ \begin{array}{l} u_-^{(4)}(x) + 2Au_-''(x) + A^2u_-(x) = f_-(x), \quad p.p. \ x \in]a, \gamma[\\ u_-(a) = u_-(\gamma) = u_-''(a) = u_-''(\gamma) = 0. \end{array} \right. \quad (5.7)$$

Démonstration. D'après le Chapitre 2 (Théorème 2.4.2, 2.), il existe une unique solution classique u_- au problème (P_-) si et seulement si (5.3) est vérifiée. De plus, la formule de représentation de u_- est donnée dans le chapitre 2 à la section 2.4.2 par (2.32), où $u, f, b, F_{0,f}, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ sont respectivement remplacées par $u_-, f_-, \gamma, F_-, \varphi_1^-, \psi_1, \varphi_2^-, \psi_2$. Cela prouve que la formule de représentation de u_- est donnée par (5.4), (5.5) et (5.6). $\square$

Remarque 5.4.4. Dans la proposition précédente, grâce à (5.3), (5.5) et (5.6), on a

$$\alpha_1^-, \alpha_3^- \in D(M^3) \quad \text{et} \quad \alpha_2^-, \alpha_4^- \in D(M^2).$$

De plus, F_- étant une solution classique de (5.7), d'après le Lemme 1.6.11, pour $j = 0, 1, 2, 3$

$$F_-^{(j)}(s) \in (D(M), X)_{3-j+\frac{1}{p}, p}, \quad s = a \text{ ou } \gamma.$$

5.4.2 Le problème (P_+)

Proposition 5.4.5. Soit $f_+ \in L^p(\gamma, b; X)$. On suppose que $(H_1), (H_2), (H_3)$ et (H_4) sont vraies. Alors il existe une unique solution classique u_+ au problème (P_+) si et seulement si

$$\varphi_1^+, \psi_1 \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2p}, p} \quad \text{et} \quad \varphi_2^+, \psi_2 \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p}. \quad (5.8)$$

De plus

$$\begin{aligned} u_+(x) = & \left(e^{(x-\gamma)M} - e^{(b-x)M} \right) \alpha_1 + \left((x-\gamma)e^{(x-\gamma)M} - (b-x)e^{(b-x)M} \right) \alpha_2 \\ & + \left(e^{(x-\gamma)M} + e^{(b-x)M} \right) \alpha_3 + \left((x-\gamma)e^{(x-\gamma)M} + (b-x)e^{(b-x)M} \right) \alpha_4 + F_+(x), \end{aligned} \quad (5.9)$$

où

$$\begin{cases} \alpha_1^+ &:= \frac{1}{2}U_+^{-1} \left((I + (I + dM) e^{dM}) \psi_1 + de^{dM} \psi_2 \right) + \tilde{\varphi}_1^+ \\ \alpha_2^+ &:= -\frac{1}{2}U_+^{-1} \left((I + e^{dM}) M\psi_1 - (I - e^{dM}) \psi_2 \right) + \tilde{\varphi}_2^+ \\ \alpha_3^+ &:= \frac{1}{2}V_+^{-1} \left((I - (I + dM) e^{dM}) \psi_1 - de^{dM} \psi_2 \right) + \tilde{\varphi}_3^+ \\ \alpha_4^+ &:= -\frac{1}{2}V_+^{-1} \left((I - e^{dM}) M\psi_1 - (I + e^{dM}) \psi_2 \right) + \tilde{\varphi}_4^+, \end{cases} \quad (5.10)$$

avec

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_1^+ &:= -\frac{1}{2}U_+^{-1} \left(\varphi_1^+ + e^{dM} \left(\varphi_1^+ + d \left(M\varphi_1^+ - \varphi_2^+ + F_+'(\gamma) + F_+'(b) \right) \right) \right) \\ \tilde{\varphi}_2^+ &:= \frac{1}{2}U_+^{-1} \left(M\varphi_1^+ + \varphi_2^+ - F_+'(\gamma) - F_+'(b) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2}U_+^{-1}e^{dM} \left(M\varphi_1^+ - \varphi_2^+ + F_+'(\gamma) + F_+'(b) \right) \\ \tilde{\varphi}_3^+ &:= \frac{1}{2}V_+^{-1} \left(\varphi_1^+ - e^{dM} \left(\varphi_1^+ + d \left(M\varphi_1^+ - \varphi_2^+ - F_+'(\gamma) + F_+'(b) \right) \right) \right) \\ \tilde{\varphi}_4^+ &:= -\frac{1}{2}V_+^{-1} \left(M\varphi_1^+ + \varphi_2^+ + F_+'(\gamma) - F_+'(b) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2}V_+^{-1}e^{dM} \left(M\varphi_1^+ - \varphi_2^+ - F_+'(\gamma) + F_+'(b) \right), \end{cases} \quad (5.11)$$

et F_+ est l'unique solution classique au problème

$$\begin{cases} u_+^{(4)}(x) + 2Au_+''(x) + A^2u_+(x) = f_+(x), & p.p. \ x \in]\gamma, b[\\ u_+(\gamma) = u_+(b) = u_+''(\gamma) = u_+''(b) = 0. \end{cases} \quad (5.12)$$

Démonstration. D'après le Chapitre 2 (Théorème 2.4.2, 2.), il existe une unique solution classique u_+ au problème (P_+) si et seulement si (5.8) est vérifiée. De plus, la formule de représentation de u_+ est donnée dans le chapitre 2 à la section 2.4.2 par (3.34), où $u, f, a, F_{0,f}, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ sont respectivement remplacées par $u_+, f_+, \gamma, F_+, \psi_1, \varphi_1^+, \psi_2, \varphi_2^+$. Cela prouve que la formule de représentation de u_+ est donnée par (5.9), (5.10) et (5.11). $\square$

Remarque 5.4.6. Dans la proposition précédente, grâce à (5.8), (5.10) et (5.11), on a

$$\alpha_1^+, \alpha_3^+ \in D(M^3) \quad \text{et} \quad \alpha_2^+, \alpha_4^+ \in D(M^2).$$

De plus, puisque F_+ est une solution classique de (5.12), d'après le Lemme 1.6.11, on en déduit que, pour $j = 0, 1, 2, 3$ et $s = \gamma$ ou b

$$F_+^{(j)}(s) \in (D(M), X)_{3-j+\frac{1}{p}, p}.$$

5.4.3 Le système de transmission

Cette section est dédiée à la preuve du Théorème 5.4.7 établi plus bas. Ce théorème fait le lien entre le problème (P) et le système suivant

$$\begin{cases} (P_1^+ + P_1^-) M\psi_1 - (P_2^+ - P_2^-) \psi_2 = S_1 \\ (P_2^+ - P_2^-) M\psi_1 - (P_3^+ + P_3^-) \psi_2 = S_2. \end{cases} \quad (5.13)$$

Les coefficients du système précédent sont donnés par

$$\begin{cases} P_1^+ = k_+ \left(U_+^{-1} (I + e^{dM})^2 + V_+^{-1} (I - e^{dM})^2 \right) \\ P_2^+ = k_+ (U_+^{-1} + V_+^{-1}) (I - e^{2dM}) \\ P_3^+ = k_+ \left(U_+^{-1} (I - e^{dM})^2 + V_+^{-1} (I + e^{dM})^2 \right) \end{cases} \quad (5.14)$$

et

$$\begin{cases} P_1^- = k_- \left(U_-^{-1} (I + e^{cM})^2 + V_-^{-1} (I - e^{cM})^2 \right) \\ P_2^- = k_- (U_-^{-1} + V_-^{-1}) (I - e^{2cM}) \\ P_3^- = k_- \left(U_-^{-1} (I - e^{cM})^2 + V_-^{-1} (I + e^{cM})^2 \right). \end{cases} \quad (5.15)$$

Les seconds membres sont donnés par

$$S_1 = 2k_+ \left((\tilde{\varphi}_2^+ + \tilde{\varphi}_4^+) + e^{dM} (\tilde{\varphi}_2^+ - \tilde{\varphi}_4^+) \right) - 2k_- \left((\tilde{\varphi}_2^- - \tilde{\varphi}_4^-) + e^{cM} (\tilde{\varphi}_2^- + \tilde{\varphi}_4^-) \right) - M^{-2} \check{S} \quad (5.16)$$

où

$$\check{S} = -k_+ F_+^{(3)}(\gamma) + k_+ M^2 F'_+(\gamma) + k_- F_-^{(3)}(\gamma) - k_- M^2 F'_-(\gamma) \quad (5.17)$$

et

$$S_2 = 2k_+ \left((\tilde{\varphi}_2^+ + \tilde{\varphi}_4^+) - e^{dM} (\tilde{\varphi}_2^+ - \tilde{\varphi}_4^+) \right) + 2k_- \left((\tilde{\varphi}_2^- - \tilde{\varphi}_4^-) - e^{cM} (\tilde{\varphi}_2^- + \tilde{\varphi}_4^-) \right). \quad (5.18)$$

Théorème 5.4.7. Soient $f_- \in L^p(a, \gamma; X)$ et $f_+ \in L^p(\gamma, b; X)$. On suppose que (H_1) , (H_2) , (H_3) et (H_4) sont vérifiées. Alors le problème (P) a une unique solution classique si et seulement si les données φ_1^+ , φ_1^- , ψ_1 et ψ_2 vérifient

$$\varphi_1^+, \varphi_1^- \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2p}, p} \quad \text{et} \quad \varphi_2^+, \varphi_2^- \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p}. \quad (5.19)$$

et le système (5.13) a une unique solution

$$(\psi_1, \psi_2) \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2p}, p} \times (D(A), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p}. \quad (5.20)$$

Démonstration. Tout d'abord, on suppose que (P) a une unique solution classique u . On pose

$$\psi_1 = u_-(\gamma) = u_+(\gamma) \quad \text{et} \quad \psi_2 = u'_-(\gamma) = u'_+(\gamma).$$

On obtient que u_- (respectivement u_+) est la solution classique de (P_-) (respectivement (P_+)). Donc, en appliquant la Proposition 5.4.3 (respectivement Proposition 5.4.5), on obtient (5.19) et aussi, d'après (2.5), on a

$$\psi_1 \in (D(M), X)_{3+\frac{1}{p}, p} \quad \text{et} \quad \psi_2 \in (D(M), X)_{2+\frac{1}{p}, p}.$$

Chapitre 5. Problème de transmission lié au biharmonique

Il reste à prouver que (ψ_1, ψ_2) est solution du système (5.13). Pour cela, on utilise le fait que u vérifie les conditions de transmission (CT2). On a alors le système suivant

$$\begin{cases} k_- u_-^{(3)}(\gamma) + k_- A u'_-(\gamma) = k_+ u_+^{(3)}(\gamma) + k_+ A u'_+(\gamma) \\ k_- u''_-(\gamma) + k_- A u_-(\gamma) = k_+ u''_+(\gamma) + k_+ A u_+(\gamma). \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} k_+ (u_+^{(3)}(\gamma) - M^2 u'_+(\gamma)) - k_- (u_-^{(3)}(\gamma) - M^2 u'_-(\gamma)) = 0 \\ k_+ (u''_+(\gamma) - M^2 u_+(\gamma)) - k_- (u''_-(\gamma) - M^2 u_-(\gamma)) = 0. \end{cases}$$

Or, pour tout $x \in]a, \gamma[$, on a

$$\begin{aligned} u_-(x) &= (e^{(x-a)M} - e^{(\gamma-x)M}) \alpha_1^- + ((x-a)e^{(x-a)M} - (\gamma-x)e^{(\gamma-x)M}) \alpha_2^- \\ &\quad + (e^{(x-a)M} + e^{(\gamma-x)M}) \alpha_3^- + ((x-a)e^{(x-a)M} + (\gamma-x)e^{(\gamma-x)M}) \alpha_4^- + F_-(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u'_-(x) &= M (e^{(x-a)M} + e^{(\gamma-x)M}) \alpha_1^- + M (e^{(x-a)M} - e^{(\gamma-x)M}) \alpha_3^- + F'_-(x) \\ &\quad + ((I + (x-a)M)e^{(x-a)M} + (I + (\gamma-x)M)e^{(\gamma-x)M}) \alpha_2^- \\ &\quad + ((I + (x-a)M)e^{(x-a)M} - (I + (\gamma-x)M)e^{(\gamma-x)M}) \alpha_4^-, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u''_-(x) &= M^2 (e^{(x-a)M} - e^{(\gamma-x)M}) \alpha_1^- + M^2 (e^{(x-a)M} + e^{(\gamma-x)M}) \alpha_3^- + F''_-(x) \\ &\quad + ((2M + (x-a)M^2)e^{(x-a)M} - (2M + (\gamma-x)M^2)e^{(\gamma-x)M}) \alpha_2^- \\ &\quad + ((2M + (x-a)M^2)e^{(x-a)M} + (2M + (\gamma-x)M^2)e^{(\gamma-x)M}) \alpha_4^-, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_-^{(3)}(x) &= M^3 (e^{(x-a)M} + e^{(\gamma-x)M}) \alpha_1^- + M^3 (e^{(x-a)M} - e^{(\gamma-x)M}) \alpha_3^- + F_-^{(3)}(x) \\ &\quad + ((3M^2 + (x-a)M^3)e^{(x-a)M} + (3M^2 + (\gamma-x)M^3)e^{(\gamma-x)M}) \alpha_2^- \\ &\quad + ((3M^2 + (x-a)M^3)e^{(x-a)M} - (3M^2 + (\gamma-x)M^3)e^{(\gamma-x)M}) \alpha_4^-. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} k_- (u_-^{(3)}(\gamma) - M^2 u'_-(\gamma)) &= k_- (2M^2 (I + e^{cM}) \alpha_2^- - 2M^2 (I - e^{cM}) \alpha_4^-) \\ &\quad + k_- F_-^{(3)}(\gamma) - k_- M^2 F'_-(\gamma). \end{aligned} \tag{5.21}$$

Notons que, d'après la Remarque 5.4.4, tous les termes de l'égalité précédente sont justifiés. De plus, d'après (5.7), on a

$$k_- (u''_-(\gamma) - M^2 u_-(\gamma)) = -k_- (2M (I - e^{cM}) \alpha_2^- - 2M (I + e^{cM}) \alpha_4^-). \tag{5.22}$$

De même que précédemment, d'après la Remarque 5.4.4, tous les termes de l'égalité précédente sont justifiés.

De même, pour tout $x \in]\gamma, b[$, on a

$$\begin{aligned} u_+(x) &= \left(e^{(x-\gamma)M} - e^{(b-x)M} \right) \alpha_1^+ + \left((x-\gamma)e^{(x-\gamma)M} - (b-x)e^{(b-x)M} \right) \alpha_2^+ \\ &\quad + \left(e^{(x-\gamma)M} + e^{(b-x)M} \right) \alpha_3^+ + \left((x-\gamma)e^{(x-\gamma)M} + (b-x)e^{(b-x)M} \right) \alpha_4^+ + F_+(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u'_+(x) &= M \left(e^{(x-\gamma)M} + e^{(b-x)M} \right) \alpha_1^+ + M \left(e^{(x-\gamma)M} - e^{(b-x)M} \right) \alpha_3^+ + F'_+(x) \\ &\quad + \left((I + (x-\gamma)M)e^{(x-\gamma)M} + (I + (b-x)M)e^{(b-x)M} \right) \alpha_2^+ \\ &\quad + \left((I + (x-\gamma)M)e^{(x-\gamma)M} - (I + (b-x)M)e^{(b-x)M} \right) \alpha_4^+, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u''_+(x) &= M^2 \left(e^{(x-\gamma)M} - e^{(b-x)M} \right) \alpha_1^+ + M^2 \left(e^{(x-\gamma)M} + e^{(b-x)M} \right) \alpha_3^+ + F''_+(x) \\ &\quad + \left((2M + (x-\gamma)M^2)e^{(x-\gamma)M} - (2M + (b-x)M^2)e^{(b-x)M} \right) \alpha_2^+ \\ &\quad + \left((2M + (x-\gamma)M^2)e^{(x-\gamma)M} + (2M + (b-x)M^2)e^{(b-x)M} \right) \alpha_4^+, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_+^{(3)}(x) &= M^3 \left(e^{(x-\gamma)M} + e^{(b-x)M} \right) \alpha_1^+ + M^3 \left(e^{(x-\gamma)M} - e^{(b-x)M} \right) \alpha_3^+ + F_+^{(3)}(x) \\ &\quad + \left((3M^2 + (x-\gamma)M^3)e^{(x-\gamma)M} + (3M^2 + (b-x)M^3)e^{(b-x)M} \right) \alpha_2^+ \\ &\quad + \left((3M^2 + (x-\gamma)M^3)e^{(x-\gamma)M} - (3M^2 + (b-x)M^3)e^{(b-x)M} \right) \alpha_4^+. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} k_+ \left(u_+^{(3)}(\gamma) - M^2 u'_+(\gamma) \right) &= k_+ \left(2M^2 \left(I + e^{dM} \right) \alpha_2^+ + 2M^2 \left(I - e^{dM} \right) \alpha_4^+ \right) \\ &\quad + k_+ F_+^{(3)}(\gamma) - k_+ M^2 F'_+(\gamma). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Notons que, d'après la Remarque 5.4.6, tous les termes de l'égalité précédente sont justifiés. De plus, d'après (5.12), on a

$$k_+ \left(u''_+(\gamma) - M^2 u_+(\gamma) \right) = k_+ \left(2M \left(I - e^{dM} \right) \alpha_2^+ + 2M \left(I + e^{dM} \right) \alpha_4^+ \right). \quad (5.24)$$

De même que précédemment, d'après la Remarque 5.4.6, tous les termes de l'égalité précédente sont justifiés. Ainsi, d'après (5.21), (5.22), (5.23), (5.24) et (5.17), le système (5.13) est équivalent à

$$\begin{cases} k_+ \left(2M^2 \left(I + e^{dM} \right) \alpha_2^+ + 2M^2 \left(I - e^{dM} \right) \alpha_4^+ \right) \\ - k_- \left(2M^2 \left(I + e^{cM} \right) \alpha_2^- - 2M^2 \left(I - e^{cM} \right) \alpha_4^- \right) = \check{S} \\ k_+ \left(2M \left(I - e^{dM} \right) \alpha_2^+ + 2M \left(I + e^{dM} \right) \alpha_4^+ \right) \\ + k_- \left(2M \left(I - e^{cM} \right) \alpha_2^- - 2M \left(I + e^{cM} \right) \alpha_4^- \right) = 0. \end{cases}$$

On obtient alors le système suivant

$$\begin{cases} k_+ \left((I + e^{dM}) \alpha_2^+ + (I - e^{dM}) \alpha_4^+ \right) \\ -k_- \left((I + e^{cM}) \alpha_2^- - (I - e^{cM}) \alpha_4^- \right) = \frac{1}{2} M^{-2} \check{S} \\ k_+ \left((I - e^{dM}) \alpha_2^+ + (I + e^{dM}) \alpha_4^+ \right) \\ +k_- \left((I - e^{cM}) \alpha_2^- - (I + e^{cM}) \alpha_4^- \right) = 0. \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} k_+ \left((\alpha_2^+ + \alpha_4^+) + e^{dM} (\alpha_2^+ - \alpha_4^+) \right) \\ -k_- \left((\alpha_2^- - \alpha_4^-) + e^{cM} (\alpha_2^- + \alpha_4^-) \right) = \frac{1}{2} M^{-2} \check{S} \\ k_+ \left((\alpha_2^+ + \alpha_4^+) - e^{dM} (\alpha_2^+ - \alpha_4^+) \right) \\ +k_- \left((\alpha_2^- - \alpha_4^-) - e^{cM} (\alpha_2^- + \alpha_4^-) \right) = 0. \end{cases} \quad (5.25)$$

Néanmoins, d'après (5.10), (5.11), (5.5) et (5.6), on a

$$\begin{aligned} \alpha_2^+ + \alpha_4^+ &= -\frac{1}{2} U_+^{-1} \left((I + e^{dM}) M \psi_1 - (I - e^{dM}) \psi_2 \right) + \tilde{\varphi}_2^+ \\ &\quad - \frac{1}{2} V_+^{-1} \left((I - e^{dM}) M \psi_1 - (I + e^{dM}) \psi_2 \right) + \tilde{\varphi}_4^+, \\ \alpha_2^+ - \alpha_4^+ &= -\frac{1}{2} U_+^{-1} \left((I + e^{dM}) M \psi_1 - (I - e^{dM}) \psi_2 \right) + \tilde{\varphi}_2^+ \\ &\quad + \frac{1}{2} V_+^{-1} \left((I - e^{dM}) M \psi_1 - (I + e^{dM}) \psi_2 \right) - \tilde{\varphi}_4^+, \\ \alpha_2^- + \alpha_4^- &= \frac{1}{2} U_-^{-1} \left((I + e^{cM}) M \psi_1 + (I - e^{cM}) \psi_2 \right) + \tilde{\varphi}_2^- \\ &\quad - \frac{1}{2} V_-^{-1} \left((I - e^{cM}) M \psi_1 + (I + e^{cM}) \psi_2 \right) + \tilde{\varphi}_4^-, \\ \alpha_2^- - \alpha_4^- &= \frac{1}{2} U_-^{-1} \left((I + e^{cM}) M \psi_1 + (I - e^{cM}) \psi_2 \right) + \tilde{\varphi}_2^- \\ &\quad + \frac{1}{2} V_-^{-1} \left((I - e^{cM}) M \psi_1 + (I + e^{cM}) \psi_2 \right) - \tilde{\varphi}_4^-. \end{aligned}$$

Afin de résoudre le système (5.25), on doit calculer le déterminant de la matrice associée à ce système. Pour cela, il faut séparer les coefficients de la matrice des termes sources.

