



Études qualitatives et quantitatives de modèles paramétriques. De la théorie à la pratique avec un exemple en sciences humaines.

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION DU
DIPLOME D'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES
EN MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES PAR

NATHALIE VERDIÈRE

UNIVERSITÉ DU HAVRE

Rapporteurs :

Denis Dochain

Professeur - Université Catholique de Louvain

Marie Doumic

Directrice de recherche (HDR) - laboratoire J-L. Lions, Paris

Dimitri Lefebvre

Professeur - Université Le Havre

Composition du Jury :

François Boulier

Professeur - École Polytechnique Universitaire, Lille

Andrea De Gaetano

Directeur de recherche - CNR-IASI Biomatlab

Antoine Perasso

Maître de conférences (HDR) - Université de Franche-Comté

Tarek Raïssi

Professeur - CNAM, Paris

Louise Travé-Massuyès

Directrice de recherche - LAAS-CNRS, Toulouse

Lilianne Denis-Vidal

Maître de conférences (HDR) - Université de Technologie de Compiègne

Référente :

Carine Jauberthie

Maître de Conférences (HDR) - Université Paul Sabatier, Toulouse III

21 juin 2022

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier vivement tous les membres du jury pour leur soutien et leur encouragement dans ma décision de soutenir mon habilitation à diriger la recherche. Marie Doumic, Denis Dochain et Dimitri Lefebvre qui ont accepté, sans hésitation, la lourde tâche d'être les rapporteurs de cette HDR. J'apprécie sincèrement l'intérêt qu'ils portent à mes travaux ainsi que leurs commentaires avisés. Je suis également très reconnaissante à Louise Travé-Massuyès, François Boulier, Andrea DeGaetano, Tarek Raïssi et Antoine Perasso de faire partie du jury. Je remercie Carine Jauberthie qui a acceptée d'être ma référente et pour ses conseils avisés sur la préparation du dossier.

Je voudrais encore une fois exprimer ma gratitude à ma directrice de thèse, Lilianne Denis Vidal, qui m'a suivie tout au long de ces années, m'a guidée et m'a toujours soutenue dans mon travail et ma carrière. Ce manuscrit n'existerait sûrement pas sans elle.

Ce travail n'existerait pas non plus sans les personnes avec qui j'ai eu le plaisir de travailler. Discuter, argumenter, (dé)construire, programmer sont des processus permettant d'aller jusqu'au bout des idées. Merci donc (dans le désordre) Valentina, Nathalie, Damienne, Sébastien, Rodolphe, Guillaume, Shouzeng...

D'une façon plus intime, j'adresse mes remerciements à la personne qui a été présente depuis le début, qui m'a aidée à gérer le quotidien et m'a soutenue, mon mari Dominique. Merci également à mes deux petits amours pour leur bonne humeur et leur joie de vivre de tous les jours, Delphine et Adrien.

Table des matières

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introduction | 2 |
| 2 | Identifiabilité et estimation des paramètres : des systèmes EDO aux systèmes EDP | 6 |
| 2.1 | Modèle mathématique et quelques préliminaires indispensables | 6 |
| 2.2 | Premières définitions de l'identifiabilité | 8 |
| 2.3 | Identifiabilité relative | 9 |
| 2.3.1 | Ensembles semi-algébriques | 10 |
| 2.3.2 | L'algorithme IdentifiabilityTree | 11 |
| 2.3.2.1 | Concepts utiles | 11 |
| 2.3.2.2 | Algorithme IdentifiabilityTree | 12 |
| 2.3.3 | Croissance microbienne dans un réacteur | 13 |
| 2.3.4 | Le modèle de la transmission du chikungunya | 14 |
| 2.4 | Estimation de paramètres à partir des polynômes ES | 15 |
| 2.4.1 | Méthode d'estimation à partir du polynôme ES | 16 |
| 2.4.2 | Approche basée sur les distributions | 16 |
| 2.4.2.1 | Erreur due à la méthode | 17 |
| 2.4.2.2 | Erreur due à la méthode numérique | 18 |
| 2.4.2.3 | Erreur due au bruit | 19 |
| 2.4.2.4 | Application au modèle de transmission du chikungunya | 20 |
| 2.5 | Identifiabilité ensembliste | 24 |
| 2.5.1 | Concepts utiles | 27 |
| 2.5.2 | Définitions | 27 |
| 2.5.3 | Liens entre la SM-identifiabilité et d'autres concepts | 28 |
| 2.5.3.1 | Liens avec la ε -identifiabilité globale | 28 |
| 2.5.3.2 | Liens avec l'injectivité partielle | 29 |
| 2.5.3.3 | Partitionnement d'un domaine en sous-ensembles (μ -)SM-identifiables | 30 |
| 2.5.4 | Estimation des paramètres par des méthodes ensemblistes et propriétés | 31 |
| 2.5.5 | Robustesse | 34 |
| 2.5.6 | La ε -consistance | 34 |
| 2.5.7 | Estimation des paramètres dans le cadre ensembliste | 37 |
| 2.5.7.1 | Une enveloppe de la solution initiale | 37 |
| 2.5.7.2 | Application | 38 |
| 2.6 | Identifiabilité dans le cadre des équations aux dérivées partielles (EDP) | 39 |
| 2.6.1 | Notations | 41 |
| 2.6.2 | Le modèle considéré | 41 |
| 2.6.3 | Cas général | 42 |
| 2.6.4 | Résultats d'identifiabilité | 43 |
| 2.6.5 | Exemple | 46 |
| 2.6.5.1 | Résultats d'identifiabilité | 48 |
| 2.6.5.2 | Exemple de l'estimation de paramètres à partir des polynômes ES dans le cadre des EDP | 48 |
| 2.7 | Conclusion | 50 |
| 3 | Diagnosticabilité fonctionnelle et algébrique | 52 |
| 3.1 | Le modèle | 53 |
| 3.2 | Diagnosticabilité fonctionnelle | 54 |
| 3.2.1 | Définition de diagnosticabilité basée sur la signature fonctionnelle | 54 |
| 3.2.2 | Lien entre identifiabilité et diagnosticabilité fonctionnelle | 56 |
| 3.2.3 | Un exemple complet : celui du réservoir | 58 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 3.3 | Diagnosticabilité algébrique | 60 |
| 3.3.1 | Préliminaires | 61 |
| 3.3.2 | Construction de la signature algébrique à partir du résumé exhaustif | 61 |
| 3.3.3 | Critères pour différencier les signatures | 63 |
| 3.3.4 | Application | 65 |
| 3.3.5 | La détection de faute dans le cadre ensembliste | 67 |
| 3.4 | Conclusion | 68 |
| 4 | Réseaux | 70 |
| 4.1 | Introduction | 70 |
| 4.2 | Synchronisation de systèmes non orientés | 71 |
| 4.2.1 | Extension de la méthode de stabilité de connexion de graphes | 71 |
| 4.2.2 | Synchronisations complètes | 73 |
| 4.2.3 | Application | 74 |
| 4.3 | Liens entre synchronisation et bifurcations | 75 |
| 4.4 | Conclusion | 77 |
| 5 | Croisement entre les mathématiques et les sciences humaines | 78 |
| 5.1 | Pourquoi avons nous choisi la modélisation macroscopique à base d'EDOs? | 79 |
| 5.2 | Le modèle Panic-Control-Reflex (PCR) | 80 |
| 5.2.1 | D'une typologie des comportements au modèle mathématique | 80 |
| 5.2.2 | Le modèle mathématique PCR et ses applications | 81 |
| 5.3 | Le modèle Alert-Panic-Control (APC) | 85 |
| 5.3.1 | Catégories comportementales | 87 |
| 5.3.2 | Présentation du modèle APC (Alert-Panic-Control) | 89 |
| 5.3.3 | Une première calibration à partir des connaissances des thématiciens | 89 |
| 5.4 | Une calibration à partir de la réalité virtuelle | 91 |
| 5.4.1 | Introduction | 91 |
| 5.4.2 | L'expérimentation de réalité virtuelle (RV) | 92 |
| 5.4.2.1 | La procédure de RV et l'échantillonnage | 92 |
| 5.4.2.2 | Mesures | 94 |
| 5.4.3 | Le lien entre le modèle mathématique et les données expérimentales | 94 |
| 5.4.3.1 | Variables observées du modèle mathématique | 95 |
| 5.4.3.2 | Modélisation du début et de la fin de la catastrophe | 95 |
| 5.5 | Sensibilité des sorties, identifiabilité et nombre minimal de données d'observation | 97 |
| 5.5.1 | Étude de sensibilité | 97 |
| 5.5.2 | Identifiabilité | 98 |
| 5.5.3 | Nombre minimal de données d'observation | 99 |
| 5.5.4 | Estimation des paramètres | 99 |
| 5.5.5 | Résultats | 100 |
| 5.6 | Un modèle mathématique, pour quoi faire? | 101 |
| 6 | Perspectives | 108 |
| 6.1 | Suite du modèle APC | 108 |
| 6.2 | Suite sur l'identifiabilité et la diagnosticabilité | 109 |
| 6.3 | À plus long terme | 110 |
| | Annexes | 113 |
| | Annexe 1 : L'algorithme IdentifiabilityTree | 114 |
| | Annexe 2 – Outils basiques de l'analyse par intervalle | 118 |
| 1 | Définitions basiques | 118 |
| 2 | Vecteurs et matrices d'intervalles | 118 |
| 3 | Pavage et sous-pavage | 119 |
| 4 | Opérations arithmétiques | 119 |
| 5 | Les fonctions d'inclusion | 120 |
| 6 | Image réciproque d'ensembles via l'analyse par intervalle | 121 |

| | |
|--|------------|
| Annexe 3 – Analyse de sensibilité | 122 |
| 1 Rappels sur les indices de Sobol | 122 |
| 1.1 Théorie | 122 |
| 1.2 Principe des calculs | 125 |
| 2 Résultats | 126 |

Chapitre 1

Introduction

Ce mémoire résume l'ensemble de mes travaux de recherches en mathématiques appliquées depuis ma thèse "Utilisation de l'algèbre différentielle pour analyser l'identifiabilité des paramètres de modèles décrits par des équations aux dérivées partielles", soutenue en 2005 (directrice de thèse : Lilianne Denis-Vidal, Ghislaine Joly-Blanchard). Ce mémoire est donc l'occasion de faire le bilan sur mon travail qui porte sur l'étude qualitative et quantitative des modèles dynamiques et d'esquisser quelques pistes de recherches amorcées ou futures.

Au cours de ma thèse au sein du laboratoire de mathématiques appliquées de l'UTC, j'ai travaillé sur des méthodes pour étudier l'identifiabilité a priori de modèles aux équations aux dérivées ordinaires (EDO) ainsi que sur le développement de méthodes numériques pour estimer les paramètres de ces modèles.

L'identifiabilité est une notion importante lorsqu'on construit un modèle mathématique et que l'on souhaite estimer des paramètres non directement accessibles par des mesures. En effet, elle assure qu'à une sortie du modèle mathématique correspond un seul jeu de paramètres et donc garantit les résultats numériques sur les paramètres. Un modèle non identifiable pourrait produire les mêmes sorties avec plusieurs, voir une infinité de jeux de paramètres, ce qui pose un problème lorsque ces derniers ont une signification physique comme les taux de contact infectieux dans les modèles épidémiologiques qui doivent être positifs. Pour étudier l'identifiabilité, un travail théorique est fait dans un cadre idéal sans considérer le bruit de mesure, en supposant avoir toutes les mesures nécessaires et où le modèle cherché correspond à celui du système étudié. Cette propriété, encore appelée *identifiabilité structurelle* est alors inhérente à la structure du modèle et constitue une condition nécessaire pour l'identifiabilité numérique. Cette propriété structurelle dépend des entrées et des sorties du modèle considéré, des conditions initiales comme l'ont démontré [61, 178, 196] et plus généralement des contraintes des paramètres [204].

Mon travail de thèse s'appuyait sur des relations différentielles obtenues à partir d'outils d'algèbre différentielle. Elles se sont révélées très riches et leur potentiel pas complètement exploité aussi bien au niveau théorique que numérique. Plusieurs questions restaient ouvertes, pouvait-on par exemple

- ré-écrire certains modèles mathématiques pour obtenir des relations plus simples à partir de l'algèbre différentielle ? En effet, le calcul formel peut produire des relations très compliquées en terme d'expressions et en terme d'ordre de dérivation ;
- incorporer formellement les contraintes sur les paramètres et les conditions initiales pour obtenir un résultat certifié sur l'identifiabilité du modèle ? Les outils d'algèbre différentielle ne prennent pas en compte les inégalités qui peuvent changer les résultats d'identifiabilité ;
- développer un algorithme donnant les paramètres clés pour obtenir l'identifiabilité d'une partie du modèle voire de tout le modèle ;
- élargir cette notion à d'autres cadres comme le cadre ensembliste ou le cadre des équations aux dérivées partielles (EDP) et quelles seraient les limites ?

Après ma thèse, j'ai pu apporter quelques réponses à ces questions qui sont abordées dans le chapitre 2.

La diagnosticabilité de fautes est apparue comme une suite naturelle de l'étude d'identifiabilité en se plaçant dans le cas de fautes constantes. Cette propriété établit quelles fautes peuvent être discriminées étant donnés les capteurs placés dans le système. Cette étude, si elle est menée lors de la conception du système, peut permettre de mettre en place des méthodes de diagnostic, c'est à dire des méthodes de détection et d'isolation de fautes. Actuellement, ces propriétés sont très étudiées dans le cadre des systèmes autonomes, en particulier dans l'aérospatial pour les envois de navettes autonomes à de longues distances [57]. Nous avons proposé de nouvelles pistes pour mener cette étude théorique et numérique à partir de relations différentielles non encore totalement exploitées dans ce domaine. Nous avons étendu certaines définitions et développé de nouvelles techniques d'analyse dans le cadre ensembliste mais également dans un cadre plus traditionnel. Nous avons également apporté quelques réponses sur le cas multi-faute, cas qui est rarement abordé dans la littérature. Cette thématique constituera le chapitre 3 de ce manuscrit.

Au cours de ces années, je me suis également intéressée aux réseaux et aux propriétés émergentes qui pouvaient résulter des interactions entre ces différents constituants. En particulier, j'ai travaillé sur

- l'extension d'un résultat de synchronisation dans un réseau dont les noeuds sont constitués de systèmes dynamiques non linéaires, non nécessairement identiques et dont les termes de couplage sont non linéaires ;
- le lien entre la synchronisation d'un système acyclique direct formé de systèmes de Hindmarsh-Rose et les bifurcation de(s) système(s).

Ces résultats sont présentés au chapitre 4.

Ce travail sur l'identifiabilité, la diagnosticabilité et la synchronisation ont répondu à des problématiques ponctuelles et concrètes. L'identifiabilité et la diagnosticabilité ont été au coeur de la tâche 2 du projet ANR MAGIC-SPS, tâche qui proposait d'étendre ces notions au cadre ensembliste dans le cas de modèles dynamiques incertains. Quant aux notions d'identifiabilité et de synchronisation, elles ont été utilisées dans le cadre d'un travail initié en 2013 avec le projet PEPS HuMaIn (Humanité-Mathématiques-sciences de l'Information) et qui a abouti au projet ANR Com2SiCa en 2018. Ce travail est présenté au chapitre 5. Ces projets consistaient à mieux comprendre les différents comportements et leurs enchaînements lors d'une catastrophe puis à développer un modèle mathématique les décrivant en accord avec les géographes (Damienne Provitolo, Edwidge Dubos-Paillard) puis les psychologues (Oscar Navarro, Abdel-Halim Boudoukha). Cette thématique connaît un vif écho dans notre société depuis plusieurs années qui sont marquées par une augmentation significative du nombre de catastrophes qu'elles soient naturelles, sociétales ou technologiques. Une meilleure compréhension des réactions humaines est devenue un enjeux majeur dans nos sociétés. D'ailleurs, ces tendances ne devraient pas s'inverser dans les années à venir puisque les facteurs de risque restent nombreux : changements climatiques, tensions géopolitiques, les risques émergents liés aux avancées technologiques, la détérioration de l'environnement et la pression urbaine etc. Or le comportement des individus et des populations lors de catastrophes reste encore méconnu en de nombreux points par les opérationnels comme la complexité des comportements véritablement adoptés [52], leur enchaînement, leur dynamique et interdépendance [164].

En faisant une revue de la littérature, différents modèles mathématiques à différentes échelles ont été développés pour décrire une dynamique de foule dans un contexte de situations extrêmes (voir. [11]). On peut citer par exemple :

- les modèles de force sociale [93] : les piétons sont identifiés à des particules soumises i) à une force extérieure due aux obstacles (murs), ii) une force extérieure qui prend en compte les interactions avec les autres piétons (typiquement la tendance à préserver une certaine distance avec les voisins). L'équation décrit la vitesse de l'individu qui va évoluer dans son environnement pour atteindre une vitesse désirée. C'est un modèle essentiellement réactif, il n'y a pas de gestion simultanée des interactions de nature différente ;
- les modèles granulaires [132] : chaque individu est identifié à un disque d'une certaine taille et ne pouvant pas s'intercepter avec son voisin. L'approche s'appuie sur la vitesse désirée par chaque individu (la vitesse qu'ils auraient s'ils étaient seuls) et le champ de vitesse global est défini comme la plus proche vitesse faisable sans que les disques s'interceptent. Ce modèle décrit la position de chaque individu, on considère l'ensemble des vitesses désirées et le cône de vitesses faisables. Les outils sont basés sur l'analyse convexe et la théorie des inclusions différentielles. Le problème est que les individus ont tendance à suivre une stratégie purement égoïste sans considérer les autres ;
- les automates cellulaires [9] : les agents ou personnes sont identifiés à des particules. Il y a discrétisation en espace et en temps. Pour l'espace, les agents sont localisés dans des cellules d'une grille fixée et pour le temps, l'évolution consiste en une succession de pas. Les positions des particules sont mises à jour l'une après l'autre de manière stochastique.
- les modèles macroscopiques : ils décrivent l'évolution en temps et en espace de la densité et de la vitesse moyenne d'une foule et sont basés sur des systèmes d'équations aux dérivées partielles. Ces modèles sont basés sur la dynamique des fluides et prennent en compte la conservation de la masse.