On regroupe alors tous les termes sources dans deux opérateurs S_1 et S_2 , définis par (5.16), (5.18) et (5.17), que l'on isole du reste du système. Ainsi, on en déduit que le système (5.25)

s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{k_+}{2}U_+^{-1}(I+e^{dM})((I+e^{dM})M\psi_1-(I-e^{dM})\psi_2) \\ -\frac{k_+}{2}V_+^{-1}(I-e^{dM})((I-e^{dM})M\psi_1-(I+e^{dM})\psi_2) \\ -\frac{k_-}{2}U_-^{-1}(I+e^{cM})((I+e^{cM})M\psi_1+(I-e^{cM})\psi_2) \\ -\frac{k_-}{2}V_-^{-1}(I-e^{cM})((I-e^{cM})M\psi_1+(I+e^{cM})\psi_2) \\ \\ -\frac{k_+}{2}U_+^{-1}(I-e^{dM})((I+e^{dM})M\psi_1-(I-e^{dM})\psi_2) \\ -\frac{k_+}{2}V_+^{-1}(I+e^{dM})((I-e^{dM})M\psi_1-(I+e^{dM})\psi_2) \\ +\frac{k_-}{2}U_-^{-1}(I-e^{cM})((I+e^{cM})M\psi_1+(I-e^{cM})\psi_2) \\ +\frac{k_-}{2}V_-^{-1}(I+e^{cM})((I-e^{cM})M\psi_1+(I+e^{cM})\psi_2) \end{array} \right. = \begin{array}{l} -\frac{S_1}{2} \\ \\ \\ -\frac{S_2}{2}. \end{array}$$

D'où

$$\left\{ \begin{array}{l} k_+U_+^{-1}(I+e^{dM})((I+e^{dM})M\psi_1-(I-e^{dM})\psi_2) \\ +k_+V_+^{-1}(I-e^{dM})((I-e^{dM})M\psi_1-(I+e^{dM})\psi_2) \\ +k_-U_-^{-1}(I+e^{cM})((I+e^{cM})M\psi_1+(I-e^{cM})\psi_2) \\ +k_-V_-^{-1}(I-e^{cM})((I-e^{cM})M\psi_1+(I+e^{cM})\psi_2) \\ \\ k_+U_+^{-1}(I-e^{dM})((I+e^{dM})M\psi_1-(I-e^{dM})\psi_2) \\ +k_+V_+^{-1}(I+e^{dM})((I-e^{dM})M\psi_1-(I+e^{dM})\psi_2) \\ -k_-U_-^{-1}(I-e^{cM})((I+e^{cM})M\psi_1+(I-e^{cM})\psi_2) \\ -k_-V_-^{-1}(I+e^{cM})((I-e^{cM})M\psi_1+(I+e^{cM})\psi_2) \end{array} \right. = \begin{array}{l} S_1 \\ \\ \\ S_2. \end{array}$$

De ce fait, en développant, on obtient le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} k_+U_+^{-1}(I+e^{dM})(I+e^{dM})M\psi_1 - k_+U_+^{-1}(I+e^{dM})(I-e^{dM})\psi_2 \\ +k_+V_+^{-1}(I-e^{dM})(I-e^{dM})M\psi_1 - k_+V_+^{-1}(I-e^{dM})(I+e^{dM})\psi_2 \\ +k_-U_-^{-1}(I+e^{cM})(I+e^{cM})M\psi_1 + k_-U_-^{-1}(I+e^{cM})(I-e^{cM})\psi_2 \\ +k_-V_-^{-1}(I-e^{cM})(I-e^{cM})M\psi_1 + k_-V_-^{-1}(I-e^{cM})(I+e^{cM})\psi_2 \\ \\ k_+U_+^{-1}(I-e^{dM})(I+e^{dM})M\psi_1 - k_+U_+^{-1}(I-e^{dM})(I-e^{dM})\psi_2 \\ +k_+V_+^{-1}(I+e^{dM})(I-e^{dM})M\psi_1 - k_+V_+^{-1}(I+e^{dM})(I+e^{dM})\psi_2 \\ -k_-U_-^{-1}(I-e^{cM})(I+e^{cM})M\psi_1 - k_-U_-^{-1}(I-e^{cM})(I-e^{cM})\psi_2 \\ -k_-V_-^{-1}(I+e^{cM})(I-e^{cM})M\psi_1 - k_-V_-^{-1}(I+e^{cM})(I+e^{cM})\psi_2 \end{array} \right. = \begin{array}{l} S_1 \\ \\ \\ S_2, \end{array}$$

qui à son tour donne

$$\left\{ \begin{array}{l} k_+ U_+^{-1} (I + e^{dM})^2 M\psi_1 - k_+ U_+^{-1} (I - e^{2dM}) \psi_2 \\ + k_+ V_+^{-1} (I - e^{dM})^2 M\psi_1 - k_+ V_+^{-1} (I - e^{2dM}) \psi_2 \\ + k_- U_-^{-1} (I + e^{cM})^2 M\psi_1 + k_- U_-^{-1} (I - e^{2cM}) \psi_2 \\ + k_- V_-^{-1} (I - e^{cM})^2 M\psi_1 + k_- V_-^{-1} (I - e^{2cM}) \psi_2 = S_1 \\ \\ k_+ U_+^{-1} (I - e^{2dM}) M\psi_1 - k_+ U_+^{-1} (I - e^{dM})^2 \psi_2 \\ + k_+ V_+^{-1} (I - e^{2dM}) M\psi_1 - k_+ V_+^{-1} (I + e^{dM})^2 \psi_2 \\ - k_- U_-^{-1} (I - e^{2cM}) M\psi_1 - k_- U_-^{-1} (I - e^{cM})^2 \psi_2 \\ - k_- V_-^{-1} (I - e^{2cM}) M\psi_1 - k_- V_-^{-1} (I + e^{cM})^2 \psi_2 = S_2. \end{array} \right.$$

Enfin, en factorisant, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} k_+ \left(U_+^{-1} (I + e^{dM})^2 + V_+^{-1} (I - e^{dM})^2 \right) M\psi_1 \\ + k_- \left(U_-^{-1} (I + e^{cM})^2 + V_-^{-1} (I - e^{cM})^2 \right) M\psi_1 \\ \quad - k_+ (U_+^{-1} + V_+^{-1}) (I - e^{2dM}) \psi_2 \\ \quad + k_- (U_-^{-1} + V_-^{-1}) (I - e^{2cM}) \psi_2 = S_1 \\ \\ k_+ (U_+^{-1} + V_+^{-1}) (I - e^{2dM}) M\psi_1 \\ - k_- (U_-^{-1} + V_-^{-1}) (I - e^{2cM}) M\psi_1 \\ - k_+ \left(U_+^{-1} (I - e^{dM})^2 + V_+^{-1} (I + e^{dM})^2 \right) \psi_2 \\ - k_- \left(U_-^{-1} (I - e^{cM})^2 + V_-^{-1} (I + e^{cM})^2 \right) \psi_2 = S_2. \end{array} \right. \quad (5.26)$$

Ainsi, en utilisant (5.14) et (5.15) le système (5.26) devient le système (5.13). Ainsi, (ψ_1, ψ_2) est bien solution du système (5.13).

Réciproquement, si (5.19) est vérifié et que le système (5.13) a une unique solution (ψ_1, ψ_2) telle que

$$\psi_1 \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2p}, p} \quad \text{et} \quad \psi_2 \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p},$$

alors en considérant u_- (respectivement u_+) l'unique solution classique du problème (P_-) (respectivement (P_+)), on obtient que

$$u = \begin{cases} u_- & \text{dans } \Omega_- \\ u_+ & \text{dans } \Omega_+, \end{cases}$$

est l'unique solution classique du problème (P) .

□

5.5 Le Théorème principal

Dans cette section, on s'intéresse à la résolution du problème de transmission (P) .

Théorème 5.5.1. *Soient $f_- \in L^p(a, \gamma; X)$ et $f_+ \in L^p(\gamma, b; X)$. On suppose que (H_1) , (H_2) , (H_3) , (H_4) et (H_5) sont vérifiées. Alors, il existe une unique solution classique u au problème (P) si et seulement si*

$$\varphi_1^+, \varphi_1^- \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2p}, p} \quad \text{et} \quad \varphi_2^+, \varphi_2^- \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p}.$$

Remarque 5.5.2. On peut généraliser ce théorème en considérant un problème de transmission entre n habitats juxtaposés, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Il suffit d'utiliser le Théorème 5.5.1 sur les deux premiers habitats puis de l'appliquer au problème de transmission composé du second et du troisième habitat afin de résoudre le problème pour $n = 3$. Enfin, par récurrence, on obtient le résultat.

On démontre maintenant le Théorème 5.5.1. Si le problème (P) a une unique solution classique, alors d'après Théorème 5.4.7, (5.19) est vérifiée.

Réciproquement, si (5.19) est vérifiée, alors grâce au Théorème 5.4.7, il suffit de prouver que le système (5.13) a une unique solution telle que (5.20) soit vérifiée. Cette démonstration est divisée en trois parties. Dans la première partie, on calcule explicitement le déterminant de la matrice associée au système (5.13). Dans la deuxième partie, on montre l'unicité de la solution en inversant le déterminant grâce au calcul fonctionnel. Finalement, dans la dernière partie, on prouve que (ψ_1, ψ_2) est bien une solution du système (5.13) en vérifiant que ψ_1 et ψ_2 ont bien la régularité attendue.

5.5.1 Calcul du déterminant

Dans cette section, on calcule explicitement le déterminant de la matrice associée au système (5.13). On rappelle ici le système (5.13)

$$\begin{cases} (P_1^+ + P_1^-) M \psi_1 - (P_2^+ - P_2^-) \psi_2 = S_1 \\ (P_2^+ - P_2^-) M \psi_1 - (P_3^+ + P_3^-) \psi_2 = S_2. \end{cases}$$

On écrit alors le système précédent comme une équation matricielle $\Lambda \Psi = S$, où

$$\Lambda = \begin{pmatrix} M(P_1^+ + P_1^-) & -(P_2^+ - P_2^-) \\ M(P_2^+ - P_2^-) & -(P_3^+ + P_3^-) \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix}.$$

Afin de résoudre le système (5.13), on calcule le déterminant de la matrice Λ

$$\begin{aligned} \det(\Lambda) &:= -M(P_1^+ + P_1^-)(P_3^+ + P_3^-)M + (P_2^+ - P_2^-)^2 \\ &= -M(P_1^+ P_3^+ + P_1^+ P_3^- + P_1^- P_3^+ + P_1^- P_3^- - (P_2^+)^2 - (P_2^-)^2 + 2P_2^+ P_2^-) \\ &= -M(P_1^+ P_3^+ - (P_2^+)^2 + P_1^- P_3^- - (P_2^-)^2 + P_1^+ P_3^- + P_1^- P_3^+ + 2P_2^+ P_2^-). \end{aligned}$$

On commence alors par calculer les termes séparément. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} P_1^+ P_3^+ &= k_+^2 \left(U_+^{-1} (I + e^{dM})^2 + V_+^{-1} (I - e^{dM})^2 \right) \left(U_+^{-1} (I - e^{dM})^2 + V_+^{-1} (I + e^{dM})^2 \right) \\ &= k_+^2 \left((U_+^{-2} + V_+^{-2}) (I - e^{2dM})^2 + U_+^{-1} V_+^{-1} \left((I + e^{dM})^4 + (I - e^{dM})^4 \right) \right) \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} (I + e^{dM})^4 + (I - e^{dM})^4 &= (I + 2e^{dM} + e^{2dM})^2 + (I - 2e^{dM} + e^{2dM})^2 \\ &= (I + e^{2dM})^2 + 4e^{dM} (I + e^{2dM}) + 4e^{2dM} \\ &\quad + (I + e^{2dM})^2 - 4e^{dM} (I + e^{2dM}) + 4e^{2dM} \\ &= 2(I + e^{2dM})^2 + 8e^{2dM}. \end{aligned}$$

D'où

$$P_1^+ P_3^+ = k_+^2 \left((U_+^{-2} + V_+^{-2}) (I - e^{2dM})^2 + 2U_+^{-1} V_+^{-1} (I + e^{2dM})^2 + 8U_+^{-1} V_+^{-1} e^{2dM} \right).$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} (P_2^+)^2 &= k_+^2 (U_+^{-1} + V_+^{-1})^2 (I - e^{2dM})^2 \\ &= k_+^2 (U_+^{-2} + V_+^{-2}) (I - e^{2dM})^2 + 2k_+^2 U_+^{-1} V_+^{-1} (I - e^{2dM})^2. \end{aligned}$$

On en déduit alors l'égalité suivante

$$\begin{aligned} P_1^+ P_3^+ - (P_2^+)^2 &= k_+^2 \left((U_+^{-2} + V_+^{-2}) (I - e^{2dM})^2 + 2U_+^{-1} V_+^{-1} (I + e^{2dM})^2 + 8U_+^{-1} V_+^{-1} e^{2dM} \right) \\ &\quad - k_+^2 (U_+^{-2} + V_+^{-2}) (I - e^{2dM})^2 - 2k_+^2 U_+^{-1} V_+^{-1} (I - e^{2dM})^2 \\ &= 2k_+^2 U_+^{-1} V_+^{-1} \left((I + e^{2dM})^2 - (I - e^{2dM})^2 + 4e^{2dM} \right) \\ &= 2k_+^2 U_+^{-1} V_+^{-1} \left((I + 2e^{dM} + e^{2dM}) - (I - 2e^{dM} + e^{2dM}) + 4e^{2dM} \right) \\ &= 2k_+^2 U_+^{-1} V_+^{-1} (4e^{2dM} + 4e^{2dM}) \\ &= 16k_+^2 U_+^{-1} V_+^{-1} e^{2dM}. \end{aligned}$$

De la même façon, en remplaçant respectivement k_+ , U_+^{-1} , V_+^{-1} et d par k_- , U_-^{-1} , V_-^{-1} et c , on obtient

$$P_1^- P_3^- - (P_2^-)^2 = 16k_-^2 U_-^{-1} V_-^{-1} e^{2cM}.$$

Ainsi, le déterminant de la matrice Λ s'écrit

$$\det(\Lambda) = -M \left(16k_+^2 U_+^{-1} V_+^{-1} e^{2dM} + 16k_-^2 U_-^{-1} V_-^{-1} e^{2cM} + P_1^+ P_3^- + P_1^- P_3^+ + 2P_2^+ P_2^- \right). \quad (5.27)$$

5.5.2 Inversion du déterminant

Dans cette section on cherche à inverser le déterminant de la matrice Λ . Pour cela, on utilise le calcul fonctionnel afin de réécrire les opérateurs définis dans (5.2), (5.14) et (5.15) et d'inverser l'opérateur déterminant. Tout d'abord, on rappelle quelques notations classiques du chapitre 1.

Soit $\theta \in]0, \pi[$, on désigne par $H(S_\theta)$ l'espace des fonctions holomorphes sur S_θ , le secteur d'angle θ à valeur dans $\mathbb{C}$ (voir Définition 1.1.28). De plus, on considère le sous-espace de $H(S_\theta)$ suivant :

$$\mathcal{E}_\infty(S_\theta) := \left\{ f \in H(S_\theta) : f = O(|z|^{-s}) \text{ } (|z| \rightarrow +\infty) \text{ pour un } s > 0 \right\}.$$

En d'autres termes, $\mathcal{E}_\infty(S_\theta)$ est l'espace des fonctions holomorphes à décroissances polynomiales en $+\infty$. Soit T un opérateur sectoriel inversible d'angle $\theta_T \in]0, \pi[$. Si $f \in \mathcal{E}_\infty(S_\theta)$, avec $\theta \in]\theta_T, \pi[$, alors, grâce au calcul fonctionnel des opérateurs sectoriels, on peut définir $f(T) \in \mathcal{L}(X)$ (voir Définition 1.3.6 ou M. Haase [23], p.45).

Soient $\delta > 0$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. On pose

$$\begin{cases} u_\delta(z) &= 1 - e^{-2\delta\sqrt{z}} - 2\delta\sqrt{z}e^{-\delta\sqrt{z}} \\ v_\delta(z) &= 1 - e^{-2\delta\sqrt{z}} + 2\delta\sqrt{z}e^{-\delta\sqrt{z}}. \end{cases}$$

Ainsi, on a

$$U_+ = u_d(-A), \quad U_- = u_c(-A), \quad V_+ = v_d(-A) \quad \text{et} \quad V_- = v_c(-A).$$

De plus, quand $u_\delta(z) \neq 0$, $v_\delta(z) \neq 0$, on note

$$\begin{cases} f_{\delta,1}(z) &= u_\delta^{-1}(z) (1 + e^{-\delta\sqrt{z}})^2 + v_\delta^{-1}(z) (1 - e^{-\delta\sqrt{z}})^2 \\ f_{\delta,2}(z) &= (u_\delta^{-1}(z) + v_\delta^{-1}(z)) (1 - e^{-2\delta\sqrt{z}}) \\ f_{\delta,3}(z) &= u_\delta^{-1}(z) (1 - e^{-\delta\sqrt{z}})^2 + v_\delta^{-1}(z) (1 + e^{-\delta\sqrt{z}})^2 \\ g_\delta(z) &= 16 u_\delta^{-1}(z) v_\delta^{-1}(z) e^{-2\delta\sqrt{z}}. \end{cases}$$

Ainsi, on a

$$\begin{cases} P_1^+ = k_+ f_{d,1}(-A), & P_2^+ = k_+ f_{d,2}(-A), & P_3^+ = k_+ f_{d,3}(-A) \\ P_1^- = k_- f_{c,1}(-A), & P_2^- = k_- f_{c,2}(-A), & P_3^- = k_- f_{c,3}(-A). \end{cases}$$

De plus, pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, on définit

$$f(z) := k_+^2 g_d(z) + k_-^2 g_c(z) + k_+ k_- (f_{d,1}(z) f_{c,3}(z) + f_{c,1}(z) f_{d,3}(z) + 2 f_{d,2}(z) f_{c,2}(z)).$$

De ce fait, on obtient

$$f(-A) = 16 k_+^2 U_+^{-1} V_+^{-1} e^{2dM} + 16 k_-^2 U_-^{-1} V_-^{-1} e^{2cM} + P_1^+ P_3^- + P_1^- P_3^+ + 2 P_2^+ P_2^-.$$

Lemme 5.5.3. *Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, si $k_+ k_- > 0$, alors $f(x)$ ne s'annule pas.*

Chapitre 5. Problème de transmission lié au biharmonique

Démonstration. Soit $\delta > 0$, d'après le Lemme 2.4.3 de la section 2.4.2 du chapitre 2, pour tout $x > 0$, on a

$$u_\delta(x) > 0 \quad \text{et} \quad v_\delta(x) > 0.$$

De plus, d'après (H_5) , on en déduit que

$$f_{\delta,1}(x), f_{\delta,2}(x), f_{\delta,3}(x), g_\delta(x) > 0$$

et vu que $k_+k_- > 0$, on obtient que

$$f(x) = k_+^2 g_d(x) + k_-^2 g_c(x) + k_+k_- (f_{d,1}(x)f_{c,3}(x) + f_{c,1}(x)f_{d,3}(x) + 2f_{d,2}(x)f_{c,2}(x)) > 0.$$

□

D'après (5.14), (5.15) et (5.27), on obtient

$$\det(\Lambda) = -Mf(-A). \quad (5.28)$$

Notons que $f \in H(S_\theta)$, pour tout $\theta \in]0, \pi[$.

Soient C_1, C_2 deux opérateurs linéaires dans X . On note $C_1 \sim C_2$ pour signifier que $C_1 = C_2 + \Sigma$, où Σ est une somme finie de terme de type $kM^n e^{\alpha M}$, avec $k \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Notons que Σ est un terme régulier dans le sens :

$$\Sigma \in \mathcal{L}(X) \quad \text{avec} \quad \Sigma(X) \subset D(M^\infty) := \bigcap_{k \geq 0} D(M^k).$$

Puisque $U_\pm \sim I$ et $V_\pm \sim I$, alors en posant $W = U_+U_-V_+V_- \sim I$, on obtient

$$\begin{cases} WP_1^+ \sim 2k_+I, & WP_1^- \sim 2k_-I, \\ WP_2^+ \sim 2k_+I, & WP_2^- \sim 2k_-I, \\ WP_3^+ \sim 2k_+I, & WP_3^- \sim 2k_-I. \end{cases}$$

De plus, on a

$$16k_+^2 W^2 U_+^{-1} V_+^{-1} e^{2dM} \sim 0 \quad \text{et} \quad 16k_-^2 W^2 U_-^{-1} V_-^{-1} e^{2cM} \sim 0.$$

On en déduit alors la relation suivante

$$\begin{aligned} -M^{-1}W^2 \det(\Lambda) &= 16k_+^2 W^2 U_+^{-1} V_+^{-1} e^{2dM} + 16k_-^2 W^2 U_-^{-1} V_-^{-1} e^{2cM} \\ &\quad + WP_1^+ WP_3^- + WP_1^- WP_3^+ + 2WP_2^+ WP_2^- \\ &\sim 4k_+k_-I + 4k_+k_-I + 8k_+k_-I \\ &\sim 16k_+k_-I. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\det(\Lambda) = -W^{-2}M \left(16k_+k_-I + \sum_{j \in J} k_j M^{n_j} e^{\alpha_j M} \right), \quad (5.29)$$

où J est un ensemble fini et pour tout $j \in J$:

$$k_j \in \mathbb{R}, n_j \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \alpha_j \in \mathbb{R}_+^*.$$

D'après (5.29), on a

$$\det(\Lambda) = -16k_+k_-W^{-2}MF, \quad (5.30)$$

avec

$$F = I + \sum_{j \in J} \frac{k_j}{16k_+k_-} M^{n_j} e^{\alpha_j M}. \quad (5.31)$$

Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, on pose

$$\tilde{f}(z) = 1 + \sum_{j \in J} \frac{k_j}{16k_+k_-} (-\sqrt{z})^{n_j} e^{-\alpha_j \sqrt{z}}.$$

Ainsi, $F = \tilde{f}(-A)$ et d'après (5.28) et (5.30), on a

$$f(-A) = M^{-1} \det(\Lambda) = -16k_+k_-W^{-2} \tilde{f}(-A).$$

Donc, par construction, pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, le lien entre f et $\tilde{f}$ est

$$f(z) = 16k_+k_-u_d^{-2}(z)u_c^{-2}(z)v_d^{-2}(z)v_c^{-2}(z)\sqrt{z}\tilde{f}(z). \quad (5.32)$$

Proposition 5.5.4. *L'opérateur $F \in \mathcal{L}(X)$ défini par (5.31), est inversible avec inverse borné.*

Démonstration. Notons que $f, \tilde{f} \in H(S_\theta)$, pour un $\theta \in]0, \pi[$ donné. De plus, pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ et $j \in J$, les fonctions $\frac{k_j}{16k_+k_-} (-\sqrt{z})^{n_j}$ sont de forme polynomiale. De ce fait, $1 - \tilde{f} \in \mathcal{E}_\infty(S_\theta)$.

D'après le Lemme 5.5.3, on sait que u_d, u_c, v_d, v_c et f ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit alors, d'après l'hypothèse (H_5) et (5.32), que $\tilde{f}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc, en appliquant la Proposition 2.4.4, avec $P = -A$, on obtient que $F = \tilde{f}(-A) \in \mathcal{L}(X)$ est inversible avec inverse borné. $\square$

Finalement, on obtient le résultat suivant

Proposition 5.5.5. *L'opérateur $\det(\Lambda)$, défini par (5.30) est inversible avec inverse borné.*

Démonstration. D'après la Proposition 2.4.5, U_+, U_-, V_+ et V_- sont inversibles avec inverse borné. On en déduit alors que W^{-2} est inversible avec inverse borné. De plus, d'après (5.30), la Proposition 5.5.4 et les hypothèses (H_2) et (H_5) , on obtient que l'opérateur $\det(\Lambda)$ est inversible avec inverse borné. $\square$

5.5.3 Régularité de la solution

D'après la Proposition 5.5.5, on a montré que le système (5.13) a une unique solution (ψ_1, ψ_2) . D'après le Théorème 5.4.7, il reste à montrer que

$$\psi_1 \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2p}, p} \quad \text{et} \quad \psi_2 \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p}.$$

Afin d'obtenir ces régularités, on doit étudier la régularité de l'inverse du déterminant $\det(\Lambda)$.

Lemme 5.5.6. *Il existe $R_d \in D(M^\infty)$ tel que*

$$[\det(\Lambda)]^{-1} = -\frac{1}{16k_+k_-} M^{-1} + R_d.$$

Démonstration. D'après (5.30) et la Proposition 5.5.5, on a

$$[\det(\Lambda)]^{-1} = -\frac{1}{16k_+k_-}M^{-1}W^2F^{-1}.$$

D'après le Lemme 2.4.1, il existe $R_F \in D(M^\infty)$, tel que

$$F^{-1} = I + R_F.$$

Or, pour $\delta > 0$, on a

$$e^{\delta M}\psi \in D(M^\infty). \quad (5.33)$$

Ainsi, puisque $W = U_+U_-V_+V_-$, d'après (5.33), il existe $R_W \in D(M^\infty)$ tel que

$$W^2 = I + R_W.$$

On en déduit qu'il existe $R_d \in D(M^\infty)$, tel que

$$[\det(\Lambda)]^{-1} = -\frac{1}{16k_+k_-}M^{-1} + R_d.$$

□

On va maintenant étudier la régularité de ψ_1 et ψ_2 . On rappelle que

$$\Lambda\Psi = S,$$

où Λ est inversible, d'après la Proposition 5.5.5. De plus, d'après le Lemme 2.4.1, il existe $R_{U_\pm}, R_{V_\pm} \in D(M^\infty)$, tels que

$$U_\pm^{-1} = I + R_{U_\pm} \quad \text{et} \quad V_\pm^{-1} = I + R_{V_\pm}. \quad (5.34)$$

D'après (5.33) et (5.34), il existe $R_i \in D(M^\infty)$, $i = 1, 2, 3, 4$, tels que

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 2(k_+ + k_-)M + R_1 & -2(k_+ - k_-)I + R_2 \\ 2(k_+ - k_-)M + R_3 & -2(k_+ + k_-)I + R_4 \end{pmatrix}.$$

Il s'en suit qu'il existe $\tilde{R}_1, \tilde{R}_2 \in D(M^\infty)$, tels que

$$\begin{cases} \psi_1 &= \frac{(k_+ + k_-)}{8k_+k_-}M^{-1}S_1 - \frac{(k_+ - k_-)}{8k_+k_-}M^{-1}S_2 + \tilde{R}_1 \\ \psi_2 &= \frac{(k_+ - k_-)}{8k_+k_-}S_1 - \frac{(k_+ + k_-)}{8k_+k_-}S_2 + \tilde{R}_2, \end{cases} \quad (5.35)$$

où S_1 est donné par (5.16) et S_2 est donné par (5.18).

Puisque F_+ est une solution classique du problème (P_+) et F_- est une solution classique du problème (P_-) , alors d'après la Remarque 5.4.4 et la Remarque 5.4.6, on obtient que $\check{S}$ défini par (5.17) à la régularité suivante

$$\check{S} \in (D(M), X)_{\frac{1}{p}, p}. \quad (5.36)$$

De plus, puisque d'après (2.5), on a

$$\varphi_1^+, \varphi_1^- \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2p}, p} = (D(M), X)_{3+\frac{1}{p}, p}$$

et

$$\varphi_2^+, \varphi_2^- \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p} = (D(M), X)_{2+\frac{1}{p}, p},$$

alors, d'après (5.6), (5.11), Remarque 5.4.4 et Remarque 5.4.6, on en déduit que

$$\tilde{\varphi}_1^+, \tilde{\varphi}_1^-, \tilde{\varphi}_3^+, \tilde{\varphi}_3^- \in (D(M), X)_{3+\frac{1}{p}, p} \quad \text{et} \quad \tilde{\varphi}_2^+, \tilde{\varphi}_2^-, \tilde{\varphi}_4^+, \tilde{\varphi}_4^- \in (D(M), X)_{2+\frac{1}{p}, p}. \quad (5.37)$$

Ainsi, d'après (5.16), (5.18), (5.33), (5.36) et (5.37), on a

$$S_1 \in (D(M), X)_{2+\frac{1}{p}, p} \quad \text{et} \quad S_2 \in (D(M), X)_{2+\frac{1}{p}, p}. \quad (5.38)$$

Enfin, d'après (5.35), (5.38) et (2.5), on a

$$\psi_1 \in (D(M), X)_{3+\frac{1}{p}, p} = (D(A), X)_{1+\frac{1}{2p}, p} \quad \text{et} \quad \psi_2 \in (D(M), X)_{2+\frac{1}{p}, p} = (D(A), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p}.$$

On en conclut, d'après le Théorème 5.4.7, qu'il existe une unique solution classique u_- dans l'habitat de gauche Ω_- et une unique solution classique u_+ dans l'habitat de droite Ω_+ qui vérifie les conditions de transmission (CT).

5.6 Application

Du Théorème 5.5.1, on déduit le résultat suivant pour le problème (P_{edp}) avec $A := A_0$, défini par (5.1).

Corollaire 5.6.1. *On considère un domaine cylindrique $\Omega :=]a, b[\times \omega$ de $\mathbb{R}^n$, où $n \geq 2$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^{n-1}$, où $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, avec un bord de classe C^2 . Soient $f_+ \in L^p(\Omega_+)$ et $f_- \in L^p(\Omega_-)$ avec $p \in]1, +\infty[$ et $p > n$; soient $k_+, k_- \in \mathbb{R}^*$ tels que $k_+ k_- > 0$. Alors, il existe une unique solution u de (P_{edp}) , telle que*

$$u_- \in W^{4,p}(\Omega_-) \quad \text{et} \quad u_+ \in W^{4,p}(\Omega_+),$$

si et seulement si

$$\varphi_1^\pm, \varphi_2^\pm \in W^{2,p}(\omega) \cap W_0^{1,p}(\omega), \quad \Delta \varphi_1^\pm \in W^{2-\frac{1}{p},p}(\omega) \cap W_0^{1,p}(\omega) \quad \text{et} \quad \Delta \varphi_2^\pm \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\omega) \cap W_0^{1,p}(\omega).$$

Démonstration. Soit $(x, y) \in]a, b[\times \omega$. On pose $X := L^p(\omega)$. En utilisant A_0 l'opérateur linéaire défini par (5.1), on obtient que le problème (P_{edp}) devient le problème (P) . D'après J. L. Rubio de Francia [40] (Proposition 3, p. 207), X satisfait (H_1) et d'après D. Gilbarg et N. Trudinger [20] (Theorem 9.15 et Lemma 9.17), A_0 satisfait (H_2) . De plus, (H_3) est vérifiée d'après J. Prüss et H. Sohr [39] (Theorem C, p. 166-167). De plus, puisque A_0 est le laplacien, d'après M. Haase [23], (Chapter 8, section 3, p. 232), (H_4) est vérifiée. Finalement, toutes les hypothèses du Théorème 5.5.1 sont satisfaites. Il s'en suit qu'il existe une unique solution classique au problème (P) si et seulement si (5.19) est vérifiée.

A présent, il reste à montrer que si $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ vérifient (5.19), alors la solution classique $u_{\pm}$ vérifie $u_{\pm} \in W^{4,p}(\Omega_{\pm})$. Dans cet optique, on va expliciter les espaces d'interpolations qui apparaissent dans (5.19). On a

$$(D(A_0), X)_{\frac{1}{2p}, p} = \left(W^{2,p}(\omega) \cap W_0^{1,p}(\omega), L^p(\omega) \right)_{\frac{1}{2p}, p},$$

et d'après P. Grisvard [22] (p. 683, proposizione 3 et p. 681, 1.10) et H. Triebel [43] (p. 317, Theorem 1), puisque $2 - \frac{1}{p} > 1$ n'est jamais un entier, on a

$$\left(W^{2,p}(\omega), L^p(\omega) \right)_{\frac{1}{2p}, p} = W^{2-\frac{1}{p}, p}(\omega). \quad (5.39)$$

On pose $\nu_1 := 2 - \frac{1}{p} - \frac{n-1}{p} = 2 - \frac{n}{p}$. Puisque $p > \frac{n}{2}$, on a $\nu_1 > 0$. D'après le Théorème d'injection de Sobolev (voir H. Triebel [43], section 4.6.1, p. 327-328), on a :

$$W^{2-\frac{1}{p}, p}(\omega) \hookrightarrow C(\overline{\omega}).$$

Ainsi, les traces des éléments de l'espace décrit dans (5.39) sont bien définies. D'après P. Grisvard [21] (Proposition 5.9, p. 334) et H. Triebel [43] (section 4.3.3, Theorem, p. 321), on en déduit que

$$(D(A_0), X)_{\frac{1}{2p}, p} = \left\{ \psi \in W^{2-\frac{1}{p}, p}(\omega) : \psi = 0 \text{ sur } \partial\omega \right\},$$

et

$$\begin{aligned} (D(A_0), X)_{1+\frac{1}{2p}, p} &= \left\{ \psi \in D(A_0) : A_0\psi \in W^{2-\frac{1}{p}, p}(\omega) \text{ et } \Delta\psi = 0 \text{ sur } \partial\omega \right\} \\ &= \left\{ \psi \in W^{2,p}(\omega) : \Delta\psi \in W^{2-\frac{1}{p}, p}(\omega) \text{ et } \psi = \Delta\psi = 0 \text{ sur } \partial\omega \right\}. \end{aligned}$$

De la même façon, on obtient

$$(D(A_0), X)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p} = \left(W^{2,p}(\omega) \cap W_0^{1,p}(\omega), L^p(\omega) \right)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p}. \quad (5.40)$$

Ainsi, puisque $1 - \frac{1}{p}$ n'est jamais un entier, d'après P. Grisvard [22] (Teorema 7, p. 681), on a

$$\left(W^{2,p}(\omega), L^p(\omega) \right)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p} = B_{p,p}^{2(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p})}(\omega) = B_{p,p}^{1-\frac{1}{p}}(\omega) = W^{1-\frac{1}{p}, p}(\omega).$$

On pose $\nu_2 := 1 - \frac{1}{p} - \frac{n-1}{p} = 1 - \frac{n}{p}$. Puisque $p > n$, on a $\nu_2 > 0$. D'après le Théorème d'injection de Sobolev (voir H. Triebel [43], section 4.6.1, p. 327-328), on a :

$$W^{1-\frac{1}{p}, p}(\omega) \hookrightarrow C(\overline{\omega}).$$

Ainsi, les traces des éléments de l'espace décrit dans (5.40) sont bien définies. D'après P. Grisvard [21] (Proposition 5.9, p. 334) et H. Triebel [43] (section 4.3.3, Theorem, p. 321), on en déduit que

$$(D(A_0), X)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p} = \left\{ \psi \in W^{1-\frac{1}{p}, p}(\omega) : \psi = 0 \text{ sur } \partial\omega \right\},$$

et

$$\begin{aligned} (D(A_0), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p} &= \left\{ \psi \in D(A_0) : A_0\psi \in (D(A_0), X)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p} \right\} \\ &= \left\{ \psi \in W^{2,p}(\omega) : \Delta\psi \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\omega) \text{ et } \psi = \Delta\psi = 0 \text{ sur } \partial\omega \right\}. \end{aligned}$$

On peut appliquer sur $u(x, \cdot)$, $x \in]a, b[$, grâce au théorème de prolongement de Sobolev sur $\mathbb{R}^{n-1}$, un opérateur de prolongement qui injecte continûment $L^p(\omega)$ dans $L^p(\mathbb{R}^{n-1})$ et qui injecte continûment $W^{2,p}(\omega)$ dans $W^{2,p}(\mathbb{R}^{n-1})$. Ainsi, d'après le Théorème de Mihlin (voir Théorème 1.2.20 et Corollaire 1.2.21 du Chapitre 1 ou l'article [31]), on en déduit que

$$u_- \in W^{2,p}(]a, \gamma[\times \omega) = W^{2,p}(\Omega_-) \quad \text{et} \quad u_+ \in W^{2,p}(] \gamma, b[\times \omega) = W^{2,p}(\Omega_+).$$

En réitérant les mêmes arguments aux autres régularités, on obtient que $u_- \in W^{4,p}(\Omega_-)$ et $u_+ \in W^{4,p}(\Omega_+)$. $\square$

En utilisant le résultat du Théorème 5.5.1. On peut aussi obtenir un résultat anisotropique en considérant $f_- \in L^p(a, \gamma; L^q(\omega))$ et $f_+ \in L^p(\gamma, b; L^q(\omega))$ avec $p, q \in]1, +\infty[$.

Chapitre 6

Problème de transmission général

6.1 Introduction

Les équations aux dérivées partielles jouent un rôle naturel dans la dynamique de population, en particulier dans les modèles de réaction-diffusion qui sont dérivés de la loi de Fick.

Un problème important dans l'écologie est l'effet des changements environnementaux sur la croissance et la diffusion des espèces dans un milieu composé de divers habitats. Dans cette situation et afin de comprendre comment les populations interagissent avec leur habitat, il est nécessaire d'avoir un modèle spatialement explicite incorporant les comportements individuels aux différents bords et interfaces des habitats.

On désigne par $u(t, \cdot)$, la densité de population. Les équations classiques issues de la loi de Fick dans chaque habitat pour ces modèles sont typiquement de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} = l\Delta u + F(u),$$

où F est le terme de croissance et d'interaction non-linéaire et l est le coefficient de diffusion positif, qui peut être variable.

La variété et la complexité des habitats et des individus ne sont pas suffisamment bien modélisés par les effets spatiaux pour être une diffusion simple issue de la loi de Fick, comme par exemple les modèles de motilité de cellule. Une approche basée sur la fonctionnelle d'énergie libre de Landau-Ginzburg et sur les dérivations variationnelles considère, pour la croissance et la dispersion dans une population, l'équation de diffusion généralisée suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -k\Delta^2 u + l\Delta u + F(u),$$

où k est généralement positif et l est un nombre qui peut être négatif, voir D. S. Cohen et J. D. Murray [7], p. 238. Dans ce chapitre, on considère uniquement le cas où k et l sont positifs, mais nos techniques peuvent être étendues au cas $k, l \in \mathbb{R}^*$, satisfaisant certaines conditions. On traitera ce cas dans un travail futur.

On considère maintenant l'espace de dimension n , $\Omega := \Omega_- \cup \Omega_+$ constitué des deux habitats juxtaposés suivants

$$\begin{cases} \Omega_- &:=]a, \gamma[\times \omega \\ \Omega_+ &:=]\gamma, b[\times \omega, \end{cases}$$

avec leur interface

$$\Gamma := \{\gamma\} \times \omega,$$

où ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^{n-1}$. On considère les équations de dispersion linéaires stationnaires suivantes

$$(EQ_{edp}) \begin{cases} k_- \Delta^2 u_- - l_- \Delta u_- = f_- & \text{dans } \Omega_- \\ k_+ \Delta^2 u_+ - l_+ \Delta u_+ = f_+ & \text{dans } \Omega_+, \end{cases}$$

où

$$u = \begin{cases} u_- & \text{dans } \Omega_- \\ u_+ & \text{dans } \Omega_+ \end{cases} \quad \text{et} \quad f = \begin{cases} f_- & \text{dans } \Omega_- \\ f_+ & \text{dans } \Omega_+, \end{cases}$$

avec f donné dans $L^p(a, b; L^p(\omega)) = L^p(\Omega)$, $p \in]1, +\infty[$ et $k_{\pm}, l_{\pm} > 0$.

Les variables spatiales sont désignées par (x, y) , où $x \in]a, b[$ et $y \in \omega$. Les équations précédentes seront considérées sous les conditions aux bords et de transmission suivantes

$$(CB_{edp}) \begin{cases} (1) \begin{cases} u_-(x, \zeta) = 0, & x \in]a, \gamma[, \zeta \in \partial\omega \\ u_+(x, \zeta) = 0, & x \in]\gamma, b[, \zeta \in \partial\omega \\ \Delta u_-(x, \zeta) = 0, & x \in]a, \gamma[, \zeta \in \partial\omega \\ \Delta u_+(x, \zeta) = 0, & x \in]\gamma, b[, \zeta \in \partial\omega \end{cases} \\ (2) \begin{cases} u_-(a, y) = \varphi_1^-(y), & u_+(b, y) = \varphi_1^+(y), & y \in \omega \\ \frac{\partial u_-}{\partial x}(a, y) = \varphi_2^-(y), & \frac{\partial u_+}{\partial x}(b, y) = \varphi_2^+(y), & y \in \omega, \end{cases} \end{cases}$$

($\varphi_1^{\pm}$ et $\varphi_2^{\pm}$ seront données dans des espaces appropriés) et

$$(CT_{edp}) \begin{cases} u_- = u_+ & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial u_-}{\partial x} = \frac{\partial u_+}{\partial x} & \text{sur } \Gamma \\ k_- \Delta u_- = k_+ \Delta u_+ & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} (k_- \Delta u_- - l_- u_-) = \frac{\partial}{\partial x} (k_+ \Delta u_+ - l_+ u_+) & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Maintenant, on définit l'opérateur linéaire homogène de dispersion suivant

$$\begin{cases} D(\mathcal{L}) = \{u \in L^p(\Omega) : \Delta u_{\pm}, \Delta^2 u_{\pm} \in L^p(\Omega_{\pm}) \text{ et } u_{\pm} \text{ satisfait } (CB_0) \text{ et } (CT_{edp})\} \\ \mathcal{L}u = \begin{cases} -k_- \Delta^2 u_- + l_- \Delta u_- & \text{dans } \Omega_- \\ -k_+ \Delta^2 u_+ + l_+ \Delta u_+ & \text{dans } \Omega_+, \end{cases} \end{cases}$$

où (CB_0) correspond à (CB_{edp}) avec $\varphi_1^+ = \varphi_1^- = \varphi_2^+ = \varphi_2^- = 0$.