Deux points importants viennent limiter la portée des modèles que nous avons trouvés dans la littérature. Le premier est qu'ils ont été construits à partir de modèles de physiques (fluide, particules) et s'intéressent essentiellement aux dynamiques de foule le plus souvent paniquée (voir [11, 93]). Or, d'après les psychologues, les géographes et les neuro-scientifiques, lors de catastrophes, plusieurs comportements concurrents sont observés produisant une dynamique pouvant se révéler complexe. Le deuxième point est que ces modèles ne prennent pas ou très peu en compte les changements émotionnels des individus au cours d'une catastrophe comme : i) les transitions naturelles spécifiques à chaque individu selon son expérience et son passé ; ii) les transition dues à l'imitation ou la comparaison sociale qui est un important facteur dans les processus de changement de comportements [77]. Pour ces raisons, nous avons fait le choix de proposer un nouveau modèle basé sur les échanges avec les géographes des laboratoires de Géoazur (Nice) et de Géographie-Cités (Paris) et psychologues du laboratoire de LLPL (Nantes). Nous avons décidé de reprendre la formalisation des modèles SIR (Susceptibles-Infected-Removed) car ces modèles compartimentaux permettent de décrire en temps l'évolution du nombre

d'individus dans chaque compartiment. Un compartiment représentant un état comportemental. Ces modèles permettent de prendre en compte différents types d'interactions entre ces différents comportements (dans notre cas les transitions intrinsèques et les transitions dues à l'imitation ou la contagion sociale). Il est également possible de spatialiser ce type de modèle soit en utilisant la théorie des équations aux dérivées partielles pour une diffusion locale, soit en utilisant la théorie des réseaux pour une diffusion globale. Toutefois, cette thématique portant sur l'étude des comportements en situation de catastrophe a été rarement quantifiée car toute tentative de mesure est difficile à mettre en oeuvre en pratique. Dans le chapitre 5 de ce manuscrit, je vais présenter nos avancées dans cette thématique et en particulier

- comment le modèle a été construit avec les géographes et les psychologues ;
- comment nous avons exploité les données existant dans la littérature et les connaissances des thématiciens pour donner un sens et un ordre de grandeur aux paramètres ;
- comment nous avons exploité les données provenant d'une expérimentation de réalité virtuelle pour affiner la connaissance des valeurs des paramètres. Cette expérimentation a été réalisée en lieu clos et contrôlé au Laboratoire de Psychologie des Pays de la Loire (Nantes) en 2020 et s'appuie sur un scénario, celui de l'arrivée d'une vague de tsunami d'origine sismique sur une plage de Nice [19] ;
- les informations et les connaissances que ce type de modèle peut apporter.

Je finirai par un dernier chapitre qui présente les perspectives que j'envisage à court et moyen terme.

Chapitre 2

Identifiabilité et estimation des paramètres : des systèmes EDO aux systèmes EDP

Les contributions présentées dans cette partie ont été publiées dans [100, 101, 173, 200, 204].

L'identifiabilité est une notion importante lorsqu'on construit un modèle mathématique et que l'on souhaite estimer des paramètres non directement accessibles par des mesures. Cette notion structurelle connaît depuis plusieurs années un intérêt croissant dans différents domaines scientifiques [160, 207]. La question se pose lorsqu'on cherche à calibrer un modèle mathématique à partir de données réelles bruitées. Toutefois, si la structure du modèle n'est pas identifiable, le résultat de la procédure numérique mise en place pour estimer les paramètres peut donner des valeurs erronées, c'est à dire des valeurs ne correspondant pas à la vraie valeur des paramètres, ce qui pose un problème lorsque les paramètres ont une signification physique. Par exemple, l'algorithme utilisé pourrait renvoyer un taux de transition négatif intervenant dans un modèle biologique alors qu'il devrait être positif. Pour apporter une réponse à cette problématique, l'identifiabilité du modèle assure, qu'à une sortie du modèle mathématique, correspond un seul jeu de paramètres. Pour étudier l'identifiabilité, un travail théorique est fait dans un cadre idéal. Cette propriété, encore appelée *identifiabilité structurelle* est alors inhérente à la structure du modèle est constitue une condition nécessaire pour l'identifiabilité numérique. Plusieurs méthodes pour étudier l'identifiabilité structurelle peuvent être trouvées dans la littérature [36, 37, 60, 61, 64, 80, 99, 125, 161, 184, 209]. La propriété d'identifiabilité dépend des entrées et des sorties que l'on peut considérer dans le modèle mais également des conditions initiales [61, 178, 196] et plus généralement des contraintes sur les paramètres.

Ce chapitre présente mon travail dans ce domaine. Tout d'abord, je vais présenter la notion d'identifiabilité relative qui généralise la notion d'identifiabilité et permet de déterminer les paramètres clés permettant d'avoir l'identifiabilité de certains paramètres voire du modèle complet. Puis, je montrerai comment nous avons généralisé ce concept au cadre ensembliste et aux équations aux dérivées partielles. Dans chaque partie, j'ai travaillé sur le développement de méthodes basées sur des outils d'algèbre pour vérifier ces propriétés et conduisant à des méthodes d'estimation de paramètres.

2.1 Modèle mathématique et quelques préliminaires indispensables

Dans cette première section est présenté le modèle paramétrique utilisé au cours de tout ce chapitre ainsi que quelques rappels d'algèbres différentielles indispensables pour la suite.

Le modèle que nous allons considérer dans ce chapitre est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t, \theta) = f(x(t, \theta), u(t), \theta), \\ y(t, \theta) = h(x(t, \theta), \theta), \end{cases} \quad (2.1)$$

où

- Le vecteur de paramètres $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_q)$ appartient au sous-ensemble \mathcal{D} de \mathbb{R}^q où \mathcal{D} est a priori un ensemble connu de paramètres admissibles.
- La fonction $f(.,., \theta)$ est supposée réelle, rationnelle et analytique¹ sur $M \times C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^r)$, où M est un

1. Cette hypothèse n'est pas restrictive puisque de nombreux modèles peuvent être réduits à un modèle rationnel et analytique par un changement de variables (voir [8])

- ensemble ouvert connexe de \mathbb{R}^n et tel que $x(t, \theta) \in M$ pour chaque $\theta \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^q$ et chaque $t \in [0, T]$,
- $h(\cdot, \theta)$ est supposée réelle, rationnelle et analytique sur M ,
- u est un vecteur de dimension r de fonctions régulières (infiniment différentiables). Dans le cas d'un système non contrôlé, u est égal à 0,

Soit $x_0 = (x_{0,i})_{i=1,\dots,n}$ le vecteur de conditions initiales pour le système (2.1) et dont certaines composantes peuvent dépendre de paramètres à estimer.

Exemple 2.1.1. Reprenons l'exemple de l'article [196] qui décrit la capacité d'un récepteur du macrophage à recevoir des macromolécules solubles spécifiques aux transporteurs d'enzymes. Il s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha_1(x_2 - x_1) - \frac{V_m x_1}{1 + x_1}, \\ \dot{x}_2 = \alpha_2(x_1 - x_2), \\ x_1(0) \in [0.62, 0.63], x_2(0) = 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

où x_1 (resp. x_2) est la concentration d'enzymes à l'extérieur (resp. à l'intérieur) du macrophage et $p = (\alpha_1, V_m, \alpha_2)$ est le vecteur de paramètres inconnus à identifier. Le paramètre α_1 est le taux de transfert du compartiment 1 (ou compartiment central, en pratique le plasma) au compartiment 2 (ou compartiment périphérique qui représente la partie du liquide extracellulaire accessible) et α_2 est le taux de transfert du compartiment 2 au compartiment 1.

Si on suppose observer la concentration d'enzymes à l'extérieur du macrophage, en dérivant la première équation et en substituant x_2 et \dot{x}_2 par leur expression dépendant de x_1 , on obtient le polynôme différentiel ($y := x_1$ et en supposant que $\alpha_1 \neq 0$),

$$P(y, u) = \ddot{y}(1+y)^2 + \gamma_1 \dot{y}(1+y)^2 + \gamma_2 y(1+y) + \gamma_3 \dot{y}$$

avec $\gamma_1 = \alpha_1 + \alpha_2$, $\gamma_2 = \alpha_2 V_m$ et $\gamma_3 = V_m$.

Nous verrons que ce polynôme a des propriétés très intéressantes pour mener des études sur les paramètres. Toutefois, pour obtenir de telles relations, les manipulations à la main peuvent être difficiles. L'algorithme de Rosenfeld-Groebner implémenté dans le package *DifferentialAlgebra* de Maple permet de le retrouver (voir [20, 22]). Par exemple, notons $\theta = (\alpha_1, \alpha_2, V_m)^T$. Considérons l'ordre d'élimination $[\theta] \prec [y] \prec [x_1, x_2]$ (θ est considéré comme une variable de dérivées nulles)². L'ordre d'élimination choisi consiste à éliminer les variables x_1 , x_2 et leurs dérivées au profit de y (et de ses dérivées) puis de θ . À partir de cet ordre d'élimination, l'algorithme de Rosenfeld-Groebner triangularise le système d'équations (2.2) en utilisant les opérations d'addition, de soustraction, de multiplication et de dérivation. Dans notre exemple, il renvoie en particulier les deux listes suivantes :

$$\begin{aligned} L_1 &:= \{-\alpha_2 x_2 + \alpha_2 y + \dot{x}_2, x_1 - y, V_m y + y \dot{y} + \dot{y}, \alpha_1\} \\ \text{et} \\ L_2 &:= \{x_1 - y, \alpha_1 x_2 y - \alpha_1 y^2 - V_m x_1 + \alpha_1 x_2 - \alpha_1 y + (-y - 1) \dot{y}, \\ &\quad -V_m \alpha_1 \alpha_2 y^2 + \alpha_1^2 y^2 \dot{y} - \alpha_1 \alpha_2 y^2 \ddot{y} - V_m \alpha_1 \alpha_2 y + 2\alpha_1^2 y \dot{y} - 2\alpha_1 \alpha_2 y \ddot{y} + \alpha_1 y^2 \ddot{y} + V_m \alpha_1 \dot{y} \\ &\quad + \alpha_1^2 \dot{y} - \alpha_1 \alpha_2 \dot{y} + 2\alpha_1 y \ddot{y} + \alpha_1 \ddot{y}\}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

La liste L_1 est le cas particulier où $\alpha_1 = 0$ tandis que la liste L_2 est le cas général. En factorisant la dernière relation de L_2 , on retrouve le polynôme P .

De façon générale, étant donné l'ordre d'élimination $[\theta] \prec [y, u] \prec [x]$ appliqué au système (2.1), l'algorithme divise le système initial en plusieurs sous-systèmes formés d'équations et d'inéquations. L'union de ces systèmes est encore appelée chaîne régulière. Les solutions de chacun de ces sous-systèmes sont solutions du système (2.1) et seulement l'un d'entre eux est le cas général, les autres étant des solutions particulières. Ainsi, l'ensemble solution du système initial est l'union de l'ensemble des solutions de tous les sous-systèmes. Le cas général est de la forme [62]

$$C(\theta) = \{\dot{\theta}_1, \dots, \dot{\theta}_q, P_1(y, u, \theta), \dots, P_m(y, u, \theta), Q_1(x, y, u, \theta), \dots, Q_n(x, y, u, \theta)\}$$

où, pour $i = 1, \dots, m$, le leader du polynôme P_i , c'est à dire la variable dont l'ordre de dérivation est le plus élevé, est y_i .

2. Un *classement* $<$ désigne un ordre total sur l'ensemble des dérivées et le bloc $[v]$, où v est une variable, signifie que v et ses dérivées sont ordonnées par le classement $<$ de la façon suivante $v < \dot{v} < \ddot{v} < \dots$. Le symbole $<$ indique quant à lui un classement entre les blocs dans le sens "classement inférieur à" entre deux blocs.

Sous certaines conditions techniques presque toujours vérifiées [62], le polynôme P_i appelé polynôme Entrée-Sortie (ES) peut s'écrire sous la forme :

$$P_i(y, u, \theta) = m_{i,0}(y, u) + \sum_{j=1}^{d_i} \gamma_{i,j}(\theta) m_{i,j}(y, u) \quad \text{et tel que } P_i(y, u, \theta) = 0. \quad (2.4)$$

Les $\gamma_{i,j}(\theta)$ pour $j = 1, \dots, d_i$ sont rationnels en θ et tels que $\gamma_{i,a} \neq \gamma_{i,b}$ ($a \neq b$). $(m_{i,j}(y, u))_{1 \leq j \leq d_i}$ est une suite de polynômes différentiels en y et u . Enfin, $m_{i,0}$ vérifie $m_{i,0} \neq 0$.

Dans [62], les auteurs ont montré qu'il y a autant de polynômes ES que de sorties du modèle. Par la suite, pour simplifier les notations, nous considérerons qu'il n'y a qu'une sortie pour le modèle et donc un seul polynôme ES. L'indice i dans (2.4) sera omis.

Remarque 1. *Contrairement à d'autres auteurs [53, 225, 125], nous avons choisi ces polynômes plutôt que ceux obtenus à partir de l'algorithme de Ritt (voir [125] pour plus de détails). En effet, ces derniers requièrent beaucoup plus de manipulations des équations du modèle. Ainsi, les relations obtenues sont plus complexes en terme de nombre d'expression et l'ordre de dérivation plus élevé.*

2.2 Premières définitions de l'identifiabilité

De manière générale, j'ai adopté les définitions classiques suivantes [8, 136, 138, 196] :

- Définition 1.**
1. Soit $\theta \in \mathcal{D}$ un vecteur de paramètres. Si il existe un contrôle u tel que le système d'équations $y(t, \theta) = y(t, \tilde{\theta})$, avec $\tilde{\theta} \in \mathcal{D}$, possède
 - seulement une solution $\theta = \tilde{\theta}$, le vecteur de paramètres θ est dit globalement identifiable,
 - un nombre fini de solutions distinctes alors θ est dit localement identifiable,
 - une infinité de solutions alors θ est dit non identifiable.
 2. Une composante θ_i de θ est globalement identifiable si pour tout $\tilde{\theta} \in \mathcal{D}$ tel que $y(t, \theta) = y(t, \tilde{\theta})$ implique que $\theta_i = \tilde{\theta}_i$.
 3. Le modèle (2.1) est dit globalement identifiable si toutes les composantes du vecteur de paramètres θ sont globalement identifiables.

Pour tester cette propriété, il est possible de se ramener à une étude d'injectivité sur les coefficients du polynôme ES (2.4), le résultat est le suivant et se trouve dans [62] :

Proposition 1. *Supposons que le déterminant fonctionnel $\Delta P(y, u) = \det(m_j(y, u), j = 1, \dots, d)$ n'est pas identiquement nul³. Le modèle (2.4) est globalement identifiable si et seulement si la fonction*

$$\begin{aligned} \phi: \mathcal{D} &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ \theta &\longmapsto (\gamma_j(\theta))_{1 \leq j \leq d} \end{aligned} \quad (2.5)$$

est injective.

Remarque 2.

1. Dans la première version de la méthode décrite dans [62], les conditions initiales n'étaient pas considérées. Elles ont été intégrées par la suite démontrant leur rôle sur les résultats d'identifiabilité ([61, 178, 196]).

2. Plusieurs approches ont été proposées pour résoudre le système réel $\phi(\theta) = \phi(\tilde{\theta})$ [12, 62, 177, 196] comme l'utilisation des bases de Groebner. Toutefois, celles-ci ne permettent pas de considérer d'éventuelles inégalités vérifiées par les paramètres.
3. Si il y a M observations ($M \geq 1$) donc M polynômes ES alors pour chaque polynôme différentiel dont le déterminant fonctionnel est non identiquement nul, ses coefficients peuvent être ajoutés à l'image de la fonction ϕ .
4. La suite $(\gamma_j(\theta))_{1 \leq j \leq d}$ est également appelée résumé exhaustif.

Souhaitant répondre à des questions plus précises sur la structure du modèle, je me suis intéressée à la généralisation des définitions classiques d'identifiabilité ainsi qu'au développement des méthodes associées.

³ Cette hypothèse consiste à vérifier l'indépendance linéaire des $m_j(y, u)$, $j = 1, \dots, d$ en vérifiant que le déterminant fonctionnel calculé à partir du Wronskien est non identiquement nul. Dans le cadre de l'algèbre différentielle, cette condition consiste à vérifier qu'il n'est pas dans l'idéal obtenu après l'élimination des variables d'état. En pratique, cette condition peut-être vérifiée grâce au package Differential-Algebra de Maple.

2.3 Identifiabilité relative

La définition d'identifiabilité relative que nous avons proposée est apparue naturellement en étudiant des systèmes dynamiques non identifiables.

Exemple 2.3.1. *Considérons le modèle de croissance microbienne dans un réacteur étudié dans les articles [37, 74] auquel est ajouté le facteur de maintenance m . Celui-ci correspond à la masse de substrat qu'une unité de biomasse consomme en une seule unité de temps. Le modèle dynamique pour le processus de croissance est gouverné par les deux équations suivantes :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{\mu s(t) x(t)}{K_S + s(t)} - mY x(t), \\ \dot{s}(t) = \frac{-\mu s(t) x(t)}{Y(K_S + s(t))}, \end{cases} \quad (2.6)$$

où x est la concentration de micro-organismes, s la concentration de substrat limitant la croissance, μ la vitesse maximale de réaction, K_S la constante de Michaelis-Menten et Y le coefficient de rendement. Étant donné la nature des paramètres, μ , K_S , m et Y sont supposés être des réels positifs. Comme il est plus facile de mesurer $x(t)$ que $s(t)$ à l'intérieur du réacteur, la sortie mesurée est supposée être $y := x$. Le modèle étudié dans [37] est un cas particulier de (2.6) en posant $K_d = mY$.

Ce modèle n'est pas identifiable à partir de la seule mesure de concentration de microorganismes. En effet, l'algorithme de Rosenfeld-Groebner appliqué à ce système avec l'ordre d'élimination $[\theta] \prec [y] \prec [x, s]$, $\theta := (\mu, K_S, m, Y)$ retourne le polynôme ES suivant :

$$P(y) := (Y^3 m^3 - 2Y^2 m^2 \mu + Y m \mu^2) y^3 + (3Y^2 m^2 - 4Y m \mu + \mu^2) y^2 \dot{y} + \mu K_S Y (y \ddot{y} - \dot{y}^2) + (3Y m - 2\mu) y \dot{y}^2 + \dot{y}^3 = 0.$$

Le déterminant fonctionnel $\det(P(y)) = \det(y^3, y^3 \dot{y}, y \ddot{y} - \dot{y}^2, y \dot{y}^2)$ est non nul et la fonction $\phi : \theta = (\mu, K_S, m, Y) \mapsto (Y^3 m^3 - 2Y^2 m^2 \mu + Y m \mu^2, 3Y^2 m^2 - 4Y m \mu + \mu^2, \mu K_S Y, 3Y m - 2\mu)$ n'est pas injective. Donc, d'après la proposition 1, le modèle n'est pas identifiable.