Ainsi, dans ce chapitre, on se concentrera essentiellement sur la preuve de l'inversibilité de $\mathcal{L}$; cette étude sera très utile pour analyser l'équation spectrale suivante

$$\mathcal{L}u - \lambda u = f, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

afin de caractériser la nature du semi-groupe généré par $\mathcal{L}$. Les mêmes techniques que celles utilisées ici s'appliqueront pour cette étude. On connaît l'importance de cette propriété dans l'étude de l'équation de diffusion généralisée complète écrite plus haut.

On va maintenant apporter quelques précisions sur les conditions aux bords et de transmission.

Les deux premières conditions aux bords de (1) dans (CB_{edp}) signifient simplement que les individus meurent quand ils atteignent les autres cotés des bords $]a, b[\times \partial\omega$ (c'est-à-dire que l'on a un bord inhospitalier).

Les deux dernières conditions de (1) signifient qu'il n'y a pas de dispersion dans la direction de la normale. On en déduit que la dispersion s'annule sur $]a, b[\times \partial\omega$, ce qui se traduit par

$$\begin{cases} \Delta u_- = 0 & \text{sur }]a, \gamma[\times \partial\omega \\ \Delta u_+ = 0 & \text{sur }]\gamma, b[\times \partial\omega. \end{cases}$$

Dans (2) de (CB_{edp}) , la densité de population et le flux sont donnés, par exemple sur $\{a\} \times \omega$ et sur $\{b\} \times \omega$. Cela signifie que les habitats ne sont pas séparés.

Dans (CT_{edp}) , les deux premières conditions de transmission signifient qu'il y a continuité de la densité et de son flux à l'interface, alors que les deux secondes modélisent (en un certain sens) la continuité (ou proportionnalité) de la dispersion et de son flux en Γ .

On peut considérer des conditions de transmission plus réalistes avec la non-continuité de la densité et du flux mais en incluant la continuité de la dispersion généralisée :

$$k_- \Delta^2 u_- - l_- \Delta u_- = k_+ \Delta^2 u_+ - l_+ \Delta u_+ \quad \text{sur } \Gamma.$$

Cette situation requière de travailler un espace construit à partir de fonctions continus.

Notons que lorsque l'on considère différents types d'habitats, la réponse des individus à l'interface est importante pour le comportement du mouvement général.

De nombreux travaux ont utilisés un modèle de diffusion généralisé. On en cite ici quelques uns.

Dans D. S. Cohen et J. D. Murray [7] et dans F. L. Ochoa [33], les auteurs ont présenté, en une dimension, un modèle non linéaire avec une structure spatiale caractérisée par un opérateur du quatrième ordre dans seulement un habitat. Ils ont essentiellement utilisés la fonctionnelle d'énergie libre de Landau-Ginzburg.

On s'est essentiellement inspiré de ces travaux afin d'en déduire un modèle linéaire en dimension n posé dans deux habitats cylindriques bornés et juxtaposés qui requière nécessairement des conditions aux bords et de transmission.

On s'est ensuite basé sur des techniques similaires à celles utilisées dans les travaux de A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, K. Lemrabet et H. Sidibé [17] et de K. Limam, R. Labbas, K. Lemrabet, A. Medeghri et M. Meisner [28].

Ce chapitre est organisé de la façon suivante :

Dans la section 6.2, on présente le problème de transmission (P_{pde}) et avec l'aide de l'opérateur A_0 défini plus bas, on donne son écriture opérationnelle qui sera généralisée dans (P).

Dans la section 6.3, on donne les hypothèses ainsi que quelques conséquences sur ces dernières.

Dans la section 6.4, on explique comment résoudre le problème (P) en introduisant deux problèmes auxiliaires (P_-) et (P_+) . On donne un résultat technique qui va nous aider à démontrer le résultat principal. Dans la Proposition 6.4.3 et dans la Proposition 6.4.5 on résout les problèmes (P_-) et (P_+) qui fournissent les espaces d'interpolation réels dans lesquels vivent

les données. On établit (voir Théorème 6.4.7) un résultat technique très utile qui nous permet de démontrer le Théorème 6.5.1. Enfin, on démontre quelques lemmes techniques qui nous permettront d'appliquer du calcul fonctionnel.

Dans la section 6.5, on présente le résultat principal dans le Théorème 6.5.1. Le reste de cette section qui est dédiée à la preuve du Théorème 6.5.1 est composée de trois parties : dans la première partie, on utilise le Théorème 6.4.7 afin d'explicitier le déterminant de la matrice associée au système de transmission. Dans la seconde partie, on inverse ce déterminant en utilisant le calcul fonctionnel. Enfin, dans la dernière partie, on montre que le problème de transmission a une unique solution classique en établissant la régularité de la solution.

Finalement, dans la dernière section, comme une conséquence de ce théorème, on obtient le Corollaire 6.6.1 qui établit l'existence et l'unicité de la solution u du problème (P_{edp}) donné par $(EQ_{edp}) - (CB_{edp}) - (CT_{edp})$ énoncé plus haut.

6.2 Formulation opérationnelle

On considère maintenant le problème

$$(P_{edp}) \left\{ \begin{array}{ll} k_- \Delta^2 u_- - l_- \Delta u_- = f_- & \text{dans } \Omega_- \\ k_+ \Delta^2 u_+ - l_+ \Delta u_+ = f_+ & \text{dans } \Omega_+ \\ u_-(x, \zeta) = 0, & x \in]a, \gamma[, \zeta \in \partial\omega \\ u_+(x, \zeta) = 0, & x \in]\gamma, b[, \zeta \in \partial\omega \\ \Delta u_-(x, \zeta) = 0, & x \in]a, \gamma[, \zeta \in \partial\omega \\ \Delta u_+(x, \zeta) = 0, & x \in]\gamma, b[, \zeta \in \partial\omega \\ u_-(a, y) = \varphi_1^-(y), & y \in \omega \\ u_+(b, y) = \varphi_1^+(y), & y \in \omega \\ \frac{\partial u_-}{\partial x}(a, y) = \varphi_2^-(y), & y \in \omega \\ \frac{\partial u_+}{\partial x}(b, y) = \varphi_2^+(y), & y \in \omega \\ u_- = u_+ & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial u_-}{\partial x} = \frac{\partial u_+}{\partial x} & \text{sur } \Gamma \\ k_- \Delta u_- = k_+ \Delta u_+ & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} (k_- \Delta u_- - l_- u_-) = \frac{\partial}{\partial x} (k_+ \Delta u_+ - l_+ u_+) & \text{sur } \Gamma. \end{array} \right.$$

On rappelle l'expression de A_0 , l'opérateur laplacien dans $\mathbb{R}^{n-1}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} D(A_0) := \{\psi \in W^{2,p}(\omega) : \psi = 0 \text{ sur } \partial\omega\} \\ \forall \psi \in D(A_0), \quad A_0 \psi = \Delta_g \psi. \end{array} \right. \quad (6.1)$$

De ce fait, en utilisant l'opérateur A_0 et les notations usuelles

$$u_{\pm}(x) := u_{\pm}(x, \cdot) \quad \text{et} \quad f_{\pm}(x) := f_{\pm}(x, \cdot)/k_{\pm},$$

le problème (P_{edp}) devient

$$\left\{ \begin{array}{l} u_-^{(4)}(x) + (2A_0 - \frac{l_-}{k_-} I)u_-''(x) + (A_0^2 - \frac{l_-}{k_-} A_0)u_-(x) = f_-(x), \quad \text{p.p. } x \in]a, \gamma[\\ u_+^{(4)}(x) + (2A_0 - \frac{l_+}{k_+} I)u_+''(x) + (A_0^2 - \frac{l_+}{k_+} A_0)u_+(x) = f_+(x), \quad \text{p.p. } x \in]\gamma, b[\\ u_-(a) = \varphi_1^-, \quad u_+(b) = \varphi_1^+ \\ u'_-(a) = \varphi_2^-, \quad u'_+(b) = \varphi_2^+ \\ u_-(\gamma) = u_+(\gamma) \\ u'_-(\gamma) = u'_+(\gamma) \\ k_- u_-''(\gamma) + k_- A_0 u_-(\gamma) = k_+ u_+''(\gamma) + k_+ A_0 u_+(\gamma) \\ k_- u_-^{(3)}(\gamma) + k_- A_0 u'_-(\gamma) - l_- u'_-(\gamma) = k_+ u_+^{(3)}(\gamma) + k_+ A_0 u'_+(\gamma) - l_+ u'_+(\gamma), \end{array} \right.$$

où

$$f_- \in L^p(a, \gamma; L^p(\omega)), \quad f_+ \in L^p(\gamma, b; L^p(\omega)) \quad \text{avec } p \in]1, +\infty[.$$

On considère une généralisation de ce problème en remplaçant $L^p(\omega)$ par X , un espace de Banach complexe de type UMD (voir Théorème 1.5.4) et $(-A_0, D(-A_0))$ par $(-A, D(-A))$ un opérateur BIP d'angle $\theta_A \in [0, \pi[$ sur X , (voir Définition 1.3.17).

Plus précisément, on étudie le problème de transmission (P) suivant :

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} (EQ) \left\{ \begin{array}{l} u_-^{(4)}(x) + (2A - \frac{l_-}{k_-} I)u_-''(x) + (A^2 - \frac{l_-}{k_-} A)u_-(x) = f_-(x), \quad \text{p.p. } x \in]a, \gamma[\\ u_+^{(4)}(x) + (2A - \frac{l_+}{k_+} I)u_+''(x) + (A^2 - \frac{l_+}{k_+} A)u_+(x) = f_+(x), \quad \text{p.p. } x \in]\gamma, b[\end{array} \right. \\ (CB) \left\{ \begin{array}{l} u_-(a) = \varphi_1^-, \quad u_+(b) = \varphi_1^+ \\ u'_-(a) = \varphi_2^-, \quad u'_+(b) = \varphi_2^+ \end{array} \right. \\ (CT) \left\{ \begin{array}{l} u_-(\gamma) = u_+(\gamma) \\ u'_-(\gamma) = u'_+(\gamma) \\ k_- u_-''(\gamma) + k_- A u_-(\gamma) = k_+ u_+''(\gamma) + k_+ A u_+(\gamma) \\ k_- u_-^{(3)}(\gamma) + k_- A u'_-(\gamma) - l_- u'_-(\gamma) = k_+ u_+^{(3)}(\gamma) + k_+ A u'_+(\gamma) - l_+ u'_+(\gamma). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Les conditions de transmission (CT) se divisent en

$$(CT1) \left\{ \begin{array}{l} u_-(\gamma) = u_+(\gamma) \\ u'_-(\gamma) = u'_+(\gamma), \end{array} \right.$$

et

$$(CT2) \left\{ \begin{array}{l} k_- u_-''(\gamma) + k_- A u_-(\gamma) = k_+ u_+''(\gamma) + k_+ A u_+(\gamma) \\ k_- u_-^{(3)}(\gamma) + k_- A u'_-(\gamma) - l_- u'_-(\gamma) = k_+ u_+^{(3)}(\gamma) + k_+ A u'_+(\gamma) - l_+ u'_+(\gamma). \end{array} \right.$$

Notons que (CT2) est bien défini d'après le Lemme 1.6.11.

On cherche une solution classique du problème (P), qui est une solution u telle que

$$\begin{cases} u_- := u|_{]a, \gamma[} \in W^{4,p}(a, \gamma; X) \cap L^p(a, \gamma; D(A^2)), & u''_- \in L^p(a, \gamma; D(A)) \\ u_+ := u|_{] \gamma, b[} \in W^{4,p}(\gamma, b; X) \cap L^p(\gamma, b; D(A^2)), & u''_+ \in L^p(\gamma, b; D(A)), \end{cases} \quad (6.2)$$

et qui vérifie $(EQ) - (CB) - (CT)$.

6.3 Hypothèses

Dans toute la suite, $k_+, k_-, l_+, l_- \in \mathbb{R}_+^*$, A désigne un opérateur linéaire fermé dans X , un espace de Banach. Une partie des résultats de ce chapitre utilise le célèbre Théorème de Dore-Venni (voir Théorème 1.7.4 du Chapitre 1 ou l'article [12]) et sa généralisation due à J. Prüss et H. Sohr (voir le Théorème 1.5.7 du Chapitre 1 ou l'article [38]), qui nécessite de considérer un espace X de type UMD. (voir Théorème 1.5.4 du Chapitre 1).

On pose

$$r_+ = \frac{l_+}{k_+} \quad \text{et} \quad r_- = \frac{l_-}{k_-}.$$

On considère les hypothèses suivantes :

- (H₁) X est un espace UMD,
- (H₂) $0 \in \rho(A)$,
- (H₃) $-A \in \text{BIP}(X, \theta_A)$ pour $\theta_A \in [0, \pi[$,

Certains de nos résultats nécessiteront une hypothèse supplémentaire :

$$(H_4) \quad \sigma(A) \subset]-\infty, 0[\quad \text{et} \quad \forall \theta \in]0, \pi[, \quad \sup_{\lambda \in S_\theta} \|\lambda(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty.$$

Notons que (H₄) signifie que $-A$ est un opérateur sectoriel d'angle 0 (voir Définition 1.1.29). On donne maintenant quelques conséquences sur nos hypothèses.

Remarque 6.3.1.

1. L'opérateur A_0 satisfait toutes les hypothèses précédentes avec $X = L^q(\omega)$, $q \in]1, +\infty[$.
2. Pour résoudre chaque équation de (EQ) , dans le cas scalaire (avec $-A > 0$), il est nécessaire d'introduire les racines $\pm\sqrt{-A + r_\pm}$, $\pm\sqrt{-A}$ des équations caractéristiques

$$X^4 + (2A - r_\pm)X^2 + A^2 - r_\pm A = 0,$$

ce pourquoi, dans notre cas opérationnel, on considère les opérateurs

$$L_- := -\sqrt{-A + r_-} I, \quad L_+ := -\sqrt{-A + r_+} I \quad \text{et} \quad M := -\sqrt{-A}. \quad (6.3)$$

Grâce à (H₃), $-A$, $-A + r_- I$ et $-A + r_+ I$ sont des opérateurs sectoriels, donc l'existence de L_- , L_+ et M est assurée, voir M. Haase [23], e), p.25.

3. En appliquant la Proposition 3.1.9, p. 65, dans M. Haase [23], on a

$$D(L_-) = D(L_+) = D(M).$$

Par conséquent, pour $n, m \in \mathbb{N}$ et $m \leq n$

$$D(L_\pm^n) = D(M^n) = D(L_\pm^m M^{n-m}) = D(M^m L_\pm^{n-m}).$$

4. Grâce à (H_3) , $-A + r_- I \in \text{BIP}(X, \theta_A)$ et $-A + r_+ I \in \text{BIP}(X, \theta_A)$, voir J. Prüss et H. Sohr [38], Theorem 3, p. 437, ce pourquoi, on déduit que

$$-L_-, -L_+, -M \in \text{BIP}(X, \theta_A/2),$$

voir M. Haase [23], Proposition 3.2.1, e), p. 71. Puisque $0 < \theta_A/2 < \pi/2$, L_- , L_+ et M génère des semi-groupes analytiques bornés $(e^{xL_-})_{x \geq 0}$, $(e^{xL_+})_{x \geq 0}$ et $(e^{xM})_{x \geq 0}$, voir J. Prüss et H. Sohr [38], Theorem 2, p. 437. De plus, d'après J. Prüss et H. Sohr [38], Theorem 4, p. 441, on obtient

$$-(L_- + M), -(L_+ + M) \in \text{BIP}(X, \theta_A/2 + \varepsilon),$$

pour $\varepsilon \in]0, \pi/2 - \theta_A/2[$. Donc, d'après J. Prüss et H. Sohr [38], Theorem 2, p. 437, $L_- + M$ et $L_+ + M$ génère des semi-groupes analytiques bornés

$$(e^{x(L_- + M)})_{x \geq 0} \quad \text{et} \quad (e^{x(L_+ + M)})_{x \geq 0}.$$

5. D'après (H_2) et (H_3) , on en déduit que $0 \in \rho(M) \cap \rho(L_-) \cap \rho(L_+)$. Par conséquent, les hypothèses (H_1) , (H_2) et (H_3) nous mène à appliquer le Théorème 1.5.7, afin d'obtenir $0 \in \rho(L_+ + M)$ et $0 \in \rho(L_- + M)$.
6. Il s'en suit d'après (6.3) que

$$\forall \psi \in D(M^2), \quad (L_+^2 - M^2)\psi = r_+ \psi \quad \text{et} \quad (L_-^2 - M^2)\psi = r_- \psi, \quad (6.4)$$

et aussi

$$\forall \psi \in D(M), \quad (L_+ - M)\psi = r_+(L_+ + M)^{-1}\psi \quad \text{et} \quad (L_- - M)\psi = r_-(L_- + M)^{-1}\psi. \quad (6.5)$$

6.4 Résultats préliminaires

Afin de résoudre le problème (P), on introduit deux problèmes :

$$(P_-) \begin{cases} u_-^{(4)}(x) + (2A - r_- I)u_-''(x) + (A^2 - r_- A)u_-(x) = f_-(x), & \text{p.p. } x \in]a, \gamma[\\ u_-(a) = \varphi_1^-, \quad u_-(\gamma) = \psi_1 \\ u'_-(a) = \varphi_2^-, \quad u'_-(\gamma) = \psi_2, \end{cases}$$

et

$$(P_+) \begin{cases} u_+^{(4)}(x) + (2A - r_+ I)u_+''(x) + (A^2 - r_+ A)u_+(x) = f_+(x), & \text{p.p. } x \in]\gamma, b[\\ u_+(\gamma) = \psi_1, \quad u_+(b) = \varphi_1^+ \\ u'_+(\gamma) = \psi_2, \quad u'_+(b) = \varphi_2^+. \end{cases}$$

Remarque 6.4.1. On obtient que u est une solution classique de (P) si et seulement s'il existe $\psi_1, \psi_2 \in X$ telles que :

- (i) u_- est une solution classique de (P_-) ,
- (ii) u_+ est une solution classique de (P_+) ,
- (iii) u_- et u_+ vérifient (CT2).

Notre but est donc de montrer qu'il existe un unique couple (ψ_1, ψ_2) qui vérifie (i), (ii) et (iii).

D'après la remarque précédente, pour résoudre le problème (P), il nous faut tout d'abord résoudre les problèmes (P_-) et (P_+) . Pour cela, on a besoin des résultats préliminaires détaillés dans cette section. Afin de simplifier les notations, on pose

$$c = \gamma - a > 0 \quad \text{et} \quad d = b - \gamma > 0.$$

Tout d'abord, on a besoin d'un résultat d'inversibilité obtenu dans la section 3.4.2 du Chapitre 3.

Lemme 6.4.2. *Les opérateurs $U_+, U_-, V_+, V_- \in \mathcal{L}(X)$ définis par*

$$\begin{cases} U_+ &:= I - e^{d(L_++M)} - r_+(L_+ + M)^2 (e^{dM} - e^{dL_+}) \\ U_- &:= I - e^{c(L_-+M)} - r_-(L_- + M)^2 (e^{cM} - e^{cL_-}) \\ V_+ &:= I - e^{d(L_++M)} + r_+(L_+ + M)^2 (e^{dM} - e^{dL_+}) \\ V_- &:= I - e^{c(L_-+M)} + r_-(L_- + M)^2 (e^{cM} - e^{cL_-}), \end{cases} \quad (6.6)$$

sont inversibles avec inverse borné.

Toutes ces exponentielles sont bien définies grâce au point 4. de la Remarque 6.3.1. Pour une preuve détaillée, voir Chapitre 3, section 3.4.2, Proposition 3.4.3 avec $b - a = c$ et $r = r_-$ ou $b - a = d$ et $r = r_+$.

6.4.1 Le problème (P_-)

Proposition 6.4.3. *Soit $f_- \in L^p(a, \gamma; X)$. On suppose que (H_1) , (H_2) , (H_3) et (H_4) sont vérifiées. Alors il existe une unique solution classique u_- au problème (P_-) si et seulement si*

$$\varphi_1^-, \psi_1 \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2p}, p} \quad \text{et} \quad \varphi_2^-, \psi_2 \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p}. \quad (6.7)$$

De plus

$$\begin{aligned} u_-(x) &= \left(e^{(x-a)M} - e^{(\gamma-x)M} \right) \alpha_1^- + \left(e^{(x-a)L_-} - e^{(\gamma-x)L_-} \right) \alpha_2^- \\ &\quad + \left(e^{(x-a)M} + e^{(\gamma-x)M} \right) \alpha_3^- + \left(e^{(x-a)L_-} + e^{(\gamma-x)L_-} \right) \alpha_4^- + F_-(x), \end{aligned} \quad (6.8)$$

où

$$\begin{cases} \alpha_1^- &:= -\frac{1}{2r_-}(L_- + M)U_-^{-1} \left[L_-(I + e^{cL_-})\psi_1 + (I - e^{cL_-})\psi_2 + \tilde{\varphi}_1^- \right] \\ \alpha_2^- &:= \frac{1}{2r_-}(L_- + M)U_-^{-1} \left[M(I + e^{cM})\psi_1 + (I - e^{cM})\psi_2 + \tilde{\varphi}_2^- \right] \\ \alpha_3^- &:= \frac{1}{2r_-}(L_- + M)V_-^{-1} \left[L_-(I - e^{cL_-})\psi_1 + (I + e^{cL_-})\psi_2 + \tilde{\varphi}_3^- \right] \\ \alpha_4^- &:= -\frac{1}{2r_-}(L_- + M)V_-^{-1} \left[M(I - e^{cM})\psi_1 + (I + e^{cM})\psi_2 + \tilde{\varphi}_4^- \right], \end{cases} \quad (6.9)$$

avec

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_1^- := -L_- (I + e^{cL_-}) \varphi_1^- - (I - e^{cL_-}) (F'_-(a) + F'_-(\gamma) - \varphi_2^-) \\ \tilde{\varphi}_2^- := -M (I + e^{cM}) \varphi_1^- - (I - e^{cM}) (F'_-(a) + F'_-(\gamma) - \varphi_2^-) \\ \tilde{\varphi}_3^- := L_- (I - e^{cL_-}) \varphi_1^- - (I + e^{cL_-}) (F'_-(\gamma) - F'_-(a) + \varphi_2^-) \\ \tilde{\varphi}_4^- := M (I - e^{cM}) \varphi_1^- - (I + e^{cM}) (F'_-(\gamma) - F'_-(a) + \varphi_2^-), \end{cases} \quad (6.10)$$

et F_- est l'unique solution classique du problème

$$\begin{cases} u_-^{(4)}(x) + (2A - r_- I)u''_-(x) + (A^2 - r_- A)u_-(x) = f_-(x), & p.p. \ x \in]a, \gamma[\\ u_-(a) = u_-(\gamma) = u''_-(a) = u''_-(\gamma) = 0. \end{cases} \quad (6.11)$$

Démonstration. D'après le Chapitre 3 (Théorème 3.4.1, 2.), il existe une unique solution classique u_- au problème (P_-) si et seulement si (6.7) est vérifiée. De plus, la formule de représentation de u_- est donnée dans le Chapitre 3 à la section 3.4.2 par (3.34), où $u, f, b, F_{0,f}, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ sont respectivement remplacés par $u_-, f_-, \gamma, F_-, \varphi_1^-, \psi_1, \varphi_2^-, \psi_2$. Cela prouve que la formule de représentation de u_- est donnée par (6.8), (6.9) et (6.10). $\square$

Remarque 6.4.4. Dans la proposition précédente, grâce à (6.7), (6.9) et (6.10), on a

$$\alpha_i^- \in D(M), \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, 4.$$

De plus, puisque F_- est une solution classique de (6.11), d'après le Lemme 1.6.11, on en déduit que, pour $j = 0, 1, 2, 3$ et $s = a$ ou γ

$$F_-^{(j)}(s) \in (D(M), X)_{3-j+\frac{1}{p}, p}.$$

6.4.2 Le problème (P_+)

Proposition 6.4.5. Soit $f_+ \in L^p(\gamma, b; X)$. On suppose que (H_1) , (H_2) , (H_3) et (H_4) sont vérifiées. Alors il existe une unique solution classique u_+ au problème (P_+) si et seulement si

$$\varphi_1^+, \psi_1 \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2p}, p} \quad \text{et} \quad \varphi_2^+, \psi_2 \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p}. \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} u_+(x) = & \left(e^{(x-\gamma)M} - e^{(b-x)M} \right) \alpha_1^+ + \left(e^{(x-\gamma)L_+} - e^{(b-x)L_+} \right) \alpha_2^+ \\ & + \left(e^{(x-\gamma)M} + e^{(b-x)M} \right) \alpha_3^+ + \left(e^{(x-\gamma)L_+} + e^{(b-x)L_+} \right) \alpha_4^+ + F_+(x), \end{aligned} \quad (6.13)$$

où

$$\begin{cases} \alpha_1^+ = \frac{1}{2r_+} (L_+ + M) U_+^{-1} \left[L_+ (I + e^{dL_+}) \psi_1 - (I - e^{dL_+}) \psi_2 + \tilde{\varphi}_1^+ \right] \\ \alpha_2^+ = -\frac{1}{2r_+} (L_+ + M) U_+^{-1} \left[M (I + e^{dM}) \psi_1 - (I - e^{dM}) \psi_2 + \tilde{\varphi}_2^+ \right] \\ \alpha_3^+ = \frac{1}{2r_+} (L_+ + M) V_+^{-1} \left[L_+ (I - e^{dL_+}) \psi_1 - (I + e^{dL_+}) \psi_2 + \tilde{\varphi}_3^+ \right] \\ \alpha_4^+ = -\frac{1}{2r_+} (L_+ + M) V_+^{-1} \left[M (I - e^{dM}) \psi_1 - (I + e^{dM}) \psi_2 + \tilde{\varphi}_4^+ \right], \end{cases} \quad (6.14)$$

avec

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_1^+ &= -L_+ (I + e^{dL_+}) \varphi_1^+ + (I - e^{dL_+}) (F'_+(b) + F'_+(\gamma) - \varphi_2^+) \\ \tilde{\varphi}_2^+ &= -M (I + e^{dM}) \varphi_1^+ + (I - e^{dM}) (F'_+(b) + F'_+(\gamma) - \varphi_2^+) \\ \tilde{\varphi}_3^+ &= L_+ (I - e^{dL_+}) \varphi_1^+ - (I + e^{dL_+}) (F'_+(b) - F'_+(\gamma) - \varphi_2^+) \\ \tilde{\varphi}_4^+ &= M (I - e^{dM}) \varphi_1^+ - (I + e^{dM}) (F'_+(b) - F'_+(\gamma) - \varphi_2^+), \end{cases} \quad (6.15)$$

et F_+ est l'unique solution classique du problème

$$\begin{cases} u_+^{(4)}(x) + (2A - r_+ I)u_+''(x) + (A^2 - r_+ A)u_+(x) = f_+(x), & p.p. x \in]\gamma, b[\\ u_+(\gamma) = u_+(b) = u_+''(\gamma) = u_+''(b) = 0. \end{cases} \quad (6.16)$$

Démonstration. D'après le Chapitre 3 (Théorème 3.4.1, 2.), il existe une unique solution classique u_+ au problème (P_+) si et seulement si (6.12) est vérifiée. De plus, la formule de représentation de u_+ est donnée dans le Chapitre 3 à la section 3.4.2 par (3.34), où u , L , f , a , $F_{0,f}$, k , φ_1 , φ_2 , φ_3 , φ_4 sont respectivement remplacés par u_+ , L_+ , f_+ , γ , F_+ , r_+ , ψ_1 , φ_1^+ , ψ_2 , φ_2^+ . Cela prouve que la formule de représentation de u_+ est donnée par (6.13), (6.14) et (6.15). $\square$

Remarque 6.4.6. Dans la proposition précédente, grâce à (6.12), (6.14) et (6.15), on a

$$\alpha_i^+ \in D(M), \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, 4.$$

De plus, puisque F_+ est une solution classique de (6.16), d'après le Lemme 1.6.11, on en déduit que, pour $j = 0, 1, 2, 3$ et $s = \gamma$ ou b

$$F_+^{(j)}(s) \in (D(M), X)_{3-j+\frac{1}{p}, p}.$$

6.4.3 Le système de transmission

Cette section est dédiée à la preuve du Théorème 6.4.7 établi plus bas. Ce théorème fait le lien entre le problème (P) et le système suivant

$$\begin{cases} (P_1^+ + P_1^-) \psi_1 + (P_2^- - P_2^+) \psi_2 = S_1 \\ M (P_2^- - P_2^+) \psi_1 + (P_3^+ + P_3^-) \psi_2 = S_2. \end{cases} \quad (6.17)$$

Les coefficients sont donnés par

$$\begin{cases} P_1^+ &= k_+(L_+ + M)L_+ (U_+^{-1}(I + e^{dM})(I + e^{dL_+}) + V_+^{-1}(I - e^{dM})(I - e^{dL_+})) \\ P_2^+ &= k_+(L_+ + M) (U_+^{-1}(I + e^{dM})(I - e^{dL_+}) + V_+^{-1}(I - e^{dM})(I + e^{dL_+})) \\ P_3^+ &= k_+(L_+ + M) (U_+^{-1}(I - e^{dM})(I - e^{dL_+}) + V_+^{-1}(I + e^{dM})(I + e^{dL_+})), \end{cases} \quad (6.18)$$

et

$$\begin{cases} P_1^- &= k_-(L_- + M)L_- (U_-^{-1}(I + e^{cM})(I + e^{cL_-}) + V_-^{-1}(I - e^{cM})(I - e^{cL_-})) \\ P_2^- &= k_-(L_- + M) (U_-^{-1}(I + e^{cM})(I - e^{cL_-}) + V_-^{-1}(I - e^{cM})(I + e^{cL_-})) \\ P_3^- &= k_-(L_- + M) (U_-^{-1}(I - e^{cM})(I - e^{cL_-}) + V_-^{-1}(I + e^{cM})(I + e^{cL_-})). \end{cases} \quad (6.19)$$

Les seconds membres sont donnés par

$$\begin{aligned} S_1 = & -k_+(L_+ + M) \left(U_+^{-1}(I + e^{dM})\tilde{\varphi}_1^+ + V_+^{-1}(I - e^{dM})\tilde{\varphi}_3^+ \right) \\ & -k_-(L_- + M) \left(U_-^{-1}(I + e^{cM})\tilde{\varphi}_1^- + V_-^{-1}(I - e^{cM})\tilde{\varphi}_3^- \right) - 2M^{-1}\check{S}, \end{aligned} \quad (6.20)$$

où $\check{S}$ est donné par

$$\check{S} = -k_+F_+'''(\gamma) + k_+M^2F_+'(\gamma) + l_+F_+'(\gamma) + k_-F_-'''(\gamma) - k_-M^2F_-'(\gamma) - l_-F_-'(\gamma), \quad (6.21)$$

et

$$\begin{aligned} S_2 = & k_+(L_+ + M) \left(U_+^{-1}(I - e^{dL_+})\tilde{\varphi}_2^+ + V_+^{-1}(I + e^{dL_+})\tilde{\varphi}_4^+ \right) \\ & -k_-(L_- + M) \left(U_-^{-1}(I - e^{cL_-})\tilde{\varphi}_2^- + V_-^{-1}(I + e^{cL_-})\tilde{\varphi}_4^- \right). \end{aligned} \quad (6.22)$$

Théorème 6.4.7. *Soient $f_- \in L^p(a, \gamma; X)$ et $f_+ \in L^p(\gamma, b; X)$. On suppose que (H_1) , (H_2) , (H_3) et (H_4) sont vérifiées. Alors, le problème de transmission (P) a une unique solution classique si et seulement si les données $\varphi_1^+, \varphi_1^-, \varphi_2^+$ et φ_2^- vérifient (6.31) et que le système (6.17) a une unique solution (ψ_1, ψ_2) telle que*

$$(\psi_1, \psi_2) \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2p}, p} \times (D(A), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p}. \quad (6.23)$$

Démonstration. Tout d'abord, on suppose que (P) admet une unique solution classique u . En posant

$$\psi_1 = u_-(\gamma) = u_+(\gamma) \quad \text{et} \quad \psi_2 = u'_-(\gamma) = u'_+(\gamma),$$

on obtient que u_- (respectivement u_+) est la solution classique de (P_-) (respectivement (P_+)). Donc, en appliquant la Proposition 6.4.3 (respectivement Proposition 6.4.5), on obtient (6.31) et aussi (6.23). Il reste à prouver que (ψ_1, ψ_2) vérifie (6.17). A cette fin, on utilise (CT2) satisfaite par u , qui est

$$\begin{cases} k_+ \left(u_+^{(3)}(\gamma) - M^2 u_+'(\gamma) \right) - l_+ u_+'(\gamma) & - & k_- \left(u_-^{(3)}(\gamma) - M^2 u_-'(\gamma) \right) + l_- u_-'(\gamma) & = & 0 \\ k_+ \left(u_+''(\gamma) - M^2 u_+(\gamma) \right) & & - & k_- \left(u_-''(\gamma) - M^2 u_-(\gamma) \right) & = & 0. \end{cases}$$

Pour expliciter ce système, on utilise l'expression de u_+ donnée dans (6.13). Il s'en suit que pour $x \in]\gamma, b[$, on a

$$\begin{aligned} u_+(x) &= \left(e^{(x-\gamma)M} - e^{(b-x)M} \right) \alpha_1^+ + \left(e^{(x-\gamma)L_+} - e^{(b-x)L_+} \right) \alpha_2^+ \\ &+ \left(e^{(x-\gamma)M} + e^{(b-x)M} \right) \alpha_3^+ + \left(e^{(x-\gamma)L_+} + e^{(b-x)L_+} \right) \alpha_4^+ + F_+(x), \\ u_+'(x) &= M \left(e^{(x-\gamma)M} + e^{(b-x)M} \right) \alpha_1^+ + L_+ \left(e^{(x-\gamma)L_+} + e^{(b-x)L_+} \right) \alpha_2^+ \\ &+ M \left(e^{(x-\gamma)M} - e^{(b-x)M} \right) \alpha_3^+ + L_+ \left(e^{(x-\gamma)L_+} - e^{(b-x)L_+} \right) \alpha_4^+ + F_+'(x), \\ u_+''(x) &= M^2 \left(e^{(x-\gamma)M} - e^{(b-x)M} \right) \alpha_1^+ + L_+^2 \left(e^{(x-\gamma)L_+} - e^{(b-x)L_+} \right) \alpha_2^+ \\ &+ M^2 \left(e^{(x-\gamma)M} + e^{(b-x)M} \right) \alpha_3^+ + L_+^2 \left(e^{(x-\gamma)L_+} + e^{(b-x)L_+} \right) \alpha_4^+ + F_+''(x), \\ u_+^{(3)}(x) &= M^3 \left(e^{(x-\gamma)M} + e^{(b-x)M} \right) \alpha_1^+ + L_+^3 \left(e^{(x-\gamma)L_+} + e^{(b-x)L_+} \right) \alpha_2^+ \\ &+ M^3 \left(e^{(x-\gamma)M} - e^{(b-x)M} \right) \alpha_3^+ + L_+^3 \left(e^{(x-\gamma)L_+} - e^{(b-x)L_+} \right) \alpha_4^+ + F_+'''(x). \end{aligned}$$

D'où, en vertu du Lemme 1.6.11, on obtient l'expression suivante

$$\begin{aligned} M^{-2} \left(u_+^{(3)}(\gamma) - M^2 u'_+(\gamma) \right) &= L_+(L_+^2 - M^2) M^{-2} \left(I + e^{dL_+} \right) \alpha_2^+ \\ &\quad + L_+(L_+^2 - M^2) M^{-2} \left(I - e^{dL_+} \right) \alpha_4^+ \\ &\quad + M^{-2} F_+'''(\gamma) - F'_+(\gamma). \end{aligned}$$

De plus, d'après (6.4), on obtient

$$\begin{aligned} M^{-2} \left(u_+^{(3)}(\gamma) - M^2 u'_+(\gamma) \right) &= \frac{l_+}{k_+} L_+ M^{-2} \left(I + e^{dL_+} \right) \alpha_2^+ \\ &\quad + \frac{l_+}{k_+} L_+ M^{-2} \left(I - e^{dL_+} \right) \alpha_4^+ + M^{-2} F_+'''(\gamma) - F'_+(\gamma), \end{aligned}$$

d'où

$$u_+^{(3)}(\gamma) - M^2 u'_+(\gamma) = \frac{l_+}{k_+} L_+ \left(I + e^{dL_+} \right) \alpha_2^+ + \frac{l_+}{k_+} L_+ \left(I - e^{dL_+} \right) \alpha_4^+ + F_+'''(\gamma) - M^2 F'_+(\gamma),$$

il s'en suit que

$$\begin{aligned} k_+ \left(u_+^{(3)}(\gamma) - M^2 u'_+(\gamma) \right) - l_+ u'_+(\gamma) &= -l_+ M \left(I + e^{dL_+} \right) \alpha_1^+ - l_+ M \left(I - e^{dL_+} \right) \alpha_3^+ \\ &\quad + k_+ F_+'''(\gamma) - k_+ M^2 F'_+(\gamma) - l_+ F'_+(\gamma). \end{aligned}$$

Notons que, d'après la Remarque 6.4.6 et le Lemme 1.6.11, tous les termes des égalités précédentes sont justifiés. Par les mêmes arguments et en utilisant encore (6.4) et aussi (6.16), on a

$$\begin{aligned} M^{-1} \left(u_+''(\gamma) - M^2 u_+(\gamma) \right) &= (L_+^2 - M^2) M^{-1} \left(I - e^{dL_+} \right) \alpha_2^+ + (L_+^2 - M^2) M^{-1} \left(I + e^{dL_+} \right) \alpha_4^+ \\ &= \frac{l_+}{k_+} M^{-1} \left(I - e^{dL_+} \right) \alpha_2^+ + \frac{l_+}{k_+} M^{-1} \left(I + e^{dL_+} \right) \alpha_4^+. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$k_+ \left(u_+''(\gamma) - M^2 u_+(\gamma) \right) = l_+ \left(I - e^{dL_+} \right) \alpha_2^+ + l_+ \left(I + e^{dL_+} \right) \alpha_4^+. \quad (6.24)$$

Comme précédemment, pour u_- , on utilise (6.8) et on obtient, pour $x \in]a, \gamma[$

$$\begin{aligned} u_-(x) &= \left(e^{(x-a)M} - e^{(\gamma-x)M} \right) \alpha_1^- + \left(e^{(x-a)L_-} - e^{(\gamma-x)L_-} \right) \alpha_2^- \\ &\quad + \left(e^{(x-a)M} + e^{(\gamma-x)M} \right) \alpha_3^- + \left(e^{(x-a)L_-} + e^{(\gamma-x)L_-} \right) \alpha_4^- + F_-(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u'_-(x) &= M \left(e^{(x-a)M} + e^{(\gamma-x)M} \right) \alpha_1^- + L_- \left(e^{(x-a)L_-} + e^{(\gamma-x)L_-} \right) \alpha_2^- \\ &\quad + M \left(e^{(x-a)M} - e^{(\gamma-x)M} \right) \alpha_3^- + L_- \left(e^{(x-a)L_-} - e^{(\gamma-x)L_-} \right) \alpha_4^- + F'_-(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u''_-(x) &= M^2 \left(e^{(x-a)M} - e^{(\gamma-x)M} \right) \alpha_1^- + L_-^2 \left(e^{(x-a)L_-} - e^{(\gamma-x)L_-} \right) \alpha_2^- \\ &\quad + M^2 \left(e^{(x-a)M} + e^{(\gamma-x)M} \right) \alpha_3^- + L_-^2 \left(e^{(x-a)L_-} + e^{(\gamma-x)L_-} \right) \alpha_4^- + F''_-(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^{(3)}_-(x) &= M^3 \left(e^{(x-a)M} + e^{(\gamma-x)M} \right) \alpha_1^- + L_-^3 \left(e^{(x-a)L_-} + e^{(\gamma-x)L_-} \right) \alpha_2^- \\ &\quad + M^3 \left(e^{(x-a)M} - e^{(\gamma-x)M} \right) \alpha_3^- + L_-^3 \left(e^{(x-a)L_-} - e^{(\gamma-x)L_-} \right) \alpha_4^- + F'''_-(x). \end{aligned}$$

Ainsi, en vertu du Lemme 1.6.11, on a

$$\begin{aligned} u_-^{(3)}(\gamma) - M^2 u'_-(\gamma) &= L_-(L_-^2 - M^2) (e^{cL_-} + I) \alpha_2^- + L_-(L_-^2 - M^2) (e^{cL_-} - I) \alpha_4^- \\ &\quad + F_-'''(\gamma) - M^2 F'_-(\gamma), \end{aligned}$$

d'où, d'après (6.4), on a

$$\begin{aligned} M^{-2} (u_-^{(3)}(\gamma) - M^2 u'_-(\gamma)) &= L_-(L_-^2 - M^2) M^{-2} (e^{cL_-} + I) \alpha_2^- + M^{-2} F_-'''(\gamma) \\ &\quad + L_-(L_-^2 - M^2) M^{-2} (e^{cL_-} - I) \alpha_4^- - F'_-(\gamma) \\ &= L_- \frac{l_-}{k_-} M^{-2} (e^{cL_-} + I) \alpha_2^- + M^{-2} F_-'''(\gamma) \\ &\quad + L_- \frac{l_-}{k_-} M^{-2} (e^{cL_-} - I) \alpha_4^- - F'_-(\gamma). \end{aligned}$$

De ce fait, on obtient

$$\begin{aligned} k_- (u_-^{(3)}(\gamma) - M^2 u'_-(\gamma)) - l_- u'_-(\gamma) &= l_- L_- (e^{cL_-} + I) \alpha_2^- + l_- L_- (e^{cL_-} - I) \alpha_4^- \\ &\quad - l_- M (e^{cM} + I) \alpha_1^- - l_- L_- (e^{cL_-} + I) \alpha_2^- \\ &\quad - l_- M (e^{cM} - I) \alpha_3^- - l_- L_- (e^{cL_-} - I) \alpha_4^- \\ &\quad + k_- F_-'''(\gamma) - k_- M^2 F'_-(\gamma) - l_- F'_-(\gamma) \\ &= -l_- M (e^{cM} + I) \alpha_1^- - l_- M (e^{cM} - I) \alpha_3^- \\ &\quad + k_- F_-'''(\gamma) - k_- M^2 F'_-(\gamma) - l_- F'_-(\gamma). \end{aligned}$$