Sur ce simple modèle, plusieurs questions viennent naturellement :

- étant donné la non identifiabilité du modèle, quels paramètres doit-on déterminer pour obtenir l'identifiabilité de paramètres significatifs non directement mesurables, voir l'identifiabilité de tout le système ?
- Quels rôles peuvent avoir les contraintes sur les résultats d'identifiabilité des paramètres ?
- Comment intégrer naturellement ces contraintes ainsi que les conditions initiales dans l'étude d'identifiabilité ?

En ce qui concerne la première question, les modèles construits dans le cadre de la biologie peuvent contenir des paramètres significatifs et importants pour l'expérimentateur. Leur estimation expérimentale représente parfois un coût financier non négligeable et si le modèle n'est pas identifiable, leur valeur estimée à partir du modèle n'est pas garantie. Dans ce cas de figure, il est courant de chercher et d'utiliser des combinaisons identifiables de paramètres à travers des approches numériques/statistiques ([27, 44, 72, 134, 213]), des méthodes symboliques-numériques ([41, 45]) et des approches algébriques ([6, 38, 62, 74, 75, 136, 137, 138, 139, 140, 196]) pour re-paramétriser le modèle initial et ainsi obtenir un modèle identifiable. Toutefois, cette re-paramétrisation introduit des paramètres qui n'ont plus de sens physique ou biologique conduisant à un modèle dont les résultats sont plus difficilement interprétables. Or, l'estimation de certains paramètres ou l'ajout de contraintes peuvent permettre d'avoir l'identifiabilité du modèle initial. C'est dans la perspective de laisser à l'expérimentateur le meilleur choix de stratégie que nous avons proposé la notion d'identifiabilité relative. Cette définition a conduit au développement d'un algorithme dont le résultat est un arbre donnant les paramètres clés pour avoir l'identifiabilité de certains paramètres voir du modèle complet.

La première contribution de ce travail est théorique. Comme l'identifiabilité d'un paramètre peut dépendre de l'identifiabilité d'autres paramètres, nous avons étendu la définition classique d'identifiabilité et introduit la notion d'identifiabilité relative, c'est à dire l'identifiabilité d'un paramètre donné quand d'autres sont supposés connus. Nous avons ensuite généralisé un résultat donné dans [61]. Ce résultat lie les trajectoires de sorties et les solutions de systèmes algébriques construits à partir des polynômes ES. Plus précisément, nous avons établi l'équivalence entre l'identifiabilité relative d'un paramètre et l'ensemble solution d'un système d'équations et/ou d'inéquations qui doit être vide. Cet ensemble solution peut être testé grâce à des logiciels de calcul algébrique. Cette approche théorique a permis d'obtenir une approche automatisée pour étudier l'identifiabilité (relative) des paramètres d'un modèle.

La seconde contribution est un algorithme basé sur cette équivalence et dont le résultat est un arbre. Sa construction se fait à partir d'outils semi-algébriques. Ces derniers, implémentés dans des logiciels de calcul

formel, n'ont pas encore été utilisés jusqu'à présent pour certifier l'identifiabilité structurelle de modèles dynamiques. Il permet d'intégrer les conditions initiales et les contraintes sur les paramètres. L'algorithme retourne un ensemble de listes, chacune d'entre elle donnant un ensemble de paramètres clés pour obtenir l'identifiabilité d'un ou des paramètres du modèle. Notre algorithme peut prendre en compte le domaine de définition des paramètres et des relations algébriques provenant par exemple des conditions initiales. Le résultat théorique obtenu sur l'équivalence assure que l'ensemble des listes fournies par notre algorithme est exhaustive pour le modèle considéré.

Dans beaucoup de modèles, il est naturel de considérer un sous-ensemble \mathcal{C} de l'ensemble admissible des paramètres \mathcal{D} . En effet, due à la signification même des paramètres, des conditions initiales ou pour assurer l'existence de solutions, des contraintes supplémentaires doivent être considérées. Par exemple, dans les études de chaînes trophiques, le nombre de proies mangées par les prédateurs ne peut pas être plus grand que la population totale de proies et en mécanique, une masse ne peut pas être négative. Pour voir comment intégrer ces contraintes qui apparaissent naturellement quand on étudie un problème, je vais rappeler la notion d'ensemble semi-algébrique qui sera à la base du travail présenté dans cette partie.

2.3.1 Ensembles semi-algébriques

Par la suite, nous supposons que les contraintes sur le vecteur de paramètres θ peuvent être formulées à l'aide d'équations et/ou d'inégalités algébriques. La définition d'un ensemble semi-algébrique est la suivante (cf [10]) :

Définition 2. *Un ensemble de solutions réelles d'un ensemble fini d'équations polynômiales et/ou d'inégalités polynômiales est appelé ensemble semi-algébrique.*

L'introduction d'ensembles semi-algébriques permet d'utiliser les bibliothèques de calculs formels comme la bibliothèque *Raglib* de Maple [73] ou la bibliothèque *SemiAlgebraicSetTools* [26, 39, 218]. Une introduction sur la façon de résoudre des systèmes semi-algébriques à l'aide Maple est disponible à l'adresse suivante <https://www.csd.uwo.ca/mmorenom/Publications/cdlmpxxx.pdf>.

Dans la suite de cette partie, on suppose que :

- $C(\theta)$ est l'ensemble des équations et inéquations algébriques vérifiées par les composantes du vecteur de paramètres $\theta \in \mathcal{D}$ du modèle ;
- l'ensemble \mathcal{C} est un ensemble semi-algébrique défini par $C(\theta)$.

Exemple 2.3.2. *Ainsi, pour l'exemple 2.3.1, nous pouvons prendre $C(\theta) = \{\mu > 0, K_S > 0, m > 0, Y > 0\}$.*

La définition de l'identifiabilité relative d'un paramètre particulier par rapport à d'autres paramètres identifiables (éventuellement aucun) est la suivante :

Définition 3. *1. Le paramètre $\theta_{a_{r+1}}$ est dit relativement identifiable par rapport à l'ensemble de paramètres $\{\theta_{a_1}, \dots, \theta_{a_r}\}$ si il existe un contrôle u tel que, pour tout $\tilde{\theta} = (\tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_q) \in \mathcal{D}$ dont les composantes vérifient $\tilde{\theta}_{a_1} = \theta_{a_1}, \dots, \tilde{\theta}_{a_r} = \theta_{a_r}$, l'équation $y(t, \theta) = y(t, \tilde{\theta})$ implique $\theta_{a_{r+1}} = \tilde{\theta}_{a_{r+1}}$.*

2. L'étude de l'identifiabilité relative du système (2.1) est la détermination de l'identifiabilité relative de chaque paramètre par rapport à chaque ensemble de paramètres construit à partir de l'ensemble $\{\theta_1, \dots, \theta_q\}$.

Par définition, $\theta_{a_{r+1}}$ n'est pas relativement identifiable par rapport à l'ensemble de paramètres $\{\theta_{a_1}, \dots, \theta_{a_r}\}$ (resp. pas identifiable) si, pour tout contrôle u , il existe $\tilde{\theta} = (\tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_q) \in \mathcal{D}$ dont les composantes satisfont $\tilde{\theta}_{a_1} = \theta_{a_1}, \dots, \tilde{\theta}_{a_r} = \theta_{a_r}$, $\theta_{a_{r+1}} \neq \tilde{\theta}_{a_{r+1}}$ et $y(t, \theta) = y(t, \tilde{\theta})$.

Cette définition apparaît naturellement quand on souhaite déterminer quels paramètres doivent être estimés pour obtenir des paramètres identifiables et éventuellement l'identifiabilité du modèle.

Remarque 3. *1. On retrouve la définition classique de l'identifiabilité structurelle lorsque le paramètre $\theta_{a_{r+1}}$ est relativement identifiable par rapport à l'ensemble vide des paramètres. Par conséquent, l'identifiabilité du système (2.1) est un cas particulier de l'identifiabilité relative par rapport à toutes les composantes de θ .*

2. Les définitions 1 et 3 peuvent être étendues à des définitions locales en imposant que $\tilde{\theta}$ appartient à un voisinage $\nu(\theta) \subset \mathcal{D}$ de θ plutôt que \mathcal{D} .

La proposition suivante est une conséquence directe de la définition 3.

Proposition 2. *Si θ_i est relativement identifiable par rapport à l'ensemble éventuellement vide $\mathcal{P} \subset \{\theta_1, \dots, \theta_q\}$ alors θ_i est relativement identifiable par rapport à tout sous-ensemble de $\{\theta_1, \dots, \theta_q\}$ contenant \mathcal{P} .*

Nous allons désormais voir comment réduire l'étude de l'identifiabilité relative à un problème d'ensemble semi-algébrique.

Pour prendre en compte les conditions initiales et/ou les contraintes supplémentaires sur les paramètres, le domaine de définition de la fonction ϕ (voir (2.5)) est le sous-ensemble \mathcal{C} de \mathcal{D} . La proposition suivante donne le lien entre l'identifiabilité relative et le résumé exhaustif.

Proposition 3. *Le paramètre $\theta_{a_{r+1}}$ est relativement identifiable par rapport à l'ensemble éventuellement vide des paramètres $\{\theta_{a_1}, \dots, \theta_{a_r}\}$ si et seulement si, pour tout $\theta = (\theta_j)_{j=1, \dots, q} \in \mathbb{R}^q$ et $\tilde{\theta} = (\tilde{\theta}_j)_{j=1, \dots, q} \in \mathbb{R}^q$:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta \in \mathcal{C} \\ \tilde{\theta} \in \mathcal{C} \\ \theta_{a_1} = \tilde{\theta}_{a_1} \\ \vdots \\ \theta_{a_r} = \tilde{\theta}_{a_r} \\ \phi(\theta) = \phi(\tilde{\theta}) \end{array} \right. \Rightarrow \theta_{a_{r+1}} = \tilde{\theta}_{a_{r+1}} \quad (2.7)$$

Remarque 4. *La proposition 3 peut-être étendue à une version locale en supposant que $\tilde{\theta}$ appartient à un voisinage semi-algébrique V_θ de θ .*

Le but de ce qui va suivre est de proposer une procédure automatique basée sur les outils semi-algébriques pour prouver l'implication (2.7) incluant les contraintes sur les paramètres.

Du système composant le membre de gauche dans l'implication (2.7), on obtient un système composé d'équations polynômiales et d'inégalités définissant un ensemble semi-algébrique. En effet, \mathcal{C} est supposé être un ensemble semi-algébrique et le système $c_{i,j}(\theta) = c_{i,j}(\tilde{\theta})$, $i = 1, \dots, s$, $j = 1, \dots, d_i$ est équivalent à un système algébrique dont les inéquations polynômiales correspondent aux dénominateurs du système. Ces inéquations polynômiales sont alors rajoutées à $C(\theta)$ et $C(\tilde{\theta})$.

Soit $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_q) \in \mathbb{R}^q$, $\tilde{\theta} = (\tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_q) \in \mathbb{R}^q$ et $0 \leq r \leq q$. Notons :

$$S_{\theta_{a_1}, \dots, \theta_{a_r}} = C(\theta) \cup C(\tilde{\theta}) \cup \{\theta_{a_i} = \tilde{\theta}_{a_i} \mid 1 \leq i \leq r\} \cup \{c_{i,j}(\theta) = c_{i,j}(\tilde{\theta}) \mid 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq d_i\}.$$

Le corollaire suivant est basé sur un outil classique en calcul formel : l'astuce de Rabinowitsch ([10, 168]). Pour montrer que le système algébrique admet une solution $u \neq 0$ où u est une des indéterminées, il suffit d'ajouter l'équation $uv - 1 = 0$ au système, où v est une nouvelle indéterminée, et de prouver que le nouveau système a une solution. Il est ensuite possible de tester si les ensembles semi-algébriques sont vides.

Corollaire 1. *Soit $(\theta_1, \dots, \theta_q)$ et $(\tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_q)$ dans \mathcal{C} . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *le paramètre $\theta_{a_{r+1}}$ du système (2.1) est relativement identifiable par rapport à un ensemble éventuellement vide de paramètres $\{\theta_{a_1}, \dots, \theta_{a_r}\}$;*
2. *le système $S_{\theta_{a_1}, \dots, \theta_{a_r}} \cup \{v(\theta_{a_{r+1}} - \tilde{\theta}_{a_{r+1}}) - 1 = 0\}$, où v est une nouvelle variable n'a aucune solution réelle $(\theta_{a_1}, \dots, \theta_{a_q}, \tilde{\theta}_{a_1}, \dots, \tilde{\theta}_{a_q}, v) \in \mathbb{R}^{2q+1}$.*

Remarque 5. *De la même façon qu'à la proposition 3, le corollaire 1 peut-être étendu à une version locale en substituant $C(\tilde{\theta})$ par $C(\tilde{\theta}) \cup V_\theta$ dans le corollaire où V_θ a été défini dans la remarque 4.*

2.3.2 L'algorithme IdentifiabilityTree

2.3.2.1 Concepts utiles

Notation 1. $[\theta_{a_1}, \dots, \theta_{a_r}]$ est la liste⁴ de r éléments distincts ($1 \leq r \leq q$) pris parmi $\{\theta_1, \dots, \theta_q\}$.

Définition 4. 1. Soit $[\theta_{a_1}, \dots, \theta_{a_r}]$ une liste de r éléments distincts de l'ensemble $\{\theta_1, \dots, \theta_q\}$.

La liste vide et toute liste $[\theta_{a_1}, \dots, \theta_{a_i}]$ ($1 \leq i \leq r-1$) sont appelées préfixe de $[\theta_{a_1}, \dots, \theta_{a_r}]$.

2. Soit l_1 et l_2 deux listes. La liste concaténée l_1 cat l_2 est la liste obtenue en regroupant les deux listes l_1 et l_2 l'une à la suite de l'autre.

Pour pouvoir distinguer les paramètres identifiables et les non identifiables dans la liste, la notation suivante a été introduite.

4. En calcul formel, une liste est une suite finie d'éléments.

Notation 2. Soit $l = [\theta_{a_1}, \dots, \theta_{a_r}]$ une liste de r éléments pris dans l'ensemble $\{\theta_1, \dots, \theta_q\}$.

Si le paramètre θ_{a_1} n'est pas identifiable, il sera noté \emptyset_{a_1} dans la liste l .

Plus généralement, si θ_{a_i} ($2 \leq i \leq r$) n'est pas relativement identifiable par rapport à $\{\theta_{a_1}, \dots, \theta_{a_{i-1}}\}$, nous le noterons \emptyset_{a_i} dans l .

Exemple 2.3.3. Pour l'exemple 2.3.1 avec $C(\theta) = \{\mu > 0, K_S > 0, m > 0, Y > 0\}$, la liste $[\mu, \mathcal{K}_S, Y, m]$ a été obtenue. Cette liste signifie entre autre que

- μ est identifiable mais pas K_S ,
- K_S n'est pas relativement identifiable par rapport à l'ensemble $\{\mu\}$, c'est à dire que l'identifiabilité de μ et la résolution de $\phi(\theta) = \phi(\hat{\theta})$ n'implique pas l'identifiabilité de K_S ,
- Y est relativement identifiable par rapport à l'ensemble $\{\mu, K_S\}$ lorsque K_S est identifiable : l'identifiabilité de μ et K_S implique l'identifiabilité de Y et m .

Notons également que la liste $[\mu, \mathcal{K}_S]$ est un préfixe de la liste $[\mu, \mathcal{K}_S, Y]$ par exemple.

Par la suite, pour alléger les notations, un paramètre sera dit relativement identifiable par rapport à une liste de paramètres s'il est identifiable par rapport à l'ensemble correspondant de paramètres.

L'algorithme développé est un arbre de décision basé sur l'utilisation de listes de paramètres. L'avantage de ce type d'algorithme est qu'il évite un grand nombre de tests sur les ensembles semi-algébriques manipulés. Il construit toutes les listes possibles formées des $\theta_1, \dots, \theta_m$ en indiquant les paramètres non identifiables des listes.

Définissons d'abord la notion d'*arbre d'identifiabilité* qui sera la sortie de l'algorithme.

Définition 5. L'arbre d'identifiabilité \mathcal{T} de (2.1) est l'ensemble de toutes les listes possibles de paramètres pris parmi $\{\theta_1, \dots, \theta_q\}$ tels que, pour toute liste $b \in \mathcal{T}$ et tout préfixe p de b , p est suivi dans b par un paramètre identifiable par rapport à p si il en existe un.

Si les listes de \mathcal{T} ont un préfixe en commun, les tests fait sur ce préfixe ne seront fait qu'une seule fois. De plus pour éviter des tests inutiles, les deux remarques suivantes sont utilisées dans l'algorithme.

Remarque A (Conséquence de la proposition 2) Si un préfixe p de la liste \mathcal{T} est suivie par des paramètres identifiables, ces paramètres peuvent être permutés dans cette liste puisqu'ils réfèrent à la même information : chacun d'entre eux est relativement identifiable par rapport à p .

Remarque B Si des listes complétant un préfixe donné p_1 en éléments de \mathcal{T} sont connues, ces listes complètent n'importe quelle permutation de p_1 en éléments de \mathcal{T} .

Exemple 2.3.4. Toujours avec l'exemple 2.3.1 avec $C(\theta) = \{\mu > 0, K_S > 0, m > 0, Y > 0\}$ et la liste $[\mu, \mathcal{K}_S, Y, m]$, la remarque A implique que comme dans la liste, K_S est suivi des deux paramètres identifiables Y et m , l'algorithme ne testera qu'une fois l'identifiabilité relative de Y et m par rapport à la liste $[\mu, \mathcal{K}_S]$.

En ce qui concerne la remarque B, $p_1 = [\mu, \mathcal{K}_S]$ est un préfixe de la liste $[\mu, \mathcal{K}_S, Y, m]$. Si la liste $[\mathcal{K}_S, \mu]$ apparaît au cours de l'algorithme, il ajoutera directement la liste $[\mathcal{K}_S, \mu, Y, m]$ à \mathcal{T} .

Ainsi, l'identifiabilité relative d'un paramètre par rapport à un préfixe p dépend seulement de l'ensemble des paramètres apparaissant dans p .

Cette dernière remarque conduit naturellement à un arbre transversal pré-ordonné [89], ce qui permet de compléter des préfixes avec des listes de \mathcal{T} déjà calculées. De cette façon, des tests d'ensemble vide peuvent être évités diminuant le coût global du calcul de \mathcal{T} .