De plus, d'après (6.4), on a

$$\begin{aligned} M^{-1} (u_-''(\gamma) - M^2 u_-(\gamma)) &= (L_-^2 - M^2) M^{-1} (e^{cL_-} - I) \alpha_2^- + (L_-^2 - M^2) M^{-1} (I + e^{cL_-}) \alpha_4^- \\ &= \frac{l_-}{k_-} M^{-1} (e^{cL_-} - I) \alpha_2^- + \frac{l_-}{k_-} M^{-1} (I + e^{cL_-}) \alpha_4^-. \end{aligned}$$

Ainsi, on en déduit l'égalité suivante :

$$k_- (u_-''(\gamma) - M^2 u_-(\gamma)) = l_- (e^{cL_-} - I) \alpha_2^- + l_- (I + e^{cL_-}) \alpha_4^-. \quad (6.25)$$

Notons que, d'après la Remarque 6.4.4 et le Lemme 1.6.11, tous les termes des égalités précédentes sont justifiés. Il s'en suit, d'après (6.24) et (6.25), que le système (CT2) devient

$$\begin{cases} -l_+ M (I + e^{dM}) \alpha_1^+ - l_+ M (I - e^{dM}) \alpha_3^+ = -l_- M (I + e^{cM}) \alpha_1^- + l_- M (I - e^{cM}) \alpha_3^- + \check{S} \\ l_+ (I - e^{dL_+}) \alpha_2^+ + l_+ (I + e^{dL_+}) \alpha_4^+ = -l_- (I - e^{cL_-}) \alpha_2^- + l_- (I + e^{cL_-}) \alpha_4^-, \end{cases}$$

où, $\check{S}$ est donné par (6.21). Par conséquent

$$\begin{cases} -l_+ ((\alpha_1^+ + \alpha_3^+) - e^{dM}(\alpha_3^+ - \alpha_1^+)) = l_- ((\alpha_3^- - \alpha_1^-) - e^{cM}(\alpha_1^- + \alpha_3^-)) + M^{-1} \check{S} \\ l_+ ((\alpha_2^+ + \alpha_4^+) + e^{dL_+}(\alpha_4^+ - \alpha_2^+)) = l_- ((\alpha_4^- - \alpha_2^-) + e^{cL_-}(\alpha_2^- + \alpha_4^-)), \end{cases} \quad (6.26)$$

Cependant, d'après (6.14), (6.15), (6.9) et (6.10), on a

$$\begin{aligned}
 \alpha_1^+ + \alpha_3^+ &= \frac{1}{2r_+}(L_+ + M)U_+^{-1} \left(L_+(I + e^{dL_+})\psi_1 - (I - e^{dL_+})\psi_2 + \tilde{\varphi}_1^+ \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2r_+}(L_+ + M)V_+^{-1} \left(L_+(I - e^{dL_+})\psi_1 - (I + e^{dL_+})\psi_2 + \tilde{\varphi}_3^+ \right), \\
 \alpha_3^+ - \alpha_1^+ &= -\frac{1}{2r_+}(L_+ + M)U_+^{-1} \left(L_+(I + e^{dL_+})\psi_1 - (I - e^{dL_+})\psi_2 + \tilde{\varphi}_1^+ \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2r_+}(L_+ + M)V_+^{-1} \left(L_+(I - e^{dL_+})\psi_1 - (I + e^{dL_+})\psi_2 + \tilde{\varphi}_3^+ \right), \\
 \alpha_1^- + \alpha_3^- &= -\frac{1}{2r_-}(L_- + M)U_-^{-1} \left(L_-(I + e^{cL_-})\psi_1 + (I - e^{cL_-})\psi_2 + \tilde{\varphi}_1^- \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2r_-}(L_- + M)V_-^{-1} \left(L_-(I - e^{cL_-})\psi_1 + (I + e^{cL_-})\psi_2 + \tilde{\varphi}_3^- \right), \\
 \alpha_3^- - \alpha_1^- &= \frac{1}{2r_-}(L_- + M)U_-^{-1} \left(L_-(I + e^{cL_-})\psi_1 + (I - e^{cL_-})\psi_2 + \tilde{\varphi}_1^- \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2r_-}(L_- + M)V_-^{-1} \left(L_-(I - e^{cL_-})\psi_1 + (I + e^{cL_-})\psi_2 + \tilde{\varphi}_3^- \right).
 \end{aligned}$$

Donc, en utilisant (6.18) et (6.19), la première ligne du système (6.26) s'écrit

$$(P_1^+ + P_1^-) \psi_1 + (P_2^- - P_2^+) \psi_2 = S_1, \quad (6.27)$$

où S_1 est donné par (6.20). De la même manière, on a

$$\begin{aligned}
 \alpha_2^+ + \alpha_4^+ &= -\frac{1}{2r_+}(L_+ + M)U_+^{-1} \left(M(I + e^{dM})\psi_1 - (I - e^{dM})\psi_2 + \tilde{\varphi}_2^+ \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2r_+}(L_+ + M)V_+^{-1} \left(M(I - e^{dM})\psi_1 - (I + e^{dM})\psi_2 + \tilde{\varphi}_4^+ \right), \\
 \alpha_4^+ - \alpha_2^+ &= \frac{1}{2r_+}(L_+ + M)U_+^{-1} \left(M(I + e^{dM})\psi_1 - (I - e^{dM})\psi_2 + \tilde{\varphi}_2^+ \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2r_+}(L_+ + M)V_+^{-1} \left(M(I - e^{dM})\psi_1 - (I + e^{dM})\psi_2 + \tilde{\varphi}_4^+ \right), \\
 \alpha_2^- + \alpha_4^- &= \frac{1}{2r_-}(L_- + M)U_-^{-1} \left(M(I + e^{cM})\psi_1 + (I - e^{cM})\psi_2 + \tilde{\varphi}_2^- \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2r_-}(L_- + M)V_-^{-1} \left(M(I - e^{cM})\psi_1 + (I + e^{cM})\psi_2 + \tilde{\varphi}_4^- \right), \\
 \alpha_4^- - \alpha_2^- &= -\frac{1}{2r_-}(L_- + M)U_-^{-1} \left(M(I + e^{cM})\psi_1 + (I - e^{cM})\psi_2 + \tilde{\varphi}_2^- \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2r_-}(L_- + M)V_-^{-1} \left(M(I - e^{cM})\psi_1 + (I + e^{cM})\psi_2 + \tilde{\varphi}_4^- \right).
 \end{aligned}$$

Donc, en utilisant (6.18) et (6.19), la seconde ligne du système (6.26) s'écrit

$$M(P_2^- - P_2^+) \psi_1 + (P_3^+ + P_3^-) \psi_2 = S_2, \quad (6.28)$$

où S_2 est donné par (6.22). Ainsi, grâce à (6.27) et (6.28), (ψ_1, ψ_2) est bien la solution du système (6.17).

Réciproquement, si (6.31) est vérifiée et que le système (6.17) a une unique solution (ψ_1, ψ_2) qui satisfait (6.23), alors en considérant u_- (respectivement u_+) l'unique solution classique du problème (P_-) (respectivement (P_+)), on obtient que u est l'unique solution classique du problème (P). $\square$

6.4.4 Calcul fonctionnel

Grâce au Théorème 6.4.7, pour démontrer le Théorème 6.5.1, il reste à résoudre le système (6.17). Cela sera fait en utilisant le calcul fonctionnel afin de réécrire les opérateurs définis dans (6.6), (6.18) et (6.19) ainsi que d'inverser l'opérateur déterminant du système (6.17).

A cette fin, on rappelle quelques notations classiques. Pour $\theta \in]0, \pi[$, on désigne par $H(S_\theta)$ l'espace des fonctions holomorphes sur S_θ (voir Définition 1.1.28) à valeurs dans $\mathbb{C}$. De plus, on considère le sous-espace de $H(S_\theta)$ suivant :

$$\mathcal{E}_\infty(S_\theta) := \left\{ f \in H(S_\theta) : f = O(|z|^{-s}) \text{ } (|z| \rightarrow +\infty) \text{ pour un } s > 0 \right\}.$$

En d'autres termes, $\mathcal{E}_\infty(S_\theta)$ est l'espace des fonctions holomorphes à décroissance polynomiale en $+\infty$. Soit T un opérateur sectoriel inversible d'angle $\theta_T \in]0, \pi[$. Si $f \in \mathcal{E}_\infty(S_\theta)$, avec $\theta \in]\theta_T, \pi[$, alors, grâce au calcul fonctionnel des opérateurs sectoriels, on peut définir $f(T) \in \mathcal{L}(X)$ (voir Définition 1.3.6 ou M. Haase [23], p.45).

Maintenant, afin d'inverser le déterminant du système (6.17), on introduit les fonctions holomorphes suivantes et on les étudie sur l'axe réel positif.

Soient $r, \delta > 0$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. On pose

$$\begin{cases} u_{\delta,r}(z) &= 1 - e^{-\delta(\sqrt{z+r}+\sqrt{z})} - \frac{1}{r}(\sqrt{z+r}+\sqrt{z})^2 (e^{-\delta\sqrt{z}} - e^{-\delta\sqrt{z+r}}) \\ v_{\delta,r}(z) &= 1 - e^{-\delta(\sqrt{z+r}+\sqrt{z})} + \frac{1}{r}(\sqrt{z+r}+\sqrt{z})^2 (e^{-\delta\sqrt{z}} - e^{-\delta\sqrt{z+r}}), \end{cases}$$

et quand $u_{\delta,r}(z) \neq 0$ et $v_{\delta,r}(z) \neq 0$

$$\begin{cases} f_{\delta,r,1}(z) &= (\sqrt{z+r}+\sqrt{z}) \sqrt{z+r} u_{\delta,r}^{-1}(z) (1 + e^{-\delta\sqrt{z}}) (1 + e^{-\delta\sqrt{z+r}}) \\ &\quad + (\sqrt{z+r}+\sqrt{z}) \sqrt{z+r} v_{\delta,r}^{-1}(z) (1 - e^{-\delta\sqrt{z}}) (1 - e^{-\delta\sqrt{z+r}}) \\ f_{\delta,r,2}(z) &= -(\sqrt{z+r}+\sqrt{z}) u_{\delta,r}^{-1}(z) (1 + e^{-\delta\sqrt{z}}) (1 - e^{-\delta\sqrt{z+r}}) \\ &\quad - (\sqrt{z+r}+\sqrt{z}) v_{\delta,r}^{-1}(z) (1 - e^{-\delta\sqrt{z}}) (1 + e^{-\delta\sqrt{z+r}}) \\ f_{\delta,r,3}(z) &= -(\sqrt{z+r}+\sqrt{z}) u_{\delta,r}^{-1}(z) (1 - e^{-\delta\sqrt{z}}) (1 - e^{-\delta\sqrt{z+r}}) \\ &\quad - (\sqrt{z+r}+\sqrt{z}) v_{\delta,r}^{-1}(z) (1 + e^{-\delta\sqrt{z}}) (1 + e^{-\delta\sqrt{z+r}}). \end{cases} \quad (6.29)$$

Remarque 6.4.8. Soient $r, \delta, x > 0$. D'après le Lemme 3.4.2 de la section 3.4.2 du Chapitre 3, on a $u_{\delta,r}(x) > 0$ et $v_{\delta,r}(x) > 0$. Ainsi, on obtient

$$f_{\delta,r,1}(x) > 0 \quad \text{et} \quad f_{\delta,r,2}(x), f_{\delta,r,3}(x) < 0.$$

De plus, pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, on définit

$$\begin{aligned} g_{\delta,r}(z) = & -\sqrt{z+r} \left((1 - e^{-2\delta(\sqrt{z+r}+\sqrt{z})})^2 - \frac{1}{r^2} (\sqrt{z+r} + \sqrt{z})^4 (e^{-2\delta\sqrt{z}} - e^{-2\delta\sqrt{z+r}})^2 \right) \\ & + \sqrt{z} \left((1 - e^{-\delta(\sqrt{z+r}+\sqrt{z})})^2 + \frac{1}{r} (\sqrt{z+r} + \sqrt{z})^2 (e^{-\delta\sqrt{z}} - e^{-\delta\sqrt{z+r}})^2 \right)^2, \end{aligned}$$

et aussi, quand $u_{\delta,r}(z) \neq 0$, $v_{\delta,r}(z) \neq 0$,

$$h_{\delta,r}(z) = 4(\sqrt{z+r} + \sqrt{z})^2 u_{\delta,r}^{-2}(z) v_{\delta,r}^{-2}(z) g_{\delta,r}(z).$$

Lemme 6.4.9. Soient $r, \delta, x > 0$. On a

$$g_{\delta,r}(x) < 0 \quad \text{et} \quad h_{\delta,r}(x) < 0.$$

Démonstration. On pose

$$s = \sqrt{x} \quad \text{et} \quad t = \sqrt{x+r}.$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} g_{\delta,r}(x) &= -t \left((1 - e^{-2\delta(s+t)})^2 - \frac{1}{r^2} (s+t)^4 (e^{-2\delta s} - e^{-2\delta t})^2 \right) \\ &\quad + s \left((1 - e^{-\delta(s+t)})^2 + \frac{1}{r} (s+t)^2 (e^{-\delta s} - e^{-\delta t})^2 \right)^2 \\ &= -t \left((1 - e^{-\delta(s+t)})^2 (1 + e^{-\delta(s+t)})^2 - \frac{1}{r^2} (s+t)^4 (e^{-\delta s} - e^{-\delta t})^2 (e^{-\delta s} + e^{-\delta t})^2 \right) \\ &\quad + s \left((1 - e^{-\delta(s+t)})^4 + 2 \frac{1}{r} (s+t)^2 (1 - e^{-\delta(s+t)})^2 (e^{-\delta s} - e^{-\delta t})^2 \right) \\ &\quad + s \frac{1}{r^2} (s+t)^4 (e^{-\delta s} - e^{-\delta t})^4 \\ &= \frac{s(s+t)^4}{r^2} (e^{-\delta s} - e^{-\delta t})^4 + \frac{t(s+t)^4}{r^2} (e^{-\delta s} - e^{-\delta t})^2 (e^{-\delta s} + e^{-\delta t})^2 \\ &\quad + s(1 - e^{-\delta(s+t)})^4 - t(1 - e^{-\delta(s+t)})^2 (1 + e^{-\delta(s+t)})^2 \\ &\quad + 2 \frac{s(s+t)^2}{r} (1 - e^{-\delta(s+t)})^2 (e^{-\delta s} - e^{-\delta t})^2 \\ &= \frac{(s+t)^4}{r^2} (e^{-\delta s} - e^{-\delta t})^2 \left(s(e^{-\delta s} - e^{-\delta t})^2 + t(e^{-\delta s} + e^{-\delta t})^2 \right) \\ &\quad + (1 - e^{-\delta(s+t)})^2 (s(1 - e^{-\delta(s+t)})^2 - t(1 + e^{-\delta(s+t)})^2) \\ &\quad + 2 \frac{s(s+t)^2}{r} (1 - e^{-\delta(s+t)})^2 (e^{-\delta s} - e^{-\delta t})^2, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} g_{\delta,r}(x) &= \frac{(s+t)^4}{r^2} (e^{-\delta s} - e^{-\delta t})^2 \left((s+t) (e^{-2\delta s} + e^{-2\delta t}) + 2(t-s)e^{-\delta(s+t)} \right) \\ &\quad + (1 - e^{-\delta(s+t)})^2 \left((s-t)(1 + e^{-2\delta(s+t)}) - 2(s+t)e^{-\delta(s+t)} \right) \\ &\quad + 2\frac{s(s+t)^2}{r} (1 - e^{-\delta(s+t)})^2 (e^{-\delta s} - e^{-\delta t})^2. \end{aligned}$$

De plus, puisque $s = \sqrt{x}$ et $t = \sqrt{x+r}$, on a $r = t^2 - s^2 = (t+s)(t-s)$. Il s'en suit que

$$\frac{(s+t)^2}{r} = \frac{(s+t)}{(t-s)} \quad \text{et} \quad \frac{(s+t)^4}{r^2} = \frac{(s+t)^2}{(t-s)^2}.$$

De ce fait, on obtient

$$\begin{aligned} g_{\delta,r}(x) &= \frac{(s+t)^2}{(t-s)^2} (e^{-\delta s} - e^{-\delta t})^2 \left((s+t) (e^{-2\delta s} + e^{-2\delta t}) + 2(t-s)e^{-\delta(s+t)} \right) \\ &\quad - (1 - e^{-\delta(s+t)})^2 \left((t-s)(1 + e^{-2\delta(s+t)}) + 2(s+t)e^{-\delta(s+t)} \right) \\ &\quad + 2\frac{s(s+t)}{(t-s)} (1 - e^{-\delta(s+t)})^2 (e^{-\delta s} - e^{-\delta t})^2. \end{aligned}$$

Or, d'après le Lemme 3.4.2 de la section 3.4.2 du Chapitre 3, on a

$$1 - e^{-\delta(s+t)} - \frac{1}{r}(s+t)^2 (e^{-\delta s} - e^{-\delta t}) > 0,$$

d'où

$$\left(1 - e^{-\delta(s+t)}\right)^2 > \frac{(s+t)^2}{(t-s)^2} (e^{-\delta s} - e^{-\delta t})^2. \quad (6.30)$$

Ainsi, d'après (6.30), on obtient

$$\begin{aligned} g_{\delta,r}(x) &< \frac{(s+t)^2}{(t-s)^2} (e^{-\delta s} - e^{-\delta t})^2 \left((s+t) (e^{-2\delta s} + e^{-2\delta t}) + 2(t-s)e^{-\delta(s+t)} \right) \\ &\quad - \frac{(s+t)^2}{(t-s)^2} (e^{-\delta s} - e^{-\delta t})^2 \left((t-s)(1 + e^{-2\delta(s+t)}) + 2(s+t)e^{-\delta(s+t)} \right) \\ &\quad + 2\frac{s(s+t)}{(t-s)} (1 - e^{-\delta(s+t)})^2 (e^{-\delta s} - e^{-\delta t})^2 \\ &< (s+t) (e^{-\delta s} - e^{-\delta t})^2 \tilde{g}_{\delta,r}(x), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{\delta,r}(x) &= \frac{(s+t)}{(t-s)^2} \left((s+t) (e^{-2\delta s} + e^{-2\delta t}) + 2(t-s)e^{-\delta(s+t)} \right) \\ &\quad - \frac{(s+t)}{(t-s)^2} \left((t-s)(1 + e^{-2\delta(s+t)}) + 2(s+t)e^{-\delta(s+t)} \right) \\ &\quad + 2\frac{s}{(t-s)} (1 - e^{-\delta(s+t)})^2. \end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}
 \tilde{g}_{\delta,r}(x) &= \frac{(s+t)^2}{(t-s)^2} (e^{-2\delta s} + e^{-2\delta t}) - 2 \frac{(s+t)^2}{(t-s)^2} e^{-\delta(s+t)} \\
 &\quad - \frac{(s+t)}{(t-s)} (1 + e^{-2\delta(s+t)}) + 2 \frac{(s+t)}{(t-s)} e^{-\delta(s+t)} + 2 \frac{s}{(t-s)} (1 - e^{-\delta(s+t)})^2 \\
 &= \frac{(s+t)^2}{(t-s)^2} (e^{-2\delta s} - 2e^{-\delta(s+t)} + e^{-2\delta t}) - \frac{(s+t)}{(t-s)} (1 - 2e^{-\delta(s+t)} + e^{-2\delta(s+t)}) \\
 &\quad + 2 \frac{s}{(t-s)} (1 - e^{-\delta(s+t)})^2 \\
 &= \frac{(s+t)^2}{(t-s)^2} (e^{-\delta s} - e^{-\delta t})^2 - \frac{(s+t)}{(t-s)} (1 - e^{-\delta(s+t)})^2 + 2 \frac{s}{(t-s)} (1 - e^{-\delta(s+t)})^2 \\
 &= \frac{(s+t)^2}{(t-s)^2} (e^{-\delta s} - e^{-\delta t})^2 - (1 - e^{-\delta(s+t)})^2.
 \end{aligned}$$

Donc, d'après (6.30), on obtient que $\tilde{g}_{\delta,r}(x) < 0$. Finalement, on a

$$g_{\delta,r}(x) < (s+t) (e^{-\delta s} - e^{-\delta t})^2 \tilde{g}_{\delta,r}(x) < 0,$$

on en déduit alors que $h_{\delta,r}(x) < 0$. □

6.5 Le Théorème principal

Dans cette section, on s'intéresse à la résolution du problème de transmission (P). On montre ici l'existence et l'unicité d'une solution classique, voir (6.2), du problème (P).

Théorème 6.5.1. *Soient $f_- \in L^p(a, \gamma; X)$ et $f_+ \in L^p(\gamma, b; X)$. On suppose que (H_1) , (H_2) , (H_3) et (H_4) sont vérifiées. Alors, il existe une unique solution classique u au problème de transmission (P) si et seulement si*

$$\varphi_1^+, \varphi_1^- \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2p}, p} \quad \text{et} \quad \varphi_2^+, \varphi_2^- \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p}. \quad (6.31)$$

Remarque 6.5.2. On peut généraliser ce théorème en considérant un problème de transmission entre n habitats juxtaposés, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Il suffit d'utiliser le Théorème 6.5.1 sur les deux premiers habitats puis de l'appliquer au problème de transmission composé du second et du troisième habitat afin de résoudre le problème pour $n = 3$. Enfin, par récurrence, on obtient le résultat.