2.3.2.2 Algorithme IdentifiabilityTree

Rappelons que les tests d'identifiabilité sont réalisés en appliquant le corollaire 1. Pour tester l'identifiabilité relative de $\theta_{a_{r+1}}$ par rapport à un ensemble $\{\theta_{a_1}, \dots, \theta_{a_r}\}$, on teste l'existence d'une solution non nulle d'un système composé d'équations polynômiales et d'inégalités construites à partir de la fonction ϕ , des contraintes des paramètres et des conditions initiales.

L'algorithme *IdentifiabilityTree* est un algorithme récursif qui prend en entrée un préfixe p d'une liste de \mathcal{T} et calcule toutes les listes de \mathcal{T} admettant p comme préfixe, initialement $p = []$. Les listes de \mathcal{T} produites par l'algorithme sont stockées dans l'ensemble \mathcal{T}' initialement vide.

Durant les appels récursifs, le préfixe p est complété d'abord avec tous les paramètres identifiables par rapport à p (l'ordre n'a pas d'importance d'après la remarque A), ensuite par chaque paramètre non identifiable. Les préfixes ainsi construits sont alors complétés par des appels récursifs de l'algorithme. Quand c'est possible, la

remarque B est utilisée pour compléter les préfixes de \mathcal{T}' .
Les étapes de l'algorithme sont résumées ci-dessous :

IdentifiabilityTree (p)

1. Tant qu'il existe des paramètres identifiables par rapport à p faire
 - 1.1 Compléter p avec un paramètre identifiable θ_ν ;
 - 1.2 Vérifier si la remarque B peut être appliquée pour compléter p cat $[\theta]$ en de nouvelles listes de l'arbre d'identifiabilité. Si c'est le cas, ajouter ces nouvelles listes à \mathcal{T}' , arrêter cette boucle Tant que et ne pas faire l'étape 2.
 2. Si il existe des paramètres non identifiables par rapport à p , pour chacun de ces paramètres, faire
 - 2.1 Compléter p avec un paramètre non identifiable \emptyset ;
 - 2.2 Si la remarque B peut-être appliquée pour compléter p cat $[\emptyset]$ avec de nouvelles listes de l'arbre d'identifiabilité, ajouter ces nouvelles listes à \mathcal{T}' . Sinon, faire un rappel récursif de l'algorithme avec p cat $[\emptyset]$ comme entrée.
-

La proposition suivante donne la complexité de l'algorithme.

Proposition 4 (Complexité). *Le nombre de tests effectués par l'algorithme pour vérifier que les ensembles semi-algébriques sont vides est borné par $(2q - \nu + 2)2^{\nu-1}$ où m (resp. ν) est le nombre de paramètres (resp. de paramètres non identifiables) du système (2.1).*

2.3.3 Croissance microbienne dans un réacteur

Reprenons l'exemple (2.3.1) sur la croissance de micro-organismes dans un réacteur. L'algorithme *IdentifiabilityTree* retourne avec $C(\theta) = \{\mu > 0, K_s > 0, m > 0, Y > 0\}$ l'arbre complet donné à la figure 2.1.

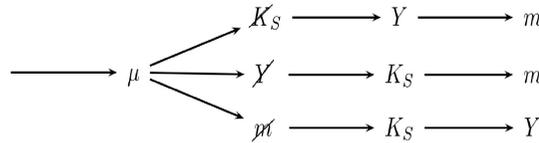


FIGURE 2.1 – Arbre transversal retourné par l'Algorithm IdentifiabilityTree

La sortie de l'algorithme est $\mathcal{T} = \{[\mu, K_S, Y, m], [\mu, Y, K_S, m], [\mu, m, K_S, Y]\}$. Ces listes montrent que μ est identifiable et qu'aucun des autres paramètres n'est identifiable. Remarquons que si un des paramètres parmi K_S , m ou Y est connu alors le système est identifiable.

Remarque 6. 1. *Dans cet exemple, le rôle des contraintes imposées sur les paramètres joue un rôle crucial pour établir l'identifiabilité du système (2.3.1). En effet, si les contraintes $C(\theta)$ ne sont pas considérées, i.e. si $C(\theta) = \emptyset$, l'algorithme renvoie*

$$\mathcal{T} = \{[\mu, K_S, Y, m], [\mu, K_S, m, Y], [\mu, Y, K_S, m], [\mu, Y, m, K_S], [\mu, m, K_S, Y], [\mu, m, Y, K_S]\}.$$

Contrairement à la situation précédente, les trois paramètres doivent être identifiés pour que le modèle soit identifiable.

2. *Pour évaluer le rôle crucial des conditions initiales, introduisons les nouveaux paramètres inconnus x_0 , s_0 , xp_0 , sp_0 correspondant respectivement à $x(0)$, $s(0)$, $\dot{x}(0)$, $\dot{s}(0)$ et ajoutons à $C(\theta)$ les équations obtenues à partir du système (2.6) évaluées en $t = 0$.*

Le calcul de \mathcal{T} montre que dans toutes les listes, le paramètre μ est identifiable et que

- *soit deux paramètres parmi x_0 , s_0 , sp_0 , xp_0 ne sont pas identifiables et exactement un parmi K_S , Y , m ne l'est pas,*

— soit trois paramètres parmi x_0, s_0, sp_0, xp_0 ne sont pas identifiables.

La sortie de l'algorithme donne ainsi les choix possibles sur les paramètres du modèle pour obtenir l'identifiabilité de chacun des paramètres.

3. De la même façon, sans considérer les conditions initiales, mais en supposant que les sorties x et s sont observées, l'arbre d'identifiabilité est réduit à $\{[K_S, Y, m, \mu]\}$. Ce qui signifie que le modèle est identifiable.
4. Les auteurs des articles [37, 74] ont prouvé que dans le cas $K_d = mY$, les paramètres et les combinaisons de paramètres $x(0), K_d mY, s(0)/Y, s(0)/K_s$ sont identifiables, alors que les paramètres pris individuellement $m, Y, s(0), K_s$ ne sont pas identifiables. De plus, en utilisant les combinaisons de paramètres, ils en ont déduits que si $s(0)$ ou K_s sont connus alors tous les paramètres sont identifiables. L'algorithme *IdentifiabilityTree* nous donne directement le résultat de façon automatique.

2.3.4 Le modèle de la transmission du chikungunya

Le second exemple concerne un modèle épidémiologique décrivant la transmission du chikungunya à l'homme. Il est repris de l'article [145] et est intéressant de part ses non linéarités et son nombre de paramètres.

Le système est composé de deux sous-systèmes. Le premier décrit l'évolution des trois états biologiques du cycle de vie du moustique quant au deuxième sous-système, construit à partir d'un modèle de population, il décrit la transmission du virus du chikungunya entre la population du moustique et la population humaine. Un humain est infecté lorsqu'un moustique infecté le pique et un moustique est infecté lorsqu'il pique un humain infecté. Ce modèle suppose qu'il n'y a pas de transmission verticale pour les moustiques et les hommes, c'est à dire qu'il n'y a pas de transmission aux générations futures. Le modèle ré-écrit en terme de densité est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} E'(t) = bA(t) \left(1 - \frac{E(t)}{K_E}\right) - (s+d)E(t) \\ L'(t) = sE(t) \left(1 - \frac{L(t)}{K_L}\right) - (s_L + d_L)L(t) \\ A'(t) = s_L L(t) - d_m A(t) \end{array} \right. \quad (a) \\ \left\{ \begin{array}{l} S'_H(t) = -(b_H + \beta_H I_m(t)) S_H(t) + b_H \\ I'_H(t) = \beta_H I_m(t) S_H(t) - (\gamma + b_H) I_H(t) \\ I'_m(t) = - \left(s_L \frac{L(t)}{A(t)} + \beta_m I_H(t) \right) I_m(t) + \beta_m I_H(t) \end{array} \right. \quad (b) \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Dans le système (2.8)(a), E est le nombre d'oeufs, L le nombre de larves et A est le nombre d'adultes femelles. En effet, seules les moustiques femelles transmettent la maladie. S_H correspond au nombre d'humains susceptibles d'être infectés, I_H au nombre d'humains infectés et I_m au nombre de moustiques infectés.

Le vecteur de paramètres inconnus est $\theta = (k_E, k_L, b_H, \beta_H, \beta_m, d_L, d_m, \gamma, b, d, s, s_L)$ où

- b est le taux de ponte intrinsèque des femelles, s (resp. s_L) est le taux de transfert de E à L (resp. de L à A);
- K_E et K_L sont les capacités d'accueil du gîte en oeufs et en larves respectivement;
- d, d_L et d_m sont les taux de mortalités des oeufs, des larves et des adultes respectivement;
- b_H est le taux de natalité;
- γ est le taux de transfert des infectés vers les immunisés;
- β_H (resp. β_m) est le taux de contact infectieux entre humains susceptibles et vecteurs (resp. moustiques susceptibles et humains).

Naturellement, les paramètres réels du système (2.8) sont supposés positifs ce qui conduit à considérer l'ensemble $C(\theta) = \{b_H > 0, \beta_H > 0, \gamma > 0, s_L > 0, \beta_m > 0, d > 0, d_L > 0, d_m > 0, b > 0, s > 0, K_E > 0, K_L > 0, b_H > 0\}$. Par la suite, nous supposons qu'aucun des 12 paramètres est connu.

Le système est défini sur $\Delta \times \Omega$ où

$$\Delta = \left\{ (E(t), L(t), A(t)) \in (\mathbb{R}^+)^3 \mid \forall t \in [0, +\infty), \begin{array}{l} 0 \leq E(t) \leq K_E \\ 0 \leq L(t) \leq K_L \\ 0 \leq A(t) \leq \frac{s_L}{d_m} K_L \end{array} \right\} \quad (2.9)$$

et

$$\Omega = \left\{ (S_H(t), I_H(t), I_m(t)) \in (\mathbb{R}^+)^3 \mid \forall t \in [0, +\infty), \begin{array}{l} 0 \leq S_H(t) + I_H(t) \leq 1 \\ 0 \leq I_m(t) \leq 1 \end{array} \right\}. \quad (2.10)$$

| | |
|--|--|
| $\{[K_L, b_H, \beta_H, \beta_m, d_m, \gamma, \cancel{K}_E, d, s, \cancel{b}, d_L, s_L],$ | $[K_L, b_H, \beta_H, \beta_m, d_m, \gamma, \cancel{K}_E, d, s, \cancel{d}_L, b, s_L],$ |
| $[K_L, b_H, \beta_H, \beta_m, d_m, \gamma, \cancel{K}_E, d, s, \cancel{s}_L, b, d_L],$ | $[K_L, b_H, \beta_H, \beta_m, d_m, \gamma, \cancel{b}, \cancel{K}_E, d, d_L, s, s_L],$ |
| $[K_L, b_H, \beta_H, \beta_m, d_m, \gamma, \cancel{b}, \cancel{d}, K_E, d_L, s, s_L],$ | $[K_L, b_H, \beta_H, \beta_m, d_m, \gamma, \cancel{b}, \cancel{d}_L, K_E, d, s, s_L],$ |
| $[K_L, b_H, \beta_H, \beta_m, d_m, \gamma, \cancel{b}, \cancel{s}, K_E, d, d_L, s_L],$ | $[K_L, b_H, \beta_H, \beta_m, d_m, \gamma, \cancel{b}, \cancel{s}_L, K_E, d, d_L, s],$ |
| $[K_L, b_H, \beta_H, \beta_m, d_m, \gamma, \cancel{d}, K_E, s, \cancel{b}, d_L, s_L],$ | $[K_L, b_H, \beta_H, \beta_m, d_m, \gamma, \cancel{d}, K_E, s, \cancel{d}_L, b, s_L],$ |
| $[K_L, b_H, \beta_H, \beta_m, d_m, \gamma, \cancel{d}, K_E, s, \cancel{s}_L, b, d_L],$ | $[K_L, b_H, \beta_H, \beta_m, d_m, \gamma, \cancel{d}_L, sl, \cancel{K}_E, b, d, s],$ |
| $[K_L, b_H, \beta_H, \beta_m, d_m, \gamma, \cancel{d}_L, s_L, \cancel{b}, K_E, d, s],$ | $[K_L, b_H, \beta_H, \beta_m, d_m, \gamma, \cancel{d}_L, s_L, \cancel{d}, K_E, b, s],$ |
| $[K_L, b_H, \beta_H, \beta_m, d_m, \gamma, \cancel{d}_L, s_L, \cancel{s}, K_E, b, d],$ | $[K_L, b_H, \beta_H, \beta_m, d_m, \gamma, \cancel{s}, K_E, d, \cancel{b}, d_L, s_L],$ |
| $[K_L, b_H, \beta_H, \beta_m, d_m, \gamma, \cancel{s}, K_E, d, \cancel{d}_L, b, s_L],$ | $[K_L, b_H, \beta_H, \beta_m, d_m, \gamma, \cancel{s}, K_E, d, \cancel{s}_L, b, d_L],$ |
| $[K_L, b_H, \beta_H, \beta_m, d_m, \gamma, \cancel{s}_L, d_L, \cancel{K}_E, b, d, s],$ | $[K_L, b_H, \beta_H, \beta_m, d_m, \gamma, \cancel{s}_L, d_L, \cancel{b}, K_E, d, s],$ |
| $[K_L, b_H, \beta_H, \beta_m, d_m, \gamma, \cancel{s}_L, d_L, \cancel{d}, K_E, b, s],$ | $[K_L, b_H, \beta_H, \beta_m, d_m, \gamma, \cancel{s}_L, d_L, \cancel{s}, K_E, b, d]$ |

TABLE 2.1 – Ensemble des listes fournies par l’algorithme IdentifiabilityTree

L’analyse de stabilité est détaillée dans [145].

Les biologistes, en plaçant des pièges dans lesquels les femelles vont pondre peuvent avoir une estimation de l’évolution du nombre de larves de moustiques chaque semaine. Ensuite, lors d’épidémies importantes, les personnels de santé remontent le nombre d’infectés aux instances nationales. C’est pourquoi, nous avons supposé que les sorties du modèle sont le nombre de larves $y_1 := L$, le nombre d’humains susceptibles d’être infectés $y_2 := S_H$ et le nombre d’humains infectés $y_3 := I_H$.

Dans le but d’appliquer l’algorithme de Rosenfeld-Groebner au système (2.8), la dernière équation de (2.8)(b) est multipliée par la fonction A . Cet algorithme avec l’ordre d’élimination $[y_1, y_2, y_3] \prec [S_H, I_H, L, I_M, E, A]$ retourne trois équations différentielles liant les paramètres inconnus et les fonctions y_1, y_2, y_3 . L’une de ces équations n’a pas de coefficient constant c_{ij} et par conséquent, ses coefficients ne peuvent être estimés qu’à une constante multiplicative près à partir de données expérimentales (voir [196]). Cette équation est alors divisée par un de ses coefficients non nul, $K_E K_L$, pour obtenir un polynôme de la forme (2.4).

Remarque 7. Dans [196], il a été montré que sous certaines conditions techniques, nous retrouvions les mêmes polynômes ES avec l’ordre d’élimination $[y_1, y_2, y_3] \prec [S_H, I_H, L, I_M, E, A]$ et l’ordre d’élimination $[\theta] \prec [y_1, y_2, y_3] \prec [S_H, I_H, L, I_M, E, A]$. L’avantage du premier est qu’il est plus rapide et aboutit plus facilement lorsque le système présente plusieurs non linéarités. En effet, moins de variables sont manipulées.

À partir de ces polynômes ES écrits sous la forme (2.4), nous avons obtenu un résumé exhaustif contenant 74 polynômes algébriques dépendant des paramètres. Notre algorithme a été appliqué au système obtenu à partir de $C(\theta)$ et la fonction ϕ . Malgré les coûts de calcul, la taille du résumé exhaustif et donc le nombre d’expressions algébriques, l’algorithme a fourni l’arbre d’identifiabilité. Il a retourné l’ensemble donné à la table 2.1⁵.

Pour les sorties considérées, y_1, y_2 et y_3 , l’ensemble des listes montre que $K_L, b_H, \beta_H, \beta_m, d_m, \gamma$ sont identifiables. De plus, il indique quelles autres paires de paramètres doivent être estimées pour obtenir un modèle identifiable. Beaucoup d’autres informations peuvent être extraites de ces listes. Par exemple, si un expérimentateur veut estimer le paramètre non identifiable K_E à partir des données expérimentales, il doit estimer soit d soit s .

2.4 Estimation de paramètres à partir des polynômes ES

L’estimation des paramètres est généralement effectuée en optimisant une fonction objectif sur l’espace des paramètres [110, 210]. Or, la plupart des méthodes d’optimisation qui sont raisonnables en temps nécessitent une première estimation. Elle peut être obtenue soit par des tests dans le domaine industriel, soit par une procédure numérique basée sur des mesures [21, 63, 126, 181, 196]. La qualité de cette première estimation

5. Le temps de calcul pour obtenir l’arbre d’identifiabilité est de 1634 s avec un Intel(R) Core(TM) i7 2.5 GHz processor avec 8 GO de RAM.

initiale garantit que le processus d'optimisation prendra un temps raisonnable et ne convergera pas vers une solution locale irréaliste. Il est possible d'obtenir cette première estimation à partir des relations polynômiales. Par exemple, les auteurs de [181] utilisent les intégrales itératives dans le domaine des fréquences alors que [126] exploite les fonctions de modulation mais sur des exemples de modèles très simples.

Toutes ces méthodes utilisent de façon avantageuse les propriétés de l'intégrale. En effet, dans la plupart des cas, leur utilisation permet de diminuer l'ordre des dérivées dans les relations différentielles. L'estimation des dérivées surtout à partir du degré 3 est un problème mal posé. Les intégrales atténuent également l'effet de certains bruits [81, 195]. Enfin, elles permettent d'intégrer les conditions initiales apportant ainsi de l'information au problème d'optimisation à résoudre.

Dans [203], nous avons proposé une méthode basée sur l'utilisation des distributions. Dans cet article, nous avons défini un cadre rigoureux en étudiant les erreurs dues à la méthode, au choix de la méthode d'intégration et au bruit. Les erreurs que nous avons obtenues dépendent du choix des fonctions tests et de leur support. Ce travail théorique donne un degré de liberté supplémentaire pour améliorer les résultats numériques.