Si (P) a une unique solution classique, alors d'après le Théorème 6.4.7, (6.31) est satisfait. Réciproquement, si (6.31) est satisfait, grâce au Théorème 6.4.7, il suffit de montrer que le système (6.17) a une unique solution tel que (6.23) soit vérifié. La démonstration est divisée en trois parties. Tout d'abord, on explicite le déterminant de la matrice associée au système (6.17). Ensuite, on montre l'unicité de la solution, pour cela, on inverse le déterminant à l'aide du calcul fonctionnel. Finalement, on montre que ψ_1 et ψ_2 ont bien la régularité attendue.

6.5.1 Calcul du déterminant

On doit maintenant expliciter le déterminant du système (6.17) que l'on rappelle ici

$$\begin{cases} (P_1^+ + P_1^-) \psi_1 + (P_2^- - P_2^+) \psi_2 = S_1 \\ M(P_2^- - P_2^+) \psi_1 + (P_3^+ + P_3^-) \psi_2 = S_2. \end{cases}$$

On écrit le système précédent sous forme matricielle $\Lambda \Psi = S$, où

$$\Lambda = \begin{pmatrix} P_1^+ + P_1^- & P_2^- - P_2^+ \\ M(P_2^- - P_2^+) & P_3^+ + P_3^- \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix}.$$

Pour résoudre le système (6.17), on étudie le déterminant

$$\det(\Lambda) := (P_1^+ + P_1^-) (P_3^+ + P_3^-) - M (P_2^- - P_2^+)^2,$$

de la matrice Λ . On le développe afin d'obtenir

$$\det(\Lambda) = D_1^+ + D_1^- + D_2, \tag{6.32}$$

où

$$D_1^+ := P_1^+ P_3^+ - M (P_2^+)^2, \quad D_1^- := P_1^- P_3^- - M (P_2^-)^2,$$

et

$$D_2 := P_1^+ P_3^- + P_1^- P_3^+ + 2M P_2^+ P_2^-.$$

En utilisant la Remarque 6.3.1, on a

$$\begin{aligned} D(\det(\Lambda)) &= D(D_1^+ + D_1^- + D_2) \\ &= D(M^3), \end{aligned}$$

qui justifie l'égalité dans (6.32). Dans la suite, on précise les termes D_1^+ et D_1^- .

Lemme 6.5.3. *On a*

$$1. \ D_1^+ = 4k_+^2 (L_+ + M)^2 U_+^{-2} V_+^{-2} D^+, \text{ avec}$$

$$\begin{aligned} D^+ &= L_+ \left((I - e^{2d(L_++M)})^2 - \frac{1}{r_+^2} (L_+ + M)^4 (e^{2dM} - e^{2dL_+})^2 \right) \\ &\quad - M \left((I - e^{d(L_++M)})^2 + \frac{1}{r_+^2} (L_+ + M)^2 (e^{dM} - e^{dL_+})^2 \right)^2. \end{aligned}$$

$$2. \ D_1^- = 4k_-^2 (L_- + M)^2 U_-^{-2} V_-^{-2} D^-, \text{ avec}$$

$$\begin{aligned} D^- &= L_- \left((I - e^{2c(L_-+M)})^2 - \frac{1}{r_-^2} (L_- + M)^4 (e^{2cM} - e^{2cL_-})^2 \right) \\ &\quad - M \left((I - e^{c(L_-+M)})^2 + \frac{1}{r_-^2} (L_- + M)^2 (e^{cM} - e^{cL_-})^2 \right)^2. \end{aligned}$$

Démonstration.

1. On a

$$P_1^+ P_3^+ = 4k_+^2 (L_+ + M)^2 L_+ U_+^{-2} V_+^{-2} D'_+,$$

où

$$\begin{aligned} 4D'_+ &= (U_+^2 + V_+^2) (I - e^{2dM}) (I - e^{2dL_+}) \\ &\quad + 2U_+ V_+ \left[(I - e^{d(L_++M)})^2 + (e^{dM} - e^{dL_+})^2 \right] \\ &= (U_+^2 + V_+^2) \left[(I + e^{d(L_++M)})^2 - (e^{dM} + e^{dL_+})^2 \right] \\ &\quad + 2U_+ V_+ \left[(I + e^{d(L_++M)})^2 + (e^{dM} + e^{dL_+})^2 \right] \\ &= (U_+ + V_+)^2 (I + e^{d(L_++M)})^2 - (U_+ - V_+)^2 (e^{dM} + e^{dL_+})^2. \end{aligned}$$

De plus

$$U_+ + V_+ = 2(I - e^{d(L_++M)}) \quad \text{et} \quad U_+ - V_+ = -\frac{2}{r_+} (L_+ + M)^2 (e^{dM} - e^{dL_+}). \quad (6.33)$$

Ainsi

$$D'_+ = (I - e^{d(L_++M)})^2 (I + e^{d(L_++M)})^2 - \frac{1}{r_+^2} (L_+ + M)^4 (e^{dM} - e^{dL_+})^2 (e^{dM} + e^{dL_+})^2.$$

Or, on a

$$(P_2^+)^2 = 4k_+^2 (L_+ + M)^2 M U_+^{-2} V_+^{-2} D''_+,$$

où

$$\begin{aligned} 4D''_+ &= [V_+ (I + e^{dM}) (I - e^{dL_+}) + U_+ (I - e^{dM}) (I + e^{dL_+})]^2 \\ &= V_+^2 (I + e^{dM})^2 (I - e^{dL_+})^2 + U_+^2 (I - e^{dM})^2 (I + e^{dL_+})^2 \\ &\quad + 2U_+ V_+ (I - e^{2dM}) (I - e^{2dL_+}) \\ &= V_+^2 [(I - e^{d(L_++M)}) + (e^{dM} - e^{dL_+})]^2 \\ &\quad + U_+^2 [(I - e^{d(L_++M)}) - (e^{dM} - e^{dL_+})]^2 \\ &\quad + 2U_+ V_+ [(I + e^{d(L_++M)})^2 - (e^{dM} + e^{dL_+})^2] \\ &= V_+^2 [(I - e^{d(L_++M)})^2 + 2(I - e^{d(L_++M)}) (e^{dM} - e^{dL_+}) + (e^{dM} - e^{dL_+})^2] \\ &\quad + U_+^2 [(I - e^{d(L_++M)})^2 - 2(I - e^{d(L_++M)}) (e^{dM} - e^{dL_+}) + (e^{dM} - e^{dL_+})^2] \\ &\quad + 2U_+ V_+ [(I + e^{d(L_++M)})^2 - (e^{dM} + e^{dL_+})^2], \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 4D_+'' &= (U_+^2 + V_+^2) \left[(I - e^{d(L_++M)})^2 + (e^{dM} - e^{dL_+})^2 \right] \\
 &\quad - 2(U_+^2 - V_+^2) (I - e^{d(L_++M)}) (e^{dM} - e^{dL_+}) \\
 &\quad + 2U_+V_+ \left[(I + e^{d(L_++M)})^2 - (e^{dM} + e^{dL_+})^2 \right] \\
 &= (U_+^2 + V_+^2) \left[(I - e^{d(L_++M)})^2 + (e^{dM} - e^{dL_+})^2 \right] \\
 &\quad - 2(U_+^2 - V_+^2) (I - e^{d(L_++M)}) (e^{dM} - e^{dL_+}) \\
 &\quad + 2U_+V_+ \left[(I - e^{d(L_++M)})^2 - (e^{dM} - e^{dL_+})^2 \right] \\
 &= (U_+ + V_+)^2 (I - e^{d(L_++M)})^2 + (U_+ - V_+)^2 (e^{dM} - e^{dL_+})^2 \\
 &\quad - 2(U_+^2 - V_+^2) (I - e^{d(L_++M)}) (e^{dM} - e^{dL_+}).
 \end{aligned}$$

En utilisant encore (6.33), on obtient

$$\begin{aligned}
 D_+'' &= (I - e^{d(L_++M)})^4 + \frac{1}{r_+^2} (L_+ + M)^4 (e^{dM} - e^{dL_+})^4 \\
 &\quad + \frac{2}{r_+} (L_+ + M)^2 (I - e^{d(L_++M)})^2 (e^{dM} - e^{dL_+})^2 \\
 &= \left((I - e^{d(L_++M)})^2 + \frac{1}{r_+} (L_+ + M)^2 (e^{dM} - e^{dL_+})^2 \right)^2.
 \end{aligned}$$

Finalement, puisque l'on a

$$D_1^+ = P_1^+ P_3^+ - M (P_2^+)^2,$$

on obtient

$$D_1^+ = 4k_+^2 (L_+ + M)^2 U_+^{-2} V_+^{-2} D^+,$$

où $D^+ = L_+ D'_+ - M D_+''$.

2. Ce résultat est obtenu de façon similaire en remplaçant respectivement d , k_+ et r_+ par c , k_- et r_- dans la démonstration précédente.

□

6.5.2 Inversion du déterminant

Dans cette section, on montre que le déterminant de la matrice associée au système (6.17) est inversible avec inverse borné en utilisant le calcul fonctionnel. D'après l'écriture de D_1^+ , D_1^- , donnée dans le Lemme 6.5.3 et la définition de D_2 , on obtient :

$$D_1^+ = g_1^+(-A), \quad D_1^- = g_1^-(-A) \quad \text{et} \quad D_2 = g_2(-A),$$

où on a posé, pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$

$$\begin{cases} g_1^+(z) &= 4k_+^2(\sqrt{z+r_+} + \sqrt{z})^2 u_{d,r_+}^{-2}(z) v_{d,r_+}^{-2}(z) g_{d,r_+}(z) \\ g_1^-(z) &= 4k_-^2(\sqrt{z+r_-} + \sqrt{z})^2 u_{c,r_-}^{-2}(z) v_{c,r_-}^{-2}(z) g_{c,r_-}(z) \\ g_2(z) &= k_+ f_1^+(z) k_- f_3^-(z) + k_- f_1^-(z) k_+ f_3^+(z) - 2\sqrt{z} k_+ f_2^+(z) k_- f_2^-(z), \end{cases}$$

($u_{\delta,r}$, $v_{\delta,r}$, $g_{\delta,r}$, f_i^+ et f_i^- ont été définies dans la section 6.4.4). Donc

$$\det(\Lambda) = D_1^+ + D_1^- + D_2 = f(-A), \quad (6.34)$$

avec $f = g_1^+ + g_1^- + g_2$. Notons que $f \in H(S_\theta)$, pour $\theta \in]0, \pi[$, de plus d'après la Remarque 6.4.8 et le Lemme 6.4.9, pour $x > 0$, on a

$$f(x) = g_1^+(x) + g_1^-(x) + g_2(x) < 0. \quad (6.35)$$

Soient C_1, C_2 deux opérateurs linéaires dans X . On écrit $C_1 \sim C_2$ pour signifier que $C_1 = C_2 + \Sigma$, où Σ est une somme finie de termes de type $kL_+^l L_-^m M^n e^{\alpha L_+} e^{\beta L_-} e^{\delta M}$, où $k \in \mathbb{R}$; $l, m, n \in \mathbb{N}$; $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}_+$ avec $\alpha + \beta + \delta \neq 0$. Notons que Σ est un terme régulier dans le sens :

$$\Sigma \in \mathcal{L}(X) \quad \text{avec} \quad \Sigma(X) \subset D(M^\infty) := \bigcap_{k \geq 0} D(M^k).$$

Puisque $U_\pm \sim I, V_\pm \sim I$, alors en posant $W = U_- U_+ V_- V_+ \sim I$, on obtient que

$$\begin{cases} WP_1^+ \sim 2k_+(L_+ + M)L_+, & WP_1^- \sim 2k_-(L_- + M)L_-, \\ WP_2^+ \sim 2k_+(L_+ + M), & WP_2^- \sim 2k_-(L_- + M), \\ WP_3^+ \sim 2k_+(L_+ + M), & WP_3^- \sim 2k_-(L_- + M). \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} W^2 \det(\Lambda) &= \left(WP_1^+ WP_3^+ - M (WP_2^+)^2 \right) + \left(WP_1^- WP_3^- - M (WP_2^-)^2 \right) \\ &\quad + \left(WP_1^+ WP_3^- + WP_1^- WP_3^+ + 2M WP_2^- WP_2^+ \right) \\ &\sim 4k_+^2 (L_+ + M)^2 (L_+ - M) + 4k_-^2 (L_- + M)^2 (L_- - M) \\ &\quad + 4k_+ k_- (L_+ + M)(L_- + M)(L_+ + L_- + 2M). \end{aligned}$$

Maintenant, grâce à (6.5), on a

$$\begin{aligned} W^2 \det(\Lambda) &\sim 4k_+^2 r_+ (L_+ + M) + 4k_-^2 r_- (L_- + M) \\ &\quad + 4k_+ k_- (L_+ + M)(L_- + M)(L_+ + L_- + 2M). \end{aligned}$$

On pose

$$B = 4(L_+ + M) \left(k_+^2 r_+ + k_-^2 r_- (L_- + M)(L_+ + M)^{-1} + k_+ k_- (L_- + M)(L_+ + L_- + 2M) \right).$$

Ainsi, on obtient

$$\det(\Lambda) = W^{-2} \left(B + \sum_{j \in J} k_j L_+^{l_j} L_-^{m_j} M^{n_j} e^{\alpha_j L_+} e^{\beta_j L_-} e^{\delta_j M} \right), \quad (6.36)$$

où J est un ensemble fini et pour tout $j \in J$:

$$k_j \in \mathbb{R}; \quad l_j, m_j, n_j \in \mathbb{N}, \quad \alpha_j, \beta_j, \delta_j \in \mathbb{R}_+ \quad \text{avec} \quad \alpha_j + \beta_j + \delta_j \neq 0.$$

Lemme 6.5.4. *L'opérateur B , qui est défini plus haut, est inversible avec inverse borné.*

Démonstration. D'après (H_3) on a $-L_+, -L_-, -M \in \text{BIP}(X, \theta/2)$ donc, d'après J. Prüss et H. Sohr [38], Theorem 5, p.443, on a

$$-(L_- + M), -(L_+ + M), -(L_+ + M + L_- + M) \in \text{BIP}(X, \theta'), \quad \text{pour } \theta' \in [\theta/2, \pi/2[.$$

Il s'en suit, d'après J. Prüss et H. Sohr [38], property (2.7), p. 433, que

$$-(L_+ + M)^{-1} \in \text{BIP}(X, \theta'),$$

et puisque $0 \in \rho(L_- + M)$, d'après J. Prüss et H. Sohr [38], corollary 3, p. 444, on en déduit que

$$\frac{k_-^2 r_-}{k_+^2 r_+} (L_- + M)(L_+ + M)^{-1} \in \text{BIP}(X, 2\theta').$$

De plus, d'après J. Prüss et H. Sohr [38], Theorem 3, p. 437, on a

$$B_1 := k_+^2 r_+ + k_-^2 r_- (L_- + M)(L_+ + M)^{-1} \in \text{BIP}(X, 2\theta'),$$

qui est inversible avec inverse borné. Finalement, d'après J. Prüss et H. Sohr [38], corollary 3, p. 444, on obtient que

$$B_2 := k_+ k_- (L_- + M)(L_+ + L_- + 2M) \in \text{BIP}(X, 2\theta').$$

Ainsi, $B_1 + B_2 \in \text{BIP}(X, \theta'')$, pour $\theta'' \in [2\theta', \pi[$. De plus, puisque $0 \in \rho(B_1)$, on en déduit, d'après la remarque à la fin de la page 445 dans J. Prüss et H. Sohr [38], que $0 \in \rho(B_1 + B_2)$. Puisque $4(L_+ + M)$ est inversible, on en déduit que $B = 4(L_+ + M)(B_1 + B_2)$ est inversible avec inverse borné. $\square$

D'après (6.36) et le Lemme 6.5.4, on en déduit que

$$\det(\Lambda) = W^{-2} B F, \tag{6.37}$$

avec

$$F = I + \sum_{j \in J} k_j B^{-1} L_+^{l_j} L_-^{m_j} M^{n_j} e^{\alpha_j L_+} e^{\beta_j L_-} e^{\delta_j M}. \tag{6.38}$$

Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, on pose

$$\tilde{b}(z) = k_+^2 r_+ + k_-^2 r_- \frac{(\sqrt{z+r_-} + \sqrt{z})}{(\sqrt{z+r_+} + \sqrt{z})} + k_+ k_- (\sqrt{z+r_-} + \sqrt{z})(\sqrt{z+r_+} + \sqrt{z+r_-} + 2\sqrt{z}),$$

(notons que, pour $x > 0$, $\tilde{b}(x) > 0$) et

$$\tilde{f}(z) = 1 + \sum_{j \in J} k_j \tilde{b}(z)^{-1} \left(-\sqrt{z+r_+}\right)^{l_j} \left(-\sqrt{z+r_-}\right)^{m_j} \left(-\sqrt{z}\right)^{n_j} e^{-\alpha_j \sqrt{z+r_+}} e^{-\beta_j \sqrt{z+r_-}} e^{-\delta_j \sqrt{z}}.$$

Ainsi, $B = 4(L_+ + M)\tilde{b}(-A)$ et $F = \tilde{f}(-A)$; de ce fait, d'après (6.34) et (6.37), on a

$$f(-A) = \det(\Lambda) = W^{-2} B \tilde{f}(-A).$$

Par construction, le lien entre f et $\tilde{f}$ est

$$f(z) = -4u_{d,r_+}^{-2}(z)v_{d,r_+}^{-2}(z)u_{c,r_-}^{-2}(z)v_{c,r_-}^{-2}(z)(\sqrt{z+r_+} + \sqrt{z})\tilde{b}(z)\tilde{f}(z). \tag{6.39}$$

Proposition 6.5.5. *L'opérateur $F \in \mathcal{L}(X)$ défini plus haut est inversible avec inverse borné.*

Démonstration. Notons que $f, \tilde{f} \in H(S_\theta)$, pour un $\theta \in]0, \pi[$ donné. De plus, puisque pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, on a

$$b_j(z) = k_j \tilde{b}^{-1}(z) \left(-\sqrt{z+r_+}\right)^{l_j} \left(-\sqrt{z+r_-}\right)^{m_j} \left(-\sqrt{z}\right)^{n_j}, \quad \text{pour tout } j \in J,$$

qui sont des fonctions polynomiales, on obtient que $1 - \tilde{f} \in \mathcal{E}_\infty(S_\theta)$.

D'après (6.35), on sait que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$ et puisque $u_{d,r_+}, u_{c,r_-}, v_{d,r_+}, v_{c,r_-}, \tilde{b} > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit, d'après (6.39), que $\tilde{f}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc, en appliquant la Proposition 2.4.4 avec $P = -A$, on en déduit que $F = \tilde{f}(-A)$ est inversible avec inverse borné. $\square$

Finalement, on obtient le résultat suivant

Proposition 6.5.6. *L'opérateur $\det(\Lambda)$ est inversible avec inverse borné.*

Démonstration. D'après (6.37), le Lemme 6.5.4 et la Proposition 6.5.5, on a $\det(\Lambda) = W^{-2}BF$, qui est inversible avec inverse borné. $\square$

6.5.3 Régularité de la solution

D'après le Théorème 6.4.7, il reste à montrer que le système (6.17) a une unique solution (ψ_1, ψ_2) satisfaisant (6.23). L'unicité de la solution (ψ_1, ψ_2) est fournie par la Proposition 6.5.6 et on a

$$\begin{cases} \psi_1 &= (P_3^+ + P_3^-) [\det(\Lambda)]^{-1} S_1 - (P_2^- - P_2^+) [\det(\Lambda)]^{-1} S_2 \\ \psi_2 &= -M (P_2^- - P_2^+) [\det(\Lambda)]^{-1} S_1 + (P_1^+ + P_1^-) [\det(\Lambda)]^{-1} S_2. \end{cases} \quad (6.40)$$

afin d'obtenir (6.23), on doit tout d'abord étudier $[\det(\Lambda)]^{-1}$.

Lemme 6.5.7. *Il existe $R \in \mathcal{L}(X)$ tel que*

$$R(X) \subset D(M), \quad [\det(\Lambda)]^{-1} = N^{-1} + N^{-1}R,$$

où $N = 4k_+k_-(L_- + M)(L_+ + M)(L_+ + L_- + 2M)$.