2.4.1 Méthode d'estimation à partir du polynôme ES

Dans cette partie est présentée la méthode classique utilisant directement le polynôme ES. Pour simplifier les notations, la méthode est présentée sur un seul polynôme et l'indice i est omis. De plus, nous supposons que le modèle étudié est identifiable.

À partir d'un ensemble de mesures discrètes $(t_i)_{1 \leq i \leq M}$ ($M \geq q$), le polynôme ES est évalué en chaque t_{n_0}, \dots, t_{n_1} , $1 \leq n_0 < n_1 \leq M$ conduisant à la résolution d'un système linéaire rectangulaire

$$A\gamma = b \quad (2.11)$$

avec

$$\begin{aligned} A &= (A_{i,j})_{\substack{i=n_0, \dots, n_1 \\ j=1, \dots, q}} = (m_j(y(t_i), u(t_i)))_{\substack{i=n_0, \dots, n_1 \\ j=1, \dots, q}} \\ b &= (b_i)_{i=n_0, \dots, n_1} = -(m_0(t_i))_{i=n_0, \dots, n_1}, \gamma = (\gamma_j(\theta))_{j=1, \dots, q} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Classiquement, la solution de ce système est trouvée en résolvant le problème de moindres carrés suivant :

$$\min_{(\gamma_1(\theta), \dots, \gamma_q(\theta))} \sum_{i=n_0}^{n_1} \left(\sum_{j=1}^q A_{i,j} \gamma_j(\theta) - b_i \right)^2. \quad (2.13)$$

2.4.2 Approche basée sur les distributions

Les fonctions tests sont des fonctions indéfiniment dérivables définies sur un support compact. Par la suite, les fonctions tests seront notées ψ_i et leur support $\text{supp}(\psi_i) = [t_i - \epsilon, t_i + \epsilon]$, $\epsilon > 0$.

Supposons que les fonctions $u, y_j, x_i, j = 1, \dots, m, i = 1, \dots, n$ vérifient l'hypothèse suivante :

(H) : elles sont C^∞ dans $]0, T[$ et sont égales à zéro sur $] -\infty, 0[$, $]T, +\infty[$. Elles coïncident dans $]0, T[$ avec les fonctions qui sont C^∞ dans $[0, T[$.

Après avoir multiplié le polynôme ES par la fonction test ψ_i et avoir intégré par parties sur $[t_i - \epsilon, t_i + \epsilon]$, une nouvelle relation est obtenue. Elle peut se ré-écrire :

$$\int_{t_i - \epsilon}^{t_i + \epsilon} P(y, u, \theta)(s) \psi_i(s) ds = \int_{t_i - \epsilon}^{t_i + \epsilon} m_0(y, u)(s) \psi_i(s) ds + \sum_{j=1}^q \gamma_j(\theta) \int_{t_i - \epsilon}^{t_i + \epsilon} m_j(y, u)(s) \psi_i(s) ds = 0. \quad (2.14)$$

À partir de la relation (2.14), on peut construire le système rectangulaire suivant ($1 \leq n_0 < n_1 \leq M$) :

$$A^\psi \gamma^\psi = b^\psi \quad (2.15)$$

avec

$$\begin{aligned} A^\psi &= (A_{i,j}^\psi)_{\substack{i=n_0, \dots, n_1 \\ j=1, \dots, q}} = \left(\int_{t_i - \epsilon}^{t_i + \epsilon} m_j(y, u)(s) \psi_i(s) ds \right)_{\substack{i=n_0, \dots, n_1 \\ j=1, \dots, q}}, \\ b^\psi &= (b_i^\psi)_{i=n_0, \dots, n_1} = \left(- \int_{t_i - \epsilon}^{t_i + \epsilon} m_0(y, u)(s) \psi_i(s) ds \right)_{i=n_0, \dots, n_1}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Dans ce cas, le problème de moindres carrés à résoudre est le suivant :

$$\min_{(\gamma_1(\theta)^\psi, \dots, \gamma_q(\theta)^\psi)} \sum_{i=n_0}^{n_1} \left(\sum_{j=1}^q A_{i,j}^\psi \gamma_j(\theta)^\psi - b_i^\psi \right)^2 \quad (2.17)$$

Pour simplifier les notations, nous posons $m_j = m_j(y, u)$ pour $j = 1, \dots, q$. De plus, la norme infinie, $\|\cdot\|_\infty$, induite par la norme matricielle sera utilisée [167].

Dans les applications numériques, la factorisation QR a été utilisée pour résoudre (2.11) et (2.15). Plutôt que de résoudre un problème de moindres carrés basé sur un système rectangulaire de dimension $M \times q$, la factorisation QR consiste à résoudre un problème équivalent basé sur l'inversion d'une matrice carrée inversible de dimension $q \times q$. C'est pourquoi, par la suite, les erreurs seront données dans le cas particulier de systèmes carrés. Un exemple de calcul d'erreur a été donné dans [203].

Cette remarque justifie les deux premières hypothèses suivantes. Les deux autres hypothèses concernent les fonctions tests.

Hypothèses 1. 1. Les matrices A et A^ψ sont carrées et de dimension $q \times q$.

2. A et A^ψ sont inversibles.

3. Les fonctions tests ψ_i , $i = 1, \dots, q$ sont supposées avoir la même valeur maximale notée ψ_{\max} , valeur atteinte en t_i .

4. Pour tout $i, j = 1, \dots, q$, $m_j \psi_i \in C^2([t_i - \epsilon, t_i + \epsilon])$.

Nous allons tout d'abord donner l'erreur due à l'approximation du système (2.11) par le système (2.15). La seconde erreur portera sur la méthode d'intégration utilisée pour estimer les intégrales dans (2.15) et finalement la troisième sur le bruit du signal.

2.4.2.1 Erreur due à la méthode

Sans bruit, le système (2.15) est un système approché du système (2.11). En effet, soit $\epsilon > 0$. Par la méthode du point milieu, chaque coefficient $A_{i,j}^\psi$ est égal à :

$$\int_{t_i - \epsilon}^{t_i + \epsilon} m_j(s) \psi_i(s) ds = 2\epsilon m_j(t_i) \psi_i(t_i) + \frac{\epsilon^3}{3} (m_j \psi_i)''(\zeta_i), \quad \zeta_i \in]t_i - \epsilon, t_i + \epsilon[. \quad (2.18)$$

Soit $E_{ij} = (m_j \cdot \psi_i)''(\zeta_i)$, $j = 1, \dots, q$ and $F_i = (m_0 \cdot \psi_i)''(\zeta_i)$. Selon l'hypothèse 3, $\psi_i(t_i) = \psi_{\max}$ pour tout $i = 1, \dots, M$ et les relations suivantes sont obtenues :

$$\frac{A^\psi}{2\epsilon} = \psi_{\max} A + \psi_{\max} \delta A, \quad \frac{b^\psi}{2\epsilon} = \psi_{\max} b + \psi_{\max} \delta b, \quad (2.19)$$

avec

$$\delta A = \frac{\epsilon^2}{6\psi_{\max}} E, \quad \delta b = \frac{\epsilon^2}{6\psi_{\max}} F, \quad (2.20)$$

où $E = (E_{i,j})_{\substack{i=1, \dots, q \\ j=1, \dots, q}}$ et $F = (F_i)_{i=1, \dots, q}^T$. La substitution de la relation (2.19) dans l'équation (2.15) donne

$$(A + \delta A) \gamma^\psi = b + \delta b. \quad (2.21)$$

Ainsi, le système (2.15) est un système perturbé du système (2.11) si $\|\delta A\|_\infty$ et $\|\delta b\|_\infty$ sont suffisamment petit.

La proposition suivante donne une estimation de l'erreur relative entre γ et γ^ψ .

Proposition 5. Si $\|\delta A\|_\infty$ et $\|\delta b\|_\infty$ sont suffisamment petits, la solution du système (2.15) est une solution approchée du système (2.11).

Soit $K(A)$ le conditionnement de la matrice A . Soit $M_2 = \max(\|E\|_\infty, \|F\|_\infty)$.

Si

$$\frac{\epsilon^2 M_2}{\psi_{\max}} < \frac{6\|A\|_\infty}{K(A)}, \quad (2.22)$$

alors l'erreur relative entre la solution réelle γ de (2.11) et la solution approchée γ^ψ de (2.15) satisfait :

$$\frac{\|\gamma^\psi - \gamma\|_\infty}{\|\gamma\|_\infty} \leq \frac{1}{\frac{6\psi_{\max}}{\epsilon^2 M_2} \frac{\|A\|_\infty}{K(A)} - 1} \left(\frac{\|A\|_\infty}{\|b\|_\infty} + 1 \right). \quad (2.23)$$

Remarque 8. — L'erreur relative dépend du choix de la fonction test.

— Selon (2.23), plus la longueur du support des fonctions test est petite, meilleure sera l'estimation.

Dans (2.22) et (2.23), $\|E\|_\infty$ et $\|F\|_\infty$ dépendent de l'inconnue ζ_i donnée dans l'équation (2.18). Par conséquent, (2.22) et le membre de droite de (2.23) ne peuvent pas être directement calculés. Le corollaire suivant donne un moyen d'obtenir une expression calculable.

Corollaire 2. Notons $\tilde{M}_2 = \max_{1 \leq i \leq q} \sum_{j=0}^q \max_{t \in [0, T]} (|m_j \psi_k|''(t)|)$. Sous l'hypothèse de la proposition 5, si

$$\frac{\epsilon^2 \tilde{M}_2}{\psi_{\max}} < \frac{6\|A\|_\infty}{K(A)}, \quad (2.24)$$

l'erreur relative entre la solution réelle γ de (2.11) et la solution approchée γ^ψ de (2.15) satisfait :

$$\frac{\|\gamma^\psi - \gamma\|_\infty}{\|\gamma\|_\infty} \leq \frac{1}{\frac{6\psi_{\max}}{\epsilon^2 \tilde{M}_2} \frac{\|A\|_\infty}{K(A)} - 1} \left(\frac{\|A\|_\infty}{\|b\|_\infty} + 1 \right) \quad (2.25)$$

Dans les applications numériques, les intégrales dans le système (2.15) sont estimées par une méthode d'intégration numérique, dans notre cas, la méthode composite de Newton-Cotes. Dans la partie suivante, l'erreur due à ce choix est donnée.

2.4.2.2 Erreur due à la méthode numérique

Dans toute procédure d'intégration numérique se pose la question du pas de temps utilisé pour définir l'intervalle d'intégration.

Les matrices A et A^ψ définies en (2.12) et (2.16) sont construites à partir de la suite $(\tilde{t}_i)_{i=1, \dots, M}$ qui peut être une sous-suite de $(\tilde{t}_l)_{l=1, \dots, V}$, $V \geq M$ où $\tilde{t}_1 = 0$, $\tilde{t}_V = T$, $\tilde{t}_l = \tilde{t}_1 + (l-1)\tilde{h}$, $l \geq 2$ et $\tilde{h} = 1/(V-1)$. Ainsi, les intégrales peuvent être calculées avec plus de temps d'intégration que ceux utilisés pour construire les matrices A et A^ψ permettant d'améliorer l'estimation de paramètres. Nous allons donner dans la suite une condition sur \tilde{h} permettant de déduire une borne supérieure à l'erreur relative entre le système (2.15) et le système obtenu en approchant les intégrales par une méthode composite de Newton-Cotes.

Le support de la fonction test ψ_i est supposé être égal à $[\tilde{t}_{\tau-r}, \tilde{t}_{\tau+r}]$, $r > 0$. Utilisant l'interpolation de Lagrange pour approcher $m_j \psi_i$ dans les intégrales du système (2.15), ces dernières peuvent se ré-écrire :

$$I^{(i,j)} = I_\nu^{(i,j)} + \tilde{E}_\nu^{i,j}$$

où $I^{(i,j)} = \int_{\text{supp}(\psi_i)} (m_j \psi_i)(s) ds$, $I_\nu^{(i,j)}$ est une formule de quadrature dans laquelle les fonctions $m_j \psi_i$ ont été remplacées par des polynômes d'interpolation de degré ν , $\nu \geq 0$ sur le sous-intervalle $[\tilde{t}_{\tau-r}, \tilde{t}_{\tau+r}]$. Par conséquent,

$I_\nu^{(i,j)}$ a la forme suivante : $I_\nu^{(i,j)} = \sum_{k=\tau-r}^{\tau+r} \alpha_k^{(i,j)} m_j(\tilde{t}_k) \psi_i(\tilde{t}_k)$. Finalement, pour toute formule de Newton-Cotes,

il existe $\zeta \in]0, T[$ tel que l'erreur $\tilde{E}_\nu^{i,j}$ peut-être ré-écrite ([167], Théorème 9.2) :

— si ν est pair et $(m_j \psi_i) \in C^{\nu+2}([0, T])$, $\tilde{E}_\nu^{i,j} = \frac{C_\nu}{(\nu+2)!} \tilde{h}^{\nu+3} (m_j \psi_i)^{(\nu+2)}(\zeta)$

— si ν est impair et $(m_j \psi_i) \in C^{\nu+1}([0, T])$, $\tilde{E}_\nu^{i,j} = \frac{C_\nu}{(\nu+1)!} \tilde{h}^{\nu+2} (m_j \psi_i)^{(\nu+1)}(\zeta)$

avec C_ν la constante définie par

$$\begin{cases} \int_0^\nu t \pi_{\nu+1}(t) dt & \text{si } \nu \text{ est pair,} \\ \int_0^\nu \pi_{\nu+1}(t) dt & \text{si } \nu \text{ est impair,} \end{cases} \quad \text{où } \pi_{\nu+1}(t) = \prod_{i=0}^\nu (t-i). \quad (2.26)$$

Dans les applications numériques, le système (2.15) est substitué par

$$A^{\psi,a} \gamma^{\psi,a} = b^{\psi,a} \quad (2.27)$$

avec $A^{\psi,a} := (I_\nu^{(i,j)})_{\substack{i=1, \dots, q \\ j=1, \dots, q}}$, $b^{\psi,a} := (-I_\nu^{i,0})_{i=1, \dots, q}$.

Notons

- ✓ $\delta A^{\psi,a} := (\tilde{E}_\nu^{i,j})_{i=1,\dots,q, j=1,\dots,q}$, $\delta b^{\psi,a} := (\tilde{E}_\nu^{i,0})_{i=1,\dots,q}$,
- ✓ $K(A^\psi)$ le conditionnement de la matrice A^ψ ,
- ✓ $\beta = \nu + 2$ si ν est impair et $\beta = \nu + 3$ si ν est pair,
- ✓ $M_\beta = \max_{1 \leq i \leq q} \sum_{j=0}^q \max_{t \in [0,T]} |(m_j \psi_k)^{(\beta-1)}(t)|$.

La proposition suivante donne le lien entre γ^ψ , $\gamma^{\psi,a}$ et δA^ψ , δb^ψ .

Proposition 6. *Si $\|\delta A^{\psi,a}\|_\infty$ et $\|\delta b^{\psi,a}\|_\infty$ sont suffisamment petits, une solution de (2.27) est une solution approchée de (2.15).*

Si

$$\tilde{h}^\beta < \frac{\|A^\psi\|_\infty (\beta-1)!}{K(A^\psi) |C_\nu| M_\beta} \quad (2.28)$$

alors l'erreur relative entre la solution réelle γ^ψ de (2.15) et la solution approchée $\gamma^{\psi,a}$ de (2.27) vérifie :

$$\frac{\|\gamma^\psi - \gamma^{\psi,a}\|_\infty}{\|\gamma^\psi\|_\infty} \leq \frac{1}{\frac{(\beta-1)! \|A^\psi\|_\infty}{K(A^\psi) |C_\nu| \tilde{h}^\beta M_\beta} - 1} \left(1 + \frac{\|A^\psi\|_\infty}{\|b^\psi\|_\infty} \right) \quad (2.29)$$

Remarque 9. 1. Dans le cas de

— la formule des trapèzes, l'inégalité (2.29) est ré-écrite ($\nu = 1$) :

$$\frac{\|\gamma^\psi - \gamma^{\psi,a}\|_\infty}{\|\gamma^\psi\|_\infty} \leq \frac{1}{\frac{12 \|A^\psi\|_\infty}{K(A^\psi) \tilde{h}^3 M_3} - 1} \left(1 + \frac{\|A^\psi\|_\infty}{\|\delta b^\psi\|_\infty} \right). \quad (2.30)$$

— la formule de Simpson, l'inégalité (2.29) est ré-écrite ($\nu = 2$) :

$$\frac{\|\gamma^\psi - \gamma^{\psi,a}\|_\infty}{\|\gamma^\psi\|_\infty} \leq \frac{1}{\frac{90 \|A^\psi\|_\infty}{K(A^\psi) \tilde{h}^5 M_5} - 1} \left(1 + \frac{\|A^\psi\|_\infty}{\|\delta b^\psi\|_\infty} \right). \quad (2.31)$$

2. Plus le pas de temps \tilde{h} est petit, plus l'erreur relative (2.29) est petite.

2.4.2.3 Erreur due au bruit

Dans [81], les auteurs ont mis en évidence deux sortes de perturbations. Les premières comme les perturbations constantes d'amplitude inconnue sont dites structurées et sont solutions d'une équation différentielle linéaire homogène. Elles peuvent être annihilées par des opérateurs différentiels linéaires. C'est le cas, par exemple, d'un bruit aléatoire de moyenne constante et inconnue. Les secondes sont dites non structurées et correspondent aux perturbations hautes fréquences qui peuvent être réduites par des filtres passe bas comme les intégrales itérées. Nous avons montré que la méthode que nous proposons permet d'éliminer une partie du bruit structuré.

Tout bruit $\eta(t)$ peut s'écrire $\eta(t) = \eta_0(t) + \kappa$ où $\eta_0(t)$ est un bruit de moyenne nulle et γ est une constante représentant la moyenne de $\eta(t)$. Soit une sortie mesurée s'écrivant $y_\eta(t) = y(t) + \eta(t)$ où $y(t)$ est la sortie au temps t sans perturbation. Dans le système (2.15), y est alors substitué par y_η .

Supposons que les intégrales sont de la forme $\int_{\text{supp}(\psi_i)} y_\eta^{(l)}(s) \psi_i(s) ds$, $l \geq 0$. La forme du bruit dans (2.15)

est alors : $\int_{\text{supp}(\psi_i)} \eta(s) \psi_i^{(l)}(s) ds$. Comme $\eta(t) = \eta_0(t) + \kappa$, l'intégrale s'écrit :

$$\int_{\text{supp}(\psi_i)} \eta(s) \psi_i^{(l)}(s) ds = \int_{\text{supp}(\psi_i)} \eta_0(s) \psi_i^{(l)}(s) ds + \kappa \int_{\text{supp}(\psi_i)} \psi_i^{(l)}(s) ds$$

soit,

$$\int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} \eta(t) \psi_i^{(l)}(t) dt = \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} \eta_0(t) \psi_i^{(l)}(t) dt + \gamma \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} \psi_i^{(l)}(t) dt.$$

Si $l \geq 1$, $\int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} \psi_i^{(l)}(t) dt = \psi_i^{(l-1)}(t_0+\epsilon) - \psi_i^{(l-1)}(t_0-\epsilon)$ est nul dès que $0^+ \notin [t_0-\epsilon, t_0+\epsilon]$. Ainsi, les perturbations

constantes sont annihilées lorsque 0^+ n'est pas dans le support de ψ_i .

Enfin, le choix de la fonction test peut permettre d'atténuer l'effet du bruit de moyenne nulle. En effet, on a

$$\left\| \left(\int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} \eta_0(t) \psi_i^{(l)}(t) dt \right)_{0 \leq i \leq N} \right\|_1^2 \leq \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} (\eta_0(t))^2 dt \times \psi_{\epsilon, \varphi, N} \quad (2.32)$$

et

$$E \left(\int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} (\eta_0(t))^2 dt \times \psi_{\epsilon, \varphi, N} \right) \leq \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} \text{var}(\eta_0(t)) dt \times \psi_{\epsilon, \varphi, N} \quad (2.33)$$

où var est la variance, $E(X)$ la valeur attendue de la variable aléatoire X et $\psi_{\epsilon, \varphi, N} = \sum_{i=0}^N \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} |\psi_i^{(l)}(t)|^2 dt$.

$\psi_{\epsilon, N, \varphi}$ donne un critère pour choisir une fonction test. Il permet également de déterminer une borne inférieure de la longueur du support des fonctions test permettant d'atténuer l'effet du bruit. Des exemples numériques sont donnés dans [195].

Remarque 10. *Selon la Remarque 8, un compromis doit être fait entre la longueur du support des fonctions tests : en diminuant la longueur du support l'erreur relative donnée par (2.23) est diminuée et en augmentant la longueur du support, l'effet du bruit est atténué.*

Dans ce qui suit, l'erreur relative entre la solution de (2.15) et celle obtenue avec (2.15) lorsqu'il y a du bruit est étudiée.

Quand la sortie est perturbée par le bruit, $m_j(y, u)$ dans (2.15) est substitué par $m_j(y_\eta, u)$ et c'est le système suivant qui est résolu

$$(A^\psi + \delta A^\psi) \tilde{\gamma}^\psi = b^\psi + \delta b^\psi \quad (2.34)$$

$$\text{avec } A^\psi + \delta A^\psi = \left(\int_{t_i-\epsilon}^{t_i+\epsilon} m_j(y_\eta, u)(s) \psi_i(s) ds \right)_{i=1, \dots, q; j=1, \dots, q},$$

$$b^\psi + \delta b^\psi = \left(- \int_{t_i-\epsilon}^{t_i+\epsilon} m_0(y_\eta, u)(s) \psi_i(s) ds \right)_{i=1, \dots, q}.$$

Dans le but de mesurer l'erreur due au bruit, nous supposons que $m_j(y_\eta, u)(t)$ s'écrit $m_j(y_\eta, u)(t) = m_j(t) + f_{\eta, j}(t)$ où $f_{\eta, j}$ contient toutes les perturbations.

La proposition suivante donne l'estimation de l'erreur relative entre les solutions de (2.15) et (2.34).

Proposition 7. *Soit $\gamma^\psi \in \mathbb{R}^q$ la solution de (2.15) et $\tilde{\gamma}^\psi$ la solution de (2.34). Si $\|\delta A^\psi\|_\infty$ et $\|\delta b^\psi\|_\infty$ sont suffisamment petits, une solution de (2.34) est une solution approchée de (2.15).*

Supposons que $m_j(y_\eta, u)(t)$ s'écrit $m_j(y_\eta, u)(t) = m_j(t) + f_{\eta, j}(t)$. Si $M_\eta = \max_{\substack{t \in [0, T] \\ 1 \leq i \leq q, 0 \leq j \leq q}} |f_{\eta, j}(t) \psi_i(t)|$ existe et

$$M_\eta < \frac{\|A^\psi\|_\infty}{2q\epsilon K(A^\psi)} \quad (2.35)$$

alors, l'erreur relative entre γ^ψ et $\tilde{\gamma}^\psi$ est donnée par :

$$\frac{\|\gamma^\psi - \tilde{\gamma}^\psi\|_\infty}{\|\gamma^\psi\|_\infty} \leq \frac{1}{\frac{\|A^\psi\|_\infty}{2\epsilon q K(A^\psi) M_\eta} - 1} \left(1 + \frac{\|A^\psi\|_\infty}{\|b^\psi\|_\infty} \right). \quad (2.36)$$

Remarque 11. *La proposition précédente montre là encore l'importance du choix de la fonction test et de son support. Celui-ci peut-être fait en faisant une étude préalable du système et du nombre de mesures (voir [195]).*

2.4.2.4 Application au modèle de transmission du chikungunya

Cette méthode d'estimation a été appliquée au modèle décrit à la section 2.3.4. Dans cette partie, nous cherchons à estimer les paramètres s , s_L , K_E , K_L , β_H et β_m . Rappelons que les sorties du modèle sont $y_1 = L$, $y_2 = S_H$ et $y_3 = I_H$. En supposant b , b_H , d , d_L , d_m connus, les paramètres s , s_L , β , β_H , K_E , K_L sont identifiables d'après l'algorithme *IdentifiabilityTree*.

Dans [196], les polynômes ES sont utilisés pour faire une première estimation des paramètres sans connaissance a priori de leur valeur. Il serait donc tentant de reprendre les relations obtenues à la section 2.3.4. Or, l'ordre de dérivation des polynômes ES est égal à 3 rendant difficile l'exploitation de ces relations. En effet, estimer les dérivées à partir de données bruitées est un problème mal posé.

Une autre difficulté cette fois-ci numérique provient de la grande différence de sensibilités des sorties par rapport à certains paramètres. Par exemple, la sensibilité de L par rapport à s et s_L a un ordre de grandeur de 150 par rapport à K_E et A_0 de l'ordre de 0.3 (cf figure 2.2). Ces difficultés ont été surmontées en travaillant tout d'abord sur les sous-systèmes en non pas sur le système en entier, en utilisant des "astuces" d'intégration et en considérant la sensibilité des sorties par rapport aux paramètres.

Par la suite nous supposerons que $K_L = K_E/2$ comme dans [146].

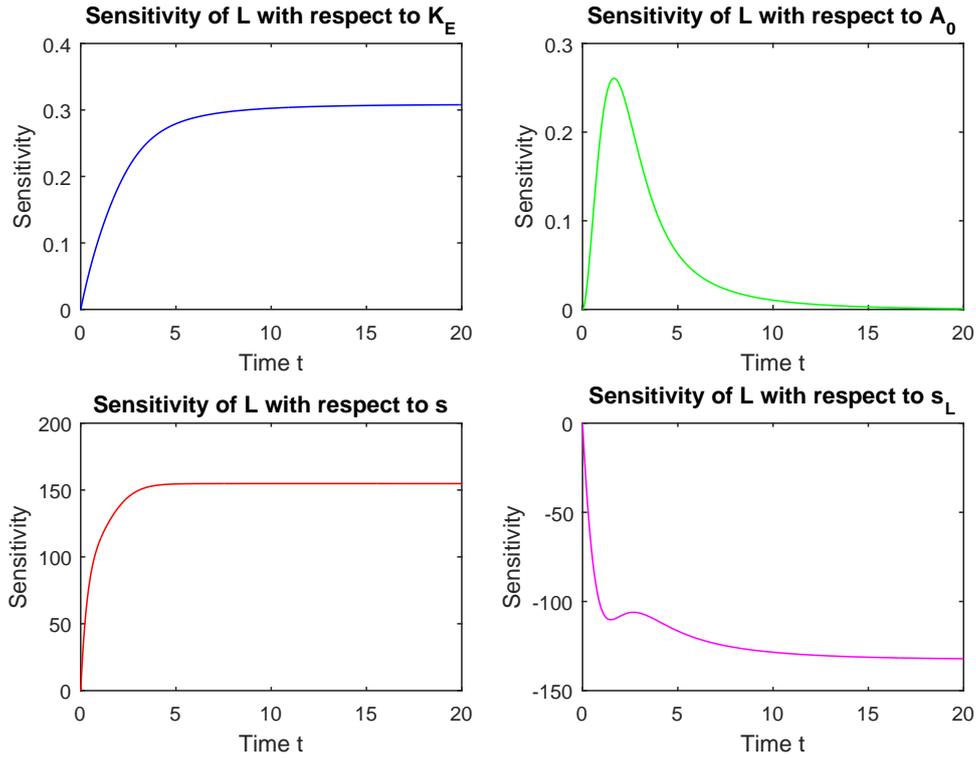


FIGURE 2.2 – Sensibilité de L par rapport aux paramètres s , s_L , K_E , A_0 .

Simulations

Les simulations sont faites à partir des conditions initiales

$$(E(0), L(0), A(0), S_H(0), I_H(0), I_m(0)) = (500, 200, 100, 0.9, 0.1, 0.2)$$

et des valeurs de paramètres donnés dans la table 2.1. Les sorties simulées L , S_H , I_H sont ensuite perturbées par un bruit Gaussien telle que l'erreur relative a une valeur maximale de 5% puis de 10%. Les mesures sont supposées être faites durant 20 jours en t_i , $i = 1, \dots, M = 201$.

L'estimation des dérivées est faite en reprenant la méthode proposée dans [195] et qui est basée sur une approche utilisant la théorie des distributions.

Comme des intégrales similaires sont utilisées pour résoudre le système (2.15) et estimer les dérivées, on utilisera les mêmes fonctions test avec la même longueur de support. Les fonctions test choisies ψ_i , $i = 1, \dots, M$ sont

des fonctions centrées en t_i et construites à partir de la fonction : $\psi(t) = \begin{cases} e^{\frac{t^2}{\epsilon^2 - t^2}} & \text{if } |t| < \epsilon \\ 0 & \text{if } |t| \geq \epsilon \end{cases}$ dont le support

est égal à $[-\epsilon, \epsilon]$. Des translations et des dilatations permettent de définir des fonctions test sur n'importe quel intervalle. L'erreur due à la méthode a été calculée en utilisant la Proposition 5 et le Corollaire 2 et nous a permis de mieux définir la longueur des supports des fonctions tests. Dans les applications, la longueur du support de toutes les fonctions test a été choisi égale à 2.9 et les intégrales ont été estimées par la méthode des trapèzes.

Estimation des paramètres du modèle (2.8)

Pour estimer les paramètres s , s_L , K_E , β_H , β_m dans (2.8a) et (2.8b), les deux systèmes couplés peuvent être considérés comme un système unique dans lequel L , S_H et I_H sont les sorties. Cependant, l'algorithme de Rosenfeld-Groebner donne des polynômes non utilisables pour définir une procédure numérique. En effet, le polynôme différentiel liant L , s , s_L et K_E contient 36 expressions et induit une matrice mal conditionnée de dimension $35 \times M$. Il est possible d'obtenir des relations plus simples en travaillant système par système [146, 227]. Du premier modèle, nous avons obtenu un premier polynôme contenant les paramètres s , s_L , K_E . Une fois estimés, nous avons repris l'expression explicite de A dépendant uniquement de L et donnée par l'algorithme de Rosenfeld-Groebner. A et L (donc A/L) considérés comme connus ont constitué les entrées du deuxième modèle (2.8b). En utilisant l'algorithme de Rosenfeld-Groebner, un deuxième polynôme ES a été

| Paramètres | Description | Value |
|------------|---|-----------|
| s | taux de transfert de E à L | 0.7 |
| s_L | taux de transfert de L à A | 0.5 |
| K_E | capacité d'accueil des oeufs | 1000 |
| A_0 | conditions initiales pour A ($A(0)$) | 100 |
| b | taux de ponte intrinsèque des femelles | 6 |
| d | taux de mortalité des oeufs | 0.2 |
| d_L | taux de mortalité des larves | 0.2 |
| d_m | taux de mortalité des adultes femelle | 0.25 |
| b_H | taux de natalité (humains) | 0.0000457 |
| β_H | taux d'infection entre humains et vecteurs | 0.75 |
| β_m | taux d'infection entre vecteurs et humains | 0.5 |
| γ | taux de transfert des infectés vers les immunisés | 0.1428 |

TABLE 2.2 – Valeurs des paramètres pour le modèle du chikungunya

trouvé et qui a permis de déterminer β_m et β_H .

Le système (2.8a)

Dans [227], pour obtenir des polynômes ES plus simples, un système équivalent au système (2.8a) a été obtenu en intégrant la troisième équation. Cette opération conduit à poser $w(t) = e^{-d_m t}$, $v(t) = e^{-d_m t} \int_0^t L(s) e^{d_m s} ds$ et A_0 , la condition initiale de A . Le système (2.8a) se réécrit :

$$\begin{cases} E'(t) = bA(t)\left(1 - \frac{E(t)}{K_E}\right) - (s+d)E(t) \\ L'(t) = sE(t)\left(1 - \frac{2L(t)}{K_E}\right) - (s_L+d_L)L(t) \\ A(t) = A_0w(t) + s_Lv(t) \\ v'(t) = L(t) - d_mv(t) \\ w'(t) = -d_mw(t) \end{cases} \quad (2.37)$$

Les systèmes (2.8(a)) et (2.37) sont équivalents si on impose les conditions initiales $v(0) = 0$ et $w(0) = 1$. Dans ce cas, l'analyse de stabilité du modèle (2.37) est la même que celle du modèle (2.8).

Comme L est une sortie du modèle, w et v peuvent être estimées. Nous pouvons alors ajouter les équations $y_1 = L$, $y_2 = v$ et $y_3 = w$ au système (2.37). Dans le système (2.37), nous avons introduit la constante A_0 . Cette constante est considérée comme un nouveau paramètre à estimer d'où le nouveau vecteur de paramètres (A_0, s, s_L, K_E) .

En utilisant le package *DifferentialAlgebra* de Maple et avec l'ordre d'élimination $[A_0, K_E, s, s_L] \prec [y_1, y_2, y_3] \prec [A, E, L, v, w]$, nous avons obtenu le polynôme

$$\begin{aligned} P_1 = & A_0K_E^2bsy_3 + K_E^2bss_Ly_2 - K_E(bd_1s_L + 4bss_L + bs_L^2)y_2y_1 \\ & - K_E^2(dd_1 + ds_L + d_1s + ss_L)y_1 - K_E(A_0bd_1 + 4A_0bs + A_0bs_L)y_3y_1 \\ & - K_E^2(d + d_1 + s + s_L)\dot{y}_1 - K_Ebs_Ly_2\dot{y}_1 - A_0K_Eby_3\dot{y}_1 - K_E^2\ddot{y}_1 \\ & + 2(bd_1s_L + 2bss_L + bs_L^2)y_2y_1^2 + 2(A_0bd_1 + 2A_0bs + A_0bs_L)y_3y_1^2 \\ & + 2K_E(dd_1 + ds_L + d_1s + ss_L)y_1^2 + 2bs_Ly_2\dot{y}_1y_1 + 2K_E(d + s)\dot{y}_1y_1 \\ & + 2A_0by_3\dot{y}_1y_1 - 2K_E(\dot{y}_1^2 - \ddot{y}_1y_1) = 0, \end{aligned} \quad (2.38)$$

et les deux polynômes

$$P_A = -A_0y_3 - s_Ly_2 + A = 0, \quad (2.39)$$

$$P_E = -K_EsE + (K_Ed_1 + K_Es_L + 2sE)y_1 + K_E\dot{y}_1 = 0. \quad (2.40)$$

P_A et P_E permettent d'estimer A et E respectivement si les paramètres A_0, K_E, s, s_L sont connus. Pour obtenir un polynôme de la forme (2.4), P_1 est divisé par $K_E y_1$. Nous avons ainsi travaillé avec le polynôme $\tilde{P}_1 = \frac{P_1}{y_1 K_E}$. Soit le polynôme $P_1^\psi = \int_{\text{supp}(\psi)} \tilde{P}_1(s) \psi(s) ds$.

- Remarque 12.**
1. Divisé P_1 par y_1 permet tout d'abord de reporter la dérivée seconde dans l'expression $\int_{\text{supp}(\psi)} \left(\frac{\dot{y}_1(s)^2}{y_1(s)} \psi(s) - \ddot{y}_1(s) \psi(s) \right) ds$ de P_1^ψ sur la fonction test ψ . Ce terme correspond à b^ψ , le second membre de (2.15). Ensuite, la division diminue de façon importante le conditionnement de la matrice A^ψ .
 2. Les sortie bruitées y_2 et y_3 ne dépendant que de y_1 sont estimées à partir de l'intégration des deux dernières équations de (2.37) en utilisant l'algorithme du point milieu.
 3. La méthode que nous avons développée dans [196] consistant à intégrer une fois le polynôme entrée-sortie \tilde{P}_1 n'a pas donné de résultat.

À partir des égalités

$$\begin{cases} \dot{y}_2 = y_1 - d_m y_2, \dot{y}_3 = -d_m y_3, \\ \frac{\ddot{y}_1}{y_1} = \left(\frac{\dot{y}_1}{y_1} \right) + \frac{\dot{y}_1^2}{y_1^2}, \end{cases} \quad (2.41)$$

nous en avons déduit les opérations suivantes qui ont été appliquées à P_1^ψ pour décroître l'ordre de dérivation de y_1 :

$$\begin{cases} \int \dot{y}_1 y_3 \psi = [y_1 y_3 \psi] + \int y_1 y_3 (d_m \psi - \dot{\psi}), \\ \int \dot{y}_1 \psi = [y_1 \psi] - \int y_1 \dot{\psi}, \int \ddot{y}_1 \psi = [\dot{y}_1 \psi - \dot{\psi} y_1] + \int y_1 \ddot{\psi}, \\ \int \dot{y}_1 y_2 \psi = [y_1 y_2 \psi] - \int (y_1 (y_1 - d_m y_2) \psi + y_1 y_2 \dot{\psi}), \\ \int \frac{\ddot{y}_1}{y_1} \psi = \left[\frac{\dot{y}_1}{y_1} \psi \right] - \int \left(\frac{\dot{y}_1}{y_1} \dot{\psi} - \frac{\dot{y}_1^2}{y_1^2} \psi \right). \end{cases} \quad (2.42)$$

Ces opérations nous ont permis d'obtenir un nouveau polynôme \tilde{P}_1^ψ et d'en déduire un système linéaire de la forme (2.15) avec A^ψ de dimension $M \times 15$. En effet, \tilde{P}_1^ψ contient 16 expressions dont l'une d'elle ne dépend pas des paramètres à estimer. Cependant le conditionnement de la matrice A^ψ est de l'ordre de 10^{12} et la factorisation QR donne pour certains paramètres des valeurs négatives.