Démonstration. D'après (6.37), on a

$$\begin{aligned} \det(\Lambda) &= W^{-2}BF \\ &= NU_-^{-2}U_+^{-2}V_-^{-2}V_+^{-2}BN^{-1}F. \end{aligned}$$

En utilisant (6.6), (6.38) et le Lemme 2.4.1 de la section 2.4 du Chapitre 2, on obtient que

$$F \sim I, \quad U_+^{-1} \sim I, \quad U_-^{-1} \sim I, \quad V_+^{-1} \sim I \quad \text{et} \quad V_-^{-1} \sim I.$$

Donc, on a

$$\det(\Lambda) = NBN^{-1}(I + \Sigma_1),$$

où $\Sigma_1 \in \mathcal{L}(X)$ et $\Sigma_1(X) \subset D(M^\infty)$. Or

$$\begin{aligned} BN^{-1} &= \left(4k_+^2 r_+ \left(I + \frac{k_-^2 r_-}{k_+^2 r_+} (L_- + M)(L_+ + M) \right) M^{-3} \right) N^{-1} \\ &\quad + 4k_+ k_- (L_- + M)(L_+ + M)(L_+ + L_- + 2M) N^{-1} \\ &= I + \Sigma_2, \end{aligned}$$

avec $\Sigma_2 \in \mathcal{L}(X)$ et $\Sigma_2(X) \subset D(M)$. Finalement

$$\det(\Lambda) = N(I + \Sigma_3),$$

où $\Sigma_3 \in \mathcal{L}(X)$ et $\Sigma_3(X) \subset D(M)$. Par conséquent, d'après le Lemme 2.4.1 de la section 2.4 du Chapitre 2, on a

$$\begin{aligned} [\det(\Lambda)]^{-1} &= N^{-1} (I + \Sigma_3)^{-1} \\ &= N^{-1} (I + R), \end{aligned}$$

avec $R \in \mathcal{L}(X)$ et $R(X) \subset \Sigma_3(X) \subset D(M)$. □

D'après (6.20) et (6.22), on en déduit que

$$\begin{cases} S_1 &= -k_+(L_+ + M) (\tilde{\varphi}_1^+ + \tilde{\varphi}_3^+) - k_-(L_- + M) (\tilde{\varphi}_1^- + \tilde{\varphi}_3^-) + \tilde{R}_1 \\ S_2 &= k_+(L_+ + M) (\tilde{\varphi}_2^+ + \tilde{\varphi}_4^+) - k_-(L_- + M) (\tilde{\varphi}_2^- + \tilde{\varphi}_4^-) + \tilde{R}_2, \end{cases}$$

où $\tilde{R}_1 \in D(M)$ et $\tilde{R}_2 \in D(M^\infty)$. En utilisant (6.10), (6.15), (6.31), (2.5), la Remarque 6.4.4 et la Remarque 6.4.6, on obtient que

$$\tilde{\varphi}_1^+, \tilde{\varphi}_1^-, \tilde{\varphi}_2^+, \tilde{\varphi}_2^-, \tilde{\varphi}_3^+, \tilde{\varphi}_3^-, \tilde{\varphi}_4^+, \tilde{\varphi}_4^- \in (D(M), X)_{2+\frac{1}{p}, p}. \quad (6.41)$$

Il s'en suit que $S_1, S_2 \in (D(M), X)_{1+\frac{1}{p}, p}$ et par conséquent

$$\begin{cases} [\det(\Lambda)]^{-1} S_1 &= N^{-1} (I + R) S_1 \in (D(M), X)_{4+\frac{1}{p}, p} \\ [\det(\Lambda)]^{-1} S_2 &= N^{-1} (I + R) S_2 \in (D(M), X)_{4+\frac{1}{p}, p}. \end{cases} \quad (6.42)$$

De plus, d'après (6.40), on a

$$\begin{cases} \psi_1 &= 2(k_+(L_+ + M) + k_-(L_- + M)) [\det(\Lambda)]^{-1} S_1 \\ &\quad + 2(k_+(L_+ + M) - k_-(L_- + M)) [\det(\Lambda)]^{-1} S_2 + \tilde{S}_1 \\ \psi_2 &= 2(k_+(L_+ + M) - k_-(L_- + M)) [\det(\Lambda)]^{-1} S_1 \\ &\quad + 2(k_+(L_+ + M)L_+ + k_-(L_- + M)L_-) [\det(\Lambda)]^{-1} S_2 + \tilde{S}_2, \end{cases} \quad (6.43)$$

où $\tilde{S}_1, \tilde{S}_2 \in D(M^\infty)$. Finalement, (6.42), (6.43) et (2.5) donnent

$$\psi_1 \in (D(M), X)_{3+\frac{1}{p}, p} = (D(A), X)_{1+\frac{1}{2p}, p} \quad \text{et} \quad \psi_2 \in (D(M), X)_{2+\frac{1}{p}, p} = (D(A), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}, p}.$$

6.6 Application

Du Théorème 6.5.1, on déduit le résultat suivant pour le problème (P_{edp}) avec $A := A_0$, défini par (6.1).

Corollaire 6.6.1. *On suppose que ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^{n-1}$ où $n \geq 2$ avec un bord de classe C^2 . Soient $f_+ \in L^p(\Omega_+)$ et $f_- \in L^p(\Omega_-)$ avec $p \in]1, +\infty[$ et $p > n$ ainsi que $k_+, k_-, l_+, l_- \in \mathbb{R}_+^*$. Alors il existe une unique solution u de (P_{pde}) , telle que*

$$u_- \in W^{4,p}(\Omega_-) \quad \text{et} \quad u_+ \in W^{4,p}(\Omega_+),$$

si et seulement si

$$\varphi_1^\pm, \varphi_2^\pm \in W^{2,p}(\omega) \cap W_0^{1,p}(\omega), \quad \Delta\varphi_1^\pm \in W^{2-\frac{1}{p},p}(\omega) \cap W_0^{1,p}(\omega) \quad \text{et} \quad \Delta\varphi_2^\pm \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\omega) \cap W_0^{1,p}(\omega).$$

Démonstration. Soit $(x, y) \in]a, b[\times \omega$. On pose $X := L^p(\omega)$. En utilisant A_0 l'opérateur linéaire défini par (6.1), on obtient que le problème (P_{edp}) devient le problème (P). D'après J. L. Rubio de Francia [40] (Proposition 3, p. 207), X satisfait (H_1) et d'après D. Gilbarg et N. Trudinger [20] (Theorem 9.15 et Lemma 9.17), A_0 satisfait (H_2) . De plus, (H_3) est vérifiée d'après J. Prüss et H. Sohr [39] (Theorem C, p. 166-167). De plus, puisque A_0 est le laplacien, d'après M. Haase [23], (Chapter 8, section 3, p. 232), (H_4) est vérifiée. Finalement, toutes les hypothèses du Théorème 6.5.1 sont satisfaites. Il s'en suit qu'il existe une unique solution classique au problème (P) si et seulement si (6.31) est vérifiée.

A présent, il reste à montrer que si $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ vérifient (6.31), alors la solution classique $u_\pm$ vérifie $u_\pm \in W^{4,p}(\Omega_\pm)$. Dans cet optique, on va expliciter les espaces d'interpolations qui apparaissent dans (6.31). On a

$$(D(A_0), X)_{\frac{1}{2p}, p} = \left(W^{2,p}(\omega) \cap W_0^{1,p}(\omega), L^p(\omega) \right)_{\frac{1}{2p}, p},$$

et d'après P. Grisvard [22] (p. 683, proposizione 3 et p. 681, 1.10) et H. Triebel [43] (p. 317, Theorem 1), puisque $2 - \frac{1}{p} > 1$ n'est jamais un entier, on a

$$\left(W^{2,p}(\omega), L^p(\omega) \right)_{\frac{1}{2p}, p} = W^{2-\frac{1}{p},p}(\omega). \quad (6.44)$$

On pose $\nu_1 := 2 - \frac{1}{p} - \frac{n-1}{p} = 2 - \frac{n}{p}$. Puisque $p > \frac{n}{2}$, on a $\nu_1 > 0$. D'après le Théorème d'injection de Sobolev (voir H. Triebel [43], section 4.6.1, p. 327-328), on a :

$$W^{2-\frac{1}{p},p}(\omega) \hookrightarrow C(\overline{\omega}).$$

Ainsi, les traces des éléments de l'espace décrit dans (6.44) sont bien définies. D'après P. Grisvard [21] (Proposition 5.9, p. 334) et H. Triebel [43] (section 4.3.3, Theorem, p. 321), on en déduit que

$$(D(A_0), X)_{\frac{1}{2p}, p} = \left\{ \psi \in W^{2-\frac{1}{p},p}(\omega) : \psi = 0 \text{ sur } \partial\omega \right\},$$

et

$$\begin{aligned} (D(A_0), X)_{1+\frac{1}{2p}, p} &= \left\{ \psi \in D(A_0) : A_0\psi \in W^{2-\frac{1}{p},p}(\omega) \text{ et } \Delta\psi = 0 \text{ sur } \partial\omega \right\} \\ &= \left\{ \psi \in W^{2,p}(\omega) : \Delta\psi \in W^{2-\frac{1}{p},p}(\omega) \text{ et } \psi = \Delta\psi = 0 \text{ sur } \partial\omega \right\}. \end{aligned}$$

De la même façon, on obtient

$$(D(A_0), X)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}, p} = \left(W^{2,p}(\omega) \cap W_0^{1,p}(\omega), L^p(\omega) \right)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}, p}. \quad (6.45)$$

Ainsi, puisque $1 - \frac{1}{p}$ n'est jamais un entier, d'après P. Grisvard [22] (Teorema 7, p. 681), on a

$$\left(W^{2,p}(\omega), L^p(\omega) \right)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}, p} = B_{p,p}^{2(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2p})}(\omega) = B_{p,p}^{1 - \frac{1}{p}}(\omega) = W^{1 - \frac{1}{p}, p}(\omega).$$

On pose $\nu_2 := 1 - \frac{1}{p} - \frac{n-1}{p} = 1 - \frac{n}{p}$. Puisque $p > n$, on a $\nu_2 > 0$. D'après le Théorème d'injection de Sobolev (voir H. Triebel [43], section 4.6.1, p. 327-328), on a :

$$W^{1 - \frac{1}{p}, p}(\omega) \hookrightarrow C(\bar{\omega}).$$

Ainsi, les traces des éléments de l'espace décrit dans (6.45) sont bien définies. D'après P. Grisvard [21] (Proposition 5.9, p. 334) et H. Triebel [43] (section 4.3.3, Theorem, p. 321), on en déduit que

$$(D(A_0), X)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}, p} = \left\{ \psi \in W^{1 - \frac{1}{p}, p}(\omega) : \psi = 0 \text{ sur } \partial\omega \right\},$$

et

$$\begin{aligned} (D(A_0), X)_{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2p}, p} &= \left\{ \psi \in D(A_0) : A_0\psi \in (D(A_0), X)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}, p} \right\} \\ &= \left\{ \psi \in W^{2,p}(\omega) : \Delta\psi \in W^{1 - \frac{1}{p}, p}(\omega) \text{ et } \psi = \Delta\psi = 0 \text{ sur } \partial\omega \right\}. \end{aligned}$$

On peut appliquer sur $u(x, \cdot)$, $x \in]a, b[$, grâce au théorème de prolongement de Sobolev sur $\mathbb{R}^{n-1}$, un opérateur de prolongement qui injecte continûment $L^p(\omega)$ dans $L^p(\mathbb{R}^{n-1})$ et qui injecte continûment $W^{2,p}(\omega)$ dans $W^{2,p}(\mathbb{R}^{n-1})$. Ainsi, d'après le Théorème de Mihlin (voir Théorème 1.2.20 et Corollaire 1.2.21 du Chapitre 1 ou l'article [31]), on en déduit que

$$u_- \in W^{2,p}(]a, \gamma[\times \omega) = W^{2,p}(\Omega_-) \quad \text{et} \quad u_+ \in W^{2,p}(] \gamma, b[\times \omega) = W^{2,p}(\Omega_+).$$

En réitérant les mêmes arguments aux autres régularités, on obtient que $u_- \in W^{4,p}(\Omega_-)$ et $u_+ \in W^{4,p}(\Omega_+)$. $\square$

En utilisant le résultat du Théorème 6.5.1. On peut aussi obtenir un résultat anisotropique en considérant $f_- \in L^p(a, \gamma; L^q(\omega))$ et $f_+ \in L^p(\gamma, b; L^q(\omega))$ avec $p, q \in]1, +\infty[$.

Bibliographie

- [1] W. ARENDT, C. J. K. BATTY, M. HIEBER & F. NEUBRANDER, *Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems*, second Edition, Monographs in Mathematics, 96, Birkhauser, 2011.
- [2] W. ARENDT, S. BU & M. HAASE, “Functional calculus, variational methods and Liapunov’s theorem”, *Arch. Math.*, 77, pp. 65-75, 2001.
- [3] A. V. BALAKRISHNAN, “Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them,”, *Pacific Journal of Mathematics*, Vol. 10, No. 2, pp. 419-437, 1960.
- [4] J. BOURGAIN, “Some remarks on Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional”, *Ark. Mat.*, vol. 21, pp. 163-168, 1983.
- [5] D. L. BURKHOLDER, “A geometrical characterisation of Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional”, *Ann. Probab.*, vol. 9, pp. 997-1011, 1981.
- [6] L. CHERFILS, A. MIRANVILLE & S. ZELIK, “On a generalized Cahn-Hilliard equation with biological applications”, *Discrete and continuous dynamical systems series B*, vol. 19, No 7, pp. 2013-2026, 2014.
- [7] D. S. COHEN & J. D. MURRAY, “A generalized diffusion model for growth and dispersal in population”, *Journal of Mathematical Biology*, 12, Springer-Verlag, pp. 237-249, 1981.
- [8] J. COVILLE *Contribution à l’étude d’équations non locales en dynamique des populations*, Habilitation à diriger des recherches, Aix Marseille Université, France, CNRS, I2M UMR 7373, 2015.
- [9] G. DA PRATO & P. GRISVARD, “Somme d’opérateurs linéaires et équations différentielles opérationnelles”, *J. Math. Pures et Appl.*, 54, pp. 305-387, 1975.
- [10] R. DAUTRAY & J.-L. LIONS, *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology, Volume 2, Functional and Variational Methods*, Springer, 2000.
- [11] R. DAUTRAY & J.-L. LIONS, *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology, Volume 3, Spectral Theory and Applications*, Springer, 2000.
- [12] G. DORE & A. VENNI, “On the closedness of the sum of two closed operators”, *Math. Z.*, 196, pp. 189-201, 1987.

- [13] G. DORE & A. VENNI, “ H^∞ functional calculus for sectorial and bisectorial operators”, *Studia Math.*, Vol. 166, no. 3, pp. 221-241, 2005.
- [14] A. ELTAÏEF, *Étude d’équations différentielles abstraites du second et quatrième ordre sur la demi-droite, et applications*, Thèse de doctorat de l’Université du Havre, 2010.
- [15] K.-J. ENGEL & R. NAGEL, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Springer, 2000.
- [16] A. FAVINI, R. LABBAS, K. LEMRABET, S. MAINGOT & H. SIDIBÉ, *Transmission Problem for an Abstract Fourth-order Differential Equation of Elliptic Type in UMD Spaces*, *Advances in Differential Equations*, Volume 15, Numbers 1-2, pp. 43-72, 2010.
- [17] A. FAVINI, R. LABBAS, S. MAINGOT, K. LEMRABET & H. SIDIBÉ, “Resolution and Optimal Regularity for a Biharmonic Equation with Impedance Boundary Conditions and Some Generalizations”, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, Volume 33, Number 11-12, p. 4991-5014, November & December 2013.
- [18] A. FAVINI, R. LABBAS, S. MAINGOT, H. TANABE & A. YAGI, “Complete abstract differential equations of elliptic type in UMD spaces”, *Funkc. Ekv.*, 49, pp. 193-214, 2006.
- [19] A. FAVINI, R. LABBAS, S. MAINGOT, H. TANABE & A. YAGI, “A simplified approach in the study of elliptic differential equations in UMD spaces and new applications”, *Funkc. Ekv.*, 451, pp. 165-187, 2008.
- [20] D. GILBARG & N. TRUDINGER, *Elliptic partial differential equations of second order*, *Classics in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [21] P. GRISVARD, “Équations différentielles abstraites”, *Extrait des Annales scientifiques de l’École Normale Supérieure*, 4ème série, t. 2, fasc. 3, pp. 311-395, 1969.
- [22] P. GRISVARD, “Spazi di tracce e applicazioni”, *Rendiconti di Matematica*, (4) Vol.5, Serie VI, pp. 657-729, 1972.
- [23] M. HAASE, *The functional calculus for sectorial Operators*, Birkhauser, 2006.
- [24] T. KATO, *Perturbation theory for linear operators*, Springer, 1980.
- [25] H. KOMATSU, “Fractional powers of operators”, *Pacific Journal of Mathematics*, Vol. 19, No. 2, pp. 285-346, 1966.
- [26] R. LABBAS, K. LEMRABET, S. MAINGOT & A. THOREL, “Generalized linear models for population dynamics in two juxtaposed habitats”, *Article soumis*, 2017.
- [27] R. LABBAS, S. MAINGOT, D. MANCEAU & A. THOREL, “On the regularity of a generalized diffusion problem arising in population dynamics set in a cylindrical domain”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 450, pp. 351-376, 2017.
- [28] K. LIMAM, R. LABBAS, K. LEMRABET, A. MEDEGHRI & M. MEISNER, “On Some Transmission Problems Set in a Biological Cell, Analysis and Resolution”, *Journal of Differential Equations*, Volume 259, issue 7, p. 2695-2731, 2015.
- [29] J.-L. LIONS & J. PEETRE, “Sur une classe d’espaces d’interpolation”, *Publications mathématiques de l’I.H.É.S.*, tome 19, pp. 5-68, 1964.
- [30] A. LUNARDI, *Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems*, Birkhauser, Basel, Boston, Berlin, 1995.
- [31] S. G. MIHLIN, “On the multipliers of Fourier integrals”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, N.S., 109, pp. 701-703, 1956.

-
- [32] A. NOVICK-COHEN, “On Cahn-Hilliard type equations”, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, vol. 15, No 9, pp. 797-814, 1990.
 - [33] F. L. OCHOA, “A generalized reaction-diffusion model for spatial structures formed by motile cells”, *BioSystems*, 17, pp. 35-50, 1984.
 - [34] A. OKUBO & S. A. LEVIN, *Diffusion and ecological problems, Mathematical biology*, second edition, Springer-Verlag, Berlin, 2010.
 - [35] A. PAZY, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.
 - [36] J. PRÜSS, *Evolutionary Integral Equations and Applications*, Birkhauser, 1993.
 - [37] J. PRÜSS, “Maximal regularity for evolution equations in L^p -spaces”, *Conf. Semin. Mat. Univ. Bari*, No. 285, pp. 1-39, 2002.
 - [38] J. PRÜSS & H. SOHR, “On operators with bounded imaginary powers in Banach spaces”, *Mathematische Zeitschrift, Springer-Verlag, Math. Z.*, 203, pp. 429-452, 1990.
 - [39] J. PRÜSS & H. SOHR, “Imaginary powers of elliptic second order differential operators in L^p -spaces”, *Hiroshima Math. J.*, 23, no. 1, pp. 161-192, 1993.
 - [40] J. L. RUBIO DE FRANCIA, *Martingale and integral transforms of Banach space valued functions*, in : J. Bastero, M. San Miguel (Eds.), *Probability and Banach Spaces*, Zaragoza, 1985, in : *Lecture Notes in Math.*, vol. 1221, Springer-Verlag, Berlin, pp. 195-222, 1986.
 - [41] E. SINISTRARI, “On the abstract Cauchy problem of parabolic type in spaces of continuous functions”, *J. Math. Anal. App.*, vol.66, pp. 16-66, 1985.
 - [42] H. TANABE, *Equations of evolution*, Pitman Publishing Ltd, 1979.
 - [43] H. TRIEBEL, *Interpolation theory, function Spaces, differential Operators*, North-Holland publishing company Amsterdam New York Oxford, 1978.
 - [44] I. I. VRABIE, *C_0 -semigroups and applications*, North-Holland, 2003.

Résumé

Le but de ce travail est l'étude d'un problème de transmission en dynamique de population entre deux habitats juxtaposés. Dans chacun des habitats, on considère une équation aux dérivées partielles, modélisant la dispersion généralisée, formée par une combinaison linéaire du laplacien et du bilaplacien.

On commence d'abord par étudier et résoudre la même équation avec diverses conditions aux limites posée dans un seul habitat. Cette étude est effectuée grâce à une formulation opérationnelle du problème : on réécrit cette EDP sous forme d'équation différentielle, posée dans un espace de Banach construit sur les espaces L^p avec $p \in]1, +\infty[$, où les coefficients sont des opérateurs linéaires non bornés.

Grâce au calcul fonctionnel, à la théorie des semi-groupes analytiques et à la théorie de l'interpolation, on obtient des résultats optimaux d'existence, d'unicité et de régularité maximale de la solution classique si et seulement si les données sont dans certains espaces d'interpolation.

Mots Clés : dynamique de population, équation de diffusion généralisée, fonctionnelle d'énergie libre de Landau-Ginzburg, équations différentielles opérationnelle, espaces UMD, opérateur à puissances imaginaires bornées, semi-groupes, espaces d'interpolation, régularité maximale.

Abstract

The aim of this work is the study of a transmission problem in population dynamics between two juxtaposed habitats. In each habitat, we consider a partial differential equation, modeling the generalized dispersion, made up of a linear combination of Laplacian and Bilaplacian operators.

We begin by studying and solving the same equation with various boundary conditions in a single habitat. This study is carried out using an operational formulation of the problem : we rewrite this PDE as a differential equation, set in a Banach space built on the spaces L^p with $p \in]1, +\infty[$, where the coefficients are unbounded linear operators.

Thanks to functional calculus, analytic semigroup theory and interpolation theory, we obtain optimal results of existence, uniqueness and maximum regularity of the classical solution if and only if the data are in some interpolation spaces.

Key Words : population dynamics, generalized diffusion equation, Landau-Ginzburg free energy functional, operational differential equations, UMD spaces, bounded imaginary powers of operators, semigroups, interpolation spaces, maximal regularity.