En reprenant les courbes de sensibilité (Fig. 2.2), nous pouvons remarquer que les sorties sont plus sensibles aux paramètres s, s_L qu'aux paramètres K_E et A_0 .

Comme le système est très peu sensible aux paramètres K_E et A_0 , la stratégie consiste à se focaliser sur l'estimation de s, s_L . En supposant que les deux paramètres K_E et A_0 sont connus, le polynôme P_1^ψ se ré-écrit :

$$\tilde{m}_0(y_1, y_2, y_3) + \tilde{m}_1(y_1, y_2, y_3) s + \tilde{m}_2(y_1, y_2, y_3) s_L + \tilde{m}_3(y_1, y_2, y_3) s s_L + \tilde{m}_4(y_1, y_2, y_3) s_L^2 = 0, \quad (2.43)$$

\tilde{m}_i dépendant de K_E et A_0 . Dans ce cas, $\theta = (s, s_L, s s_L, s_L^2)^T$ et $A^\psi \in \mathbb{R}^{M \times 4}$.

L'avantage de cette ré-écriture est que la matrice A^ψ est réduite à quatre colonnes et son conditionnement est de l'ordre de 100.

Pour les deux autres paramètres, nous supposons qu'une estimation de K_E et A_0 peut-être obtenue expérimentalement avec une erreur de 10% et 50% respectivement. Toutefois, ces estimés doivent être améliorées pour estimer les paramètres β_H, β_m du système (2.8(b)). En effet, l'expression (2.39) qui permet de calculer A et par conséquent β_H, β_m contient la constante A_0 .

K_E et A_0 variant respectivement de 900 à 1100 et de 50 à 150 avec un pas égal à 10, nous estimons s et s_L pour chaque couple de valeurs (K_E, A_0) . L'erreur entre la courbe L reconstruite à partir du système (2.8(a)) avec la courbe de mesures permet de garder les meilleures valeurs estimées. Cette procédure est résumée dans l'algorithme suivant :

Algorithme 1.

-
- . /* Entrées : Le vecteur de mesures y_n
 - . Pour K_E variant de 900 à 1100 avec un pas de 10
 - . Pour A_0 variant de 50 à 150 avec un pas de 10
 - . Estimation de s, s_L
 - . Estimation de la sortie reconstruite y_{est} avec les paramètres A_0, K_E, s, s_L

. Estimation de l'erreur relative entre y_η et y_{est} .

fin
fin

Avec cette procédure, nous avons obtenus les estimées suivantes ($n_0 = 1$, $n_1 = 150$ dans (2.15)) :

- Pour un bruit de 5% :
 - Méthode des distributions : $A_0^{est} = 110$, $K_E^{est} = 1000$, $s^{est} = 0.6277$, $s_L^{est} = 0.2956$
 - Algorithme de Levenberg-Marquardt pour améliorer l'estimation de s et s_L : $s = 0.7212$, $s_L = 0.5226$
 - Erreur relative (er) entre la courbe de mesures L et la courbe reconstruite à partir de $(A_0, K_E, s, s_L) = (110, 1000, 0.7212, 0.5226)$: er = 0.016.
- Pour un bruit de 10% :
 - Méthode des distributions : $A_0^{est} = 110$, $K_E^{est} = 1000$, $s^{est} = 0.669$, $s_L^{est} = 0.251$
 - Algorithme de Levenberg-Marquardt pour améliorer l'estimation de s et s_L : $s = 0.7133$, $s_L = 0.5169$
 - Erreur relative (er) entre la courbe de mesures L et la courbe reconstruite à partir de $(A_0, K_E, s, s_L) = (110, 1000, 0.7133, 0.5169)$: er = 0.0364.

Le système (2.8b)

La troisième équation de (2.8(b)) lie la population humaine à la population du moustique avec le terme $L(t)/A(t)$. Les courbes de sensibilité par rapport aux paramètres β_H et β_m sont données à la Figure 2.3. Selon la section précédente, $A(t)$ et $L(t)$ peuvent être évaluées à chaque pas de temps t_k , $k = 1, \dots, M$. Ainsi, nous allons considérer par la suite que L/A constitue une entrée connue u du système (2.8(b)). En procédant comme précédemment, en ajoutant $y_4 = I_H$, $y_5 = S_H$ au système (2.8(b)) et en considérant l'ordre d'élimination $[\beta_H, \beta_m] \prec [y_4, y_5, u] \prec [I_H, S_H, I_m]$, le polynôme ES suivant a été obtenu :

$$P_2 = -b_H s_L u y_5 + b_H \dot{y}_5 + b_H s_L u y_5^2 + s_L u \dot{y}_5 y_5 - \dot{y}_5^2 + \dot{y}_5 y_5 + (b_H \beta_m + \beta_H \beta_m) y_4 y_5^2 + \beta_m (y_4 \dot{y}_5 y_5 - b_H y_4 y_5). \quad (2.44)$$

Le polynôme $P_2^\psi = \int_{supp(\psi)} \frac{P_2(s)}{y_5(s)} \psi(s) ds$ est utilisé pour estimer les paramètres β_H et β_m après avoir utilisé les opérations suivantes :

$$\begin{cases} \int \dot{y}_5 \psi = [y_5 \psi] - \int y_5 \dot{\psi}, \\ \int \ddot{y}_5 \psi = [\dot{y}_5 \psi - y_5 \dot{\psi}] + \int y_5 \ddot{\psi}. \end{cases} \quad (2.45)$$

Avec l'approche des distributions et les valeurs de A_0 , s_L calculées précédemment, la valeur des paramètres trouvée en résolvant le système (2.15) est ($n_0 = 1$, $n_1 = 169$) :

- Pour un bruit de 5% :
 - Méthode des distributions : $\beta_H^{est} = 0.8120$ et $\beta_m^{est} = 0.5135460$
 - Algorithme de Levenberg-Marquardt : $\beta_H = 0.7529$ et $\beta_m = 0.4971$
 - Erreur relative entre les sorties et les courbes reconstruites avec $(\beta_H, \beta_m) = (0.7529, 0.4971)$: er = 0.034.
- Pour un bruit de 10% :
 - Méthode des distributions : $\beta_H^{est} = 0.2235$ et $\beta_m^{est} = 0.2215$
 - Algorithme de Levenberg-Marquardt : $\beta_H = 0.7494$ et $\beta_m = 0.5021$
 - Erreur relative entre les sorties et les courbes reconstruites avec $(\beta_H, \beta_m) = (0.7494, 0.5021)$: er = 0.0643.

2.5 Identifiabilité ensembliste

Le travail présenté dans cette partie provient des articles [100, 101] écrits dans le cadre du projet ANR MagicSPS. L'un des objectifs du projet était de développer des méthodes d'estimation de paramètres dans un contexte d'erreurs bornés et caractériser l'ensemble de toutes les valeurs des paramètres qui sont consistant avec les données mesurées. En effet, les systèmes complexes sont soumis à des perturbations qui compliquent la modélisation du système étudié. Dans le cadre stochastique, l'incertitude est prise en compte en ajoutant des hypothèses appropriées sur le bruit et les distributions de probabilité des erreurs de modèle. Or la caractérisation du bruit et des perturbations peut être difficile à déterminer dans certains cas comme les tolérances de fabrication sur les valeurs de paramètres. Cette contrainte peut rendre difficile l'utilisation des méthodes probabilistes [7, 211].

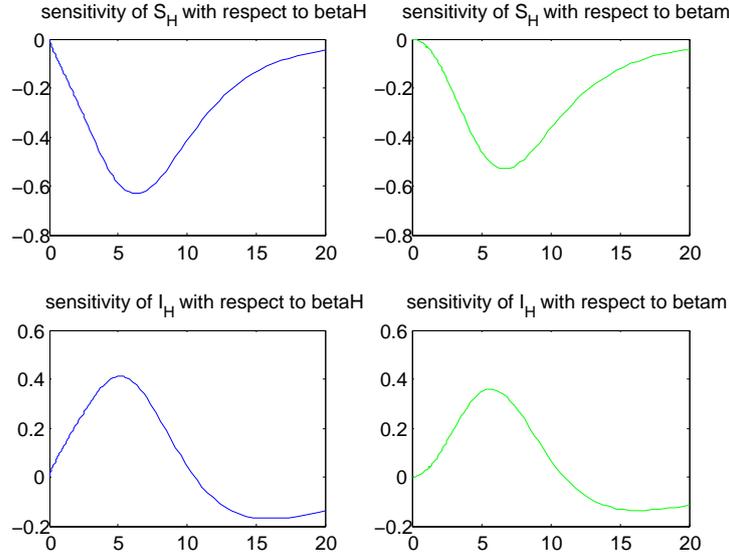


FIGURE 2.3 – Courbes de sensibilité de S_H , I_H par rapport aux paramètres β_H , β_m .

Dans le cadre du projet, nous avons considéré une approche alternative en supposant que les valeurs incertaines des variables et des paramètres appartenait à des ensembles bornés nous amenant à étendre la définition classique d'identifiabilité. Nous avons ensuite exploité les polynômes ES dans le cadre ensembliste et développé des méthodes certifiées d'estimation de paramètres, de détection et d'isolation de fautes. Lorsqu'on parle de méthode certifiée, on sous-entend que les ensembles solutions calculés contiennent l'ensemble des vecteurs de paramètres consistant avec les mesures [107]. Dans ce travail, nous parlerons d'ensembles d'appartenance, en abrégé SM pour Set-Membership en anglais. Ceux-ci peuvent avoir des formes différentes comme des ellipsoïdes [114], des boîtes [108], des parallélotopes [40], des zonotopes [4] ou d'autres polytopes. L'exemple suivant illustre les questions que nous nous sommes posées.

Exemple 2.5.1. Soit l'équation différentielle $\dot{x}(t) = x(t) + t \cos(p)$ avec les conditions initiales $x(0) = 1$ associées. La solution est $x(t) = (1 - t - e^t) \cos(p)$. Supposons que le paramètre p est à incertitude bornée et que son ensemble admissible est l'ensemble $\mathcal{U}_p = [0, 2\pi]$. Nous pouvons remarquer qu'il existe deux valeurs de paramètres dans $P^* := [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ qui vont générer les mêmes trajectoires (figure 2.4) mais que les paramètres dans P^* et ceux de son complémentaire ne généreront pas les mêmes trajectoires (figure 2.5).

Cet exemple amène à se poser les deux questions suivantes : étant donné un intervalle borné solution trouvé par un algorithme d'optimisation,

1. comment peut-on être sûr que les valeurs de paramètres dans cet intervalle et dans son complémentaire vont générer des trajectoires différentes ?
2. comment peut-on distinguer les intervalles solutions sur lesquels il y a identifiabilité et ceux pour lesquels cette propriété n'est pas vérifiée ?

Sur la base de l'exemple suivant, nous avons étendu la notion d'identifiabilité classique à : i) la SM-identifiabilité, la μ -SM-identifiabilité, et ε -SM-identifiabilité.

Nous nous sommes ensuite intéressées à la façon dont ces propriétés impactent le problème d'estimation des paramètres dans le cadre ensembliste. Ce problème est caractérisé par deux nouvelles propriétés. La première garantit que l'ensemble faisable de paramètre (FPS) est réduit à un seul ensemble connexe borné qui sera dit robuste (Soundness en anglais). La seconde est une propriété numérique que nous avons appelée la ε -consistance (ou ε -consistence en anglais). Celle-ci garantit que le FPS est composé d'un même nombre d'ensembles connexes disjoints que l'ensemble solution retourné par un algorithme d'estimation de paramètres de précision ε . Malgré

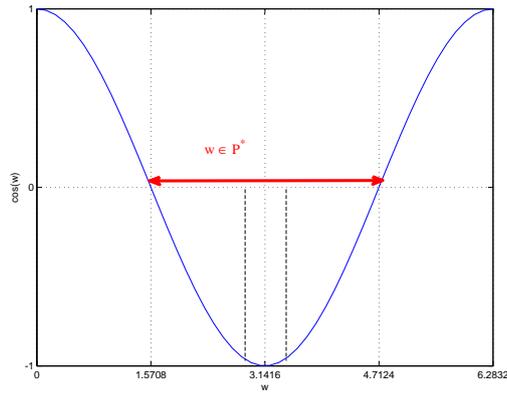


FIGURE 2.4 – Représentation de la fonction $w \mapsto \cos(w)$ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. Dans l'intervalle $P^* := [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, deux valeurs de w donnent la même valeur de $\cos(w)$.

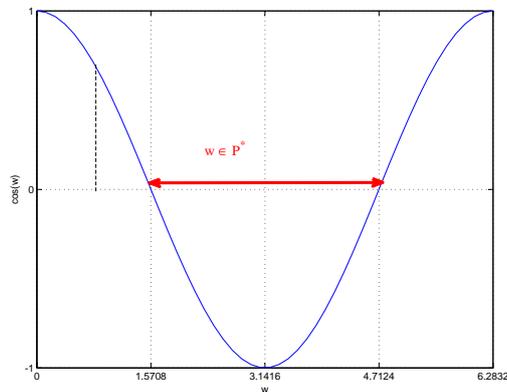


FIGURE 2.5 – Représentation de la fonction $w \mapsto \cos(w)$ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. Pour deux valeurs de w , l'une dans $P^* := [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, l'autre dans son complémentaire, les valeurs de $\cos(w)$ sont distinctes.

une abondante littérature sur l'identification dans le cadre ensembliste [104, 108, 169, 208], nous n'avions pas trouvé de travaux sur ces relations.

Par la suite, nous supposons que les incertitudes du modèle portent sur les conditions initiales et les paramètres. Ainsi, nous supposons que $x_0 \in X_0$ où X_0 est un ensemble borné et $p \in \mathcal{P}$ est un ensemble connexe de $\mathcal{U}_{\mathcal{P}}$ où $\mathcal{U}_{\mathcal{P}} \subseteq \mathbb{R}^q$ est un ensemble a priori connu de paramètres admissibles.

Le modèle (2.46) se ré-écrit

$$\begin{cases} \dot{x}(t,p) = f(x(t,p), u(t), p), \\ y(t,p) = h(x(t,p), p), \\ x(t_0, p) = x_0 \in X_0, \\ p \in P \subset \mathcal{U}_{\mathcal{P}}, t_0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (2.46)$$

où $x(t,p) \in \mathbb{R}^n$ et $y(t,p) \in \mathbb{R}^m$.

Dans la suite, nous noterons $Y(P)$ l'ensemble des trajectoires solutions de (2.46) générées par les paramètres $p \in P$. P^c désignera le complémentaire de P dans $\mathcal{U}_{\mathcal{P}}$.

2.5.1 Concepts utiles

Considérons un ensemble connexe non vide Π de \mathbb{R}^α , $\alpha \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, $\|\cdot\|$ une norme de \mathbb{R}^α et d la distance associée.

La distance⁶ entre les deux ensembles Π_1 et Π_2 de \mathbb{R}^p est définie par :

$$d(\Pi_1, \Pi_2) = \min_{\pi_1 \in \Pi_1, \pi_2 \in \Pi_2} d(\pi_1, \pi_2).$$

Définissons $\delta(\Pi)$ comme le diamètre de Π . $\delta(\Pi)$ est défini comme la plus petite borne supérieure de $\{d(\pi_1, \pi_2), \pi_1, \pi_2 \in \Pi\}$. Si Π n'est pas borné, nous définissons la distance comme $\delta(\Pi) = +\infty$ [23]. Sur l'espace métrique (Π, d) , une contraction μ est une fonction continue de Π dans Π telle qu'il existe un nombre strictement positif $k < 1$ et que pour tout $\Pi_1, \Pi_2 \subseteq \Pi$, $d(\mu(\Pi_1), \mu(\Pi_2)) < k d(\Pi_1, \Pi_2)$. Dans la suite, $\|\cdot\|$ désignera la norme Euclidienne, $\|\cdot\|_\infty$ la norme infinie, et $\|\cdot\|_1$ la norme 1. Elles seront définies sur \mathbb{R}^α , où $\alpha \in \{n, m, q\}$, selon le cas considéré.

2.5.2 Définitions

Les définitions suivantes présentent les concepts d'identifiabilité dans le cadre ensembliste.

Définition 6. *Étant donné le système contrôlé (2.46), considérons un ensemble connexe non vide $P^* \subseteq \mathcal{U}_{\mathcal{P}}$. P^* est globalement SM-identifiable si il existe une entrée u telle que $Y(P^*) \neq \emptyset$ et pour tout ensemble $\bar{P} \subseteq \mathcal{U}_{\mathcal{P}}$, on a $Y(P^*) \cap Y(\bar{P}) \neq \emptyset \implies P^* \cap \bar{P} \neq \emptyset$.*

Dans le cas d'un modèle non contrôlé, la définition est la suivante.

Définition 7. *Étant donné le système (2.46) avec $u \equiv 0$, considérons un ensemble connexe non vide $P^* \subseteq \mathcal{U}_{\mathcal{P}}$. P^* est globalement SM-identifiable si $Y(P^*) \neq \emptyset$ et pour tout ensemble $\bar{P} \subseteq \mathcal{U}_{\mathcal{P}}$, on a $Y(P^*) \cap Y(\bar{P}) \neq \emptyset \implies P^* \cap \bar{P} \neq \emptyset$.*

Ainsi, on dira qu'un ensemble connexe P^* est globalement SM-identifiable si les ensembles de sorties générées par le système (2.46) à partir de P^* et tout autre ensemble connexe dans le complémentaire de P^* n'ont pas de trajectoire en commun.

Il est clair que dans l'exemple 2.5.1, le système n'est pas globalement identifiable. Par exemple, toute paire $(p_1 = \pi - \alpha, p_2 = \pi + \alpha)$, avec $\alpha \in [0, \pi]$, produit la même trajectoire car $\cos(\pi - \alpha) = \cos(\pi + \alpha)$ pour $\alpha \in [0, \pi]$. Cependant, les trajectoires provenant de tout ensemble $P^* = [\pi - \alpha, \pi + \alpha]$ avec $\alpha \in [0, \pi]$ sont différentes de toutes trajectoires provenant de son complémentaire. P^* est donc globalement SM-identifiable.

Pour assurer que l'ensemble P^* peut-être contracté tout en gardant la propriété d'identifiabilité ensembliste, nous avons introduit la définition de μ -SM-identifiabilité. Pour cela, une contraction μ est appliquée à P^* et, d'après le théorème du point fixe, le diamètre de $\mu^n(P^*)$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini [148]. La définition est la suivante :

Définition 8. *Un ensemble connexe non vide $P^* \subseteq \mathcal{U}_{\mathcal{P}}$ est globalement μ -SM-identifiable si $\mu(P^*)$ est globalement SM-identifiable pour toute contraction μ de P^* à P^* .*

6. Nous faisons délibérément un abus de langage en appelant $d(\Pi_1, \Pi_2)$ une distance entre les deux ensembles Π_1 et Π_2 de \mathbb{R}^p même si certaines hypothèses comme l'inégalité triangulaire ne sont pas vérifiées.

La proposition suivante découle directement des définitions :

Proposition 8. *Si l'ensemble connexe non vide $P^* \subseteq \mathcal{U}_{\mathcal{P}}$ est globalement μ -SM-identifiable alors il est globalement SM-identifiable. La réciproque n'est pas vraie.*

Le système (2.5.1) donne un contre-exemple de la réciproque. En effet, l'ensemble $P^* = [\pi - \alpha, \pi + \alpha]$ avec $\alpha \in [0, \pi]$ n'est pas μ -SM-identifiable. En supposant $\alpha_1, \alpha_2 \in]0, \pi[, \alpha_1 < \alpha_2$, tout ensemble $P_1^* = [\pi - \alpha_1, \pi - \alpha_2] \subseteq P^*$ a des trajectoires en commun avec son ensemble complémentaire P_1^{*c} .

Si le diamètre de $\mu(P^*)$, $\delta(\mu(P^*))$, ne peut pas être plus petit que ε sans perdre la SM-identifiabilité, nous nous référerons à la ε -SM-identifiabilité [100].

Définition 9. *Considérons un ensemble $P^* \subseteq \mathcal{U}_{\mathcal{P}}$ connexe, non vide et SM-identifiable. Alors P^* est globalement ε -SM-identifiable si il existe un ensemble de contraction μ de P^* dans P^* tel que*

1. $\delta(\mu(P^*)) = \varepsilon$
2. $\mu(P^*)$ est globalement SM-identifiable
3. pour tout $\tilde{\mu}$ tel que $\tilde{\mu}(P^*) \subset \mu(P^*)$, $\tilde{\mu}(P^*)$ n'est pas globalement SM-identifiable.

Pour résumer, interpréter l'identifiabilité dans le cadre ensembliste nous a amené à proposer trois définitions. La première considère l'ensemble solution comme une partie agrégée (SM-identifiabilité) contrairement à la seconde qui prend en compte les propriétés de ses sous-ensembles (μ -SM-identifiabilité). Ainsi, la μ -SM-identifiabilité peut être vue comme une généralisation de l'identifiabilité classique : si P^* est μ -SM-identifiable, alors tout $p \in P^*$ est identifiable dans le sens classique [125]. La troisième définition, la ε -SM-identifiabilité peut être vue comme une propriété structurelle de la μ -SM-identifiabilité puisque les sous ensembles SM-identifiables de diamètre ε et non μ -SM-identifiables sont acceptés.

Ces définitions peuvent-être étendues à des versions structurelles locales.

2.5.3 Liens entre la SM-identifiabilité et d'autres concepts

Les liens entre la (μ)-SM-identifiabilité, l'identifiabilité classique (μ) au sens de la définition 1 et l'identifiabilité par intervalle ont été donnés dans [101, 102]. Dans cette section, nous allons nous intéresser au lien entre la (μ)-SM-identifiabilité, la ε -identifiabilité [25] et l'injectivité partielle [117]. Ces liens nous ont permis de développer avec Laleh Hosseini une méthode pour partitionner un ensemble admissible de paramètres en sous-ensembles SM-identifiables et μ -SM-identifiable.

2.5.3.1 Liens avec la ε -identifiabilité globale

L'identifiabilité globale dans $P^* \subset \mathcal{U}_{\mathcal{P}}$ (g.i.i. P^*) a été proposée par [25] comme un moyen de fournir une conclusion plus forte que l'identifiabilité structurelle. Elle garantit que des régions atypiques dans l'espace des paramètres pour lesquelles il n'y a pas d'identifiabilité n'existent pas. La définition est la suivante :

Définition 10. *Étant donné $(u, x_0) \in \mathbb{R}^r \times X_0$, le paramètre p_i est globalement identifiable dans P^* (g.i.i. P^*) si*

$$\forall (p, \bar{p}) \in P^*, y(\cdot, p) \equiv y(\cdot, \bar{p}) \Rightarrow p_i = \bar{p}_i, \quad (2.47)$$

et le vecteur de paramètre p est g.i.i. P^* si toutes ses composantes sont g.i.i. P^* .

L'originalité du travail de [25] est de proposer un moyen pratique de formuler la condition de la Définition 10. La condition peut en effet se ré-écrire :

$$\nexists (p, \bar{p}) \in P^* \times P^* \text{ tel que } y(\cdot, p) \equiv y(\cdot, \bar{p}), \| \bar{p} - p \|_{\infty} > 0. \quad (2.48)$$

Cette condition se ramène à un *problème de satisfaction de contraintes* (constraint satisfaction problem ou CSP en anglais) qui peut-être résolu de façon garantie par un algorithme de *propagation de contraintes d'intervalles* (interval constraint propagation ou ICP en anglais). En pratique, résoudre (2.48) revient à résoudre le problème suivant :

$$\nexists (p, \bar{p}) \in P^* \times P^* \text{ tel que } y(\cdot, p) \equiv y(\cdot, \bar{p}), \| \bar{p} - p \|_{\infty} > \varepsilon, \quad (2.49)$$

qui définit la ε -g.i.i. P^* . Remarquons que cette dernière définition ne donne aucune information sur les sous-ensembles de P^* . Le lien entre cette définition et la μ -SM-identifiable est donné dans la proposition suivante.

Proposition 9. *1. P^* est μ -SM-identifiable en P^* (dans le sens que $\mathcal{U}_{\mathcal{P}}$ est réduit à P^*) si et seulement si (2.48) est vérifié.*

2. Si P^ est ε -SM-identifiable en P^* , alors la condition (2.49) est vérifiée.*

Pour le deuxième point, la réciproque est fautive car quand la condition (2.49) est vérifiée, cela ne fournit aucune information sur les sous-ensembles de P^* de diamètre inférieur à ε .

La condition (2.49) ne permet pas de décider entre la μ -SM-identifiabilité et la ε -SM-identifiabilité. Elle permet toutefois de considérer la μ -SM-identifiabilité en acceptant une précision numérique de ε .

2.5.3.2 Liens avec l'injectivité partielle

La définition de l'injectivité partielle a été introduite dans [117]. Cette notion caractérise parfaitement la μ -SM-identifiabilité.

Définition 11. Soit une fonction $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ et un ensemble $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}$. La fonction f est une injection partielle de \mathcal{A}_1 sur \mathcal{A} , ou $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A})$ -injective, si pour tout $a_1 \in \mathcal{A}_1$ et tout $a \in \mathcal{A}$,

$$a_1 \neq a \Rightarrow f(a_1) \neq f(a).$$

f est dite \mathcal{A} -injective si elle est $(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ -injective.

Exemple 2.5.2. D'après la figure 2.4, la fonction cosinus est $(]0, \frac{\pi}{2}[,]0, \frac{3\pi}{2}[)$ -injective puisque la fonction cosinus est injective sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et l'image de $]0, \frac{\pi}{2}[$ par la fonction cosinus a une intersection vide avec l'image de $] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$. Par contre, la fonction cosinus n'est pas $(] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[,]0, \frac{3\pi}{2}[)$ -injective car la fonction cosinus n'est pas injective dans $] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.

[117] a proposé un algorithme basé sur l'analyse par intervalle pour tester l'injectivité d'une fonction différentiable. Les auteurs ont également développé un algorithme appelé ITVIA (Injectivity Test Via Interval Analysis) implémenté en C++ qui, pour une fonction donnée, partitionne un ensemble en deux domaines : un domaine sur lequel la fonction est partiellement injective correspondant à une liste d'ensembles μ -SM identifiables et un domaine indéterminé dans lequel la fonction peut être ou non injective. Notons que ITVIA ne donne pas d'information sur ces domaines indéterminés.

Pour caractériser la SM-identifiabilité, nous avons introduit la notion d'injectivité partielle restreinte (restricted-partial injectivity en anglais).

Définition 12. Soit une fonction $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ et un ensemble $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}$. La fonction f est dite partiellement injective restreinte de \mathcal{A}_1 à \mathcal{A} , ou $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A})$ -R-injective, si :

$$\forall a_1 \in \mathcal{A}_1, \forall a \in \mathcal{A}_1^c, f(a_1) \neq f(a).$$

Exemple 2.5.3. D'après la figure 2.4, la fonction cosinus est $(] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[,]0, \frac{3\pi}{2}[)$ -R-injective car l'image de $] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ par la fonction cosinus a une intersection vide avec l'image de $]0, \frac{\pi}{2}[$. Comme on peut le voir sur cet exemple, il n'est plus imposé à la fonction cosinus d'être injective sur $\mathcal{A}_1 =] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.

Tester numériquement la $(P^*, \mathcal{U}_{\mathcal{P}})$ -R-injectivité peut se faire en adaptant l'algorithme ITVIA proposé dans [117]. Toutefois, il ne permet pas de décider entre la μ -SM-identifiabilité et la ε -SM-identifiabilité ou la SM-identifiabilité et la ε -SM-identifiabilité.

Dans la proposition suivante, l'injectivité partielle et l'injectivité partielle restreinte sont interprétées en terme de trajectoires ce qui permettra par la suite de faire le lien direct avec les définitions de SM-identifiabilité et μ -SM-identifiabilité. Considérons l'ensemble des sorties S_u résultant de $\mathcal{U}_{\mathcal{P}}$ pour une entrée donnée u .

Proposition 10. Étant donné le modèle (2.46), P^* est SM-identifiable (resp. μ -SM-identifiable) pour une entrée u si et seulement si la fonction $\varphi : \mathcal{U}_{\mathcal{P}} \rightarrow S_u : p \rightarrow y(., p)$ est $(P^*, \mathcal{U}_{\mathcal{P}})$ -R-injective (resp. $(P^*, \mathcal{U}_{\mathcal{P}})$ -injective).

Des propositions 9 et 10, nous en avons déduit le corollaire suivant :

Corollaire 3. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- P^* est μ -SM-identifiable,
- la fonction $\varphi : \mathcal{U}_{\mathcal{P}} \rightarrow S_u : p \rightarrow y(., p)$ est $(P^*, \mathcal{U}_{\mathcal{P}})$ -injective,
- La condition (2.48) est satisfaite.

Enfin, nous avons l'implication :

Corollaire 4. P^* est ε -SM-identifiable implique que φ est $(\tilde{P}, \mathcal{U}_{\mathcal{P}})$ -R-injective, avec $\tilde{P} \subseteq P^*$ et $\delta(\tilde{P}) \geq \varepsilon$. La réciproque est fautive.

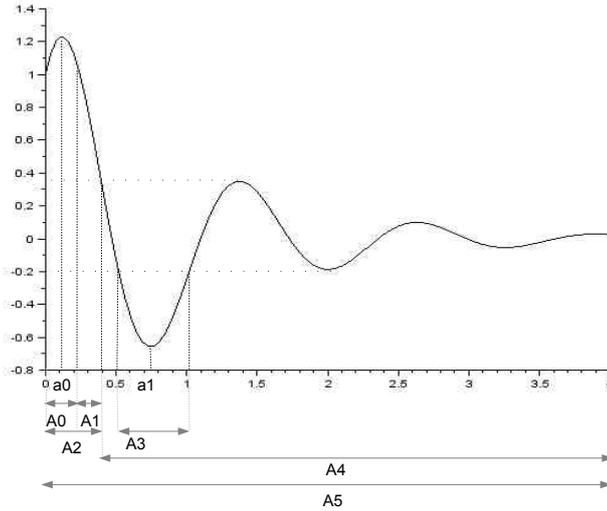


FIGURE 2.6 – Exemple de partitionnement d’un domaine en une liste de sous ensembles (μ) -SM-identifiables.

2.5.3.3 Partitionnement d’un domaine en sous-ensembles (μ) -SM-identifiables

La proposition 10 montre qu’il est suffisant de trouver une fonction $\varphi : \mathcal{U}_{\mathcal{P}} \rightarrow S_u : p \rightarrow y(.,p)$ définie de l’ensemble des paramètres à l’ensemble des trajectoires et ayant des propriétés d’injectivité pour vérifier la SM ou la μ -SM-identifiabilité.

La fonction ϕ définie dans la proposition 1 est une candidate naturelle pour la fonction φ . La Proposition 1 peut ainsi être reformulée de la façon suivante.

Proposition 11. [101] *Supposons que le déterminant fonctionnel $\Delta R(y,u)$ n’est pas identiquement nul. Soit P^* un sous-ensemble connexe de $\mathcal{U}_{\mathcal{P}}$. Si la fonction $\phi : p = (p_1, \dots, p_q) \mapsto (\gamma_1(p), \dots, \gamma_d(p), y(t_0^+, p), \dots, y^{(l-1)}(t_0^+, p))$ est $(P^*, \mathcal{U}_{\mathcal{P}})$ -R-injective (resp. $(P^*, \mathcal{U}_{\mathcal{P}})$ -injective) alors P^* est globalement SM-identifiable (resp. μ -SM-identifiable). De plus, si pour une contraction μ , $\mu(P^*)$ a un diamètre égal à ε et ϕ est $(\mu(P^*), \mathcal{U}_{\mathcal{P}})$ -R-injective mais pas $(\mu(P^*), \mathcal{U}_{\mathcal{P}})$ -injective alors P^* est ε -SM-identifiable. Dans les deux cas, si le coefficient de $y^{(l)}$ in (2.4) n’est pas égal à t_0 , alors la réciproque est vraie⁷.*

Les domaines sur lesquels la fonction ϕ est partiellement injective restreinte mais pas partiellement injective seront les ensembles SM-identifiables (cf. corollaire 3) et les ensembles sur lesquels la fonction ϕ est partiellement injective seront μ -SM-identifiables. On peut résumer les résultats comme suit :

En terme d’identifiabilité

P μ -SM identifiable

\longleftrightarrow

P SM-identifiable

\longleftrightarrow

P ε -SM-identifiable

\longleftrightarrow

En terme d’injectivité

ϕ partiellement injective de P sur $\mathcal{U}_{\mathcal{P}}$,

ϕ partiellement injective restreinte de P sur $\mathcal{U}_{\mathcal{P}}$,

ϕ partiellement injective restreinte à $\mu(P)$ tels que $\delta(\mu(P)) > \varepsilon$.

La proposition 11 a été utilisée dans [173] pour développer un algorithme partitionnant un ensemble admissible de paramètres en sous-ensembles SM-identifiables et μ -SM-identifiables. Cet algorithme détermine tout d’abord les sous-ensembles pour lesquels on a la μ -SM-identifiabilité grâce à l’algorithme ITVIA puis, dans le complémentaire, les ensembles SM-identifiables. Par exemple, à la figure 2.6, le sous-ensemble A_1 est μ -SM identifiable et les sous-ensembles $A_i, i = 0, 2, 3, 4, 5$ sont SM-identifiables mais non disjoints. Notre algorithme trouve d’abord A_1 en utilisant ITVIA puis il renvoie la liste $F = \{F0 = A0, F2 = A3\}$ qui est constituée d’ensembles disjoints SM-identifiables c’est à dire que les trajectoires générées par ces ensembles connexes sont distinctes de celles générées par leurs complémentaires.

Rappelons quelques notions en analyse par intervalle. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($f \in \mathcal{C}^1$) une fonction vectorielle différentiable définie sur une boîte de dimension n , $[x] \in \mathbb{IR}^n$, où \mathbb{IR} est l’ensemble de tous les intervalles et $[f]$ sa fonction d’inclusion ([104] et voir l’Annexe 6.3). Un *sous-pavage* de $[x]$ est un ensemble de boîtes non superposées incluses dans $[x]$ (voir [34]). Il peut être considéré soit comme une collection (liste) de boîtes

7. Quand les conditions initiales ne sont pas considérées, la fonction ϕ est alors $\phi : p = (p_1, \dots, p_q) \mapsto (\gamma_1(p), \dots, \gamma_d(p))$ et la réciproque du théorème n’est plus vraie.

$\mathbb{K} = \{[x]^{(1)}, [x]^{(2)}, \dots\}$ ou comme une union $\mathbb{K} = [x]^{(1)} \cup [x]^{(2)} \cup \dots$. Par conséquent, un sous-pavage peut être considéré comme un sous-ensemble discret de $\mathbb{I}\mathbb{R}^n$ ou comme un sous-ensemble convexe de \mathbb{R}^n . Les sous-pavages permettent d'approximer des ensembles convexes avec une précision arbitraire. Un *sous-pavage régulier* est un sous-pavage généré par bisections successives et il peut être facilement représenté par un arbre binaire.

L'algorithme (inspiré de [104]) peut se résumer ainsi :

1. partitionnement du domaine en sous-pavés réguliers non-minimaux de telle façon que la longueur de chaque boîte est inférieure à ε
2. détermination de la liste \mathcal{L} d'ensembles disjoints connexes (μ)-SM-identifiables (pour chaque sous-pavés réguliers, et étant donné une fonction d'inclusion, les images de boîtes de longueur ε sont calculées et comparées)
3. régularisation de la liste \mathcal{L} en sous-pavés réguliers.

Dans l'étape 2, la détermination des ensembles SM-identifiables est basée sur deux sous algorithmes. Le premier permet de déterminer le second optimum d'une fonction dans un intervalle, ce qui permet de délimiter éventuellement un ensemble SM-identifiable. Le deuxième vérifie quels sont les ensembles connexes d'une liste. L'étape 3 est importante et a nécessité de modifier l'algorithme proposé dans [104] section 3.4.2. Cet algorithme peut s'appliquer à une liste de boîtes se chevauchant ou non. Or, comme on peut le voir sur les figures 2.7, la liste initiale de boîtes se chevauchant (figure de gauche) est incluse dans un sous-pavage régulier.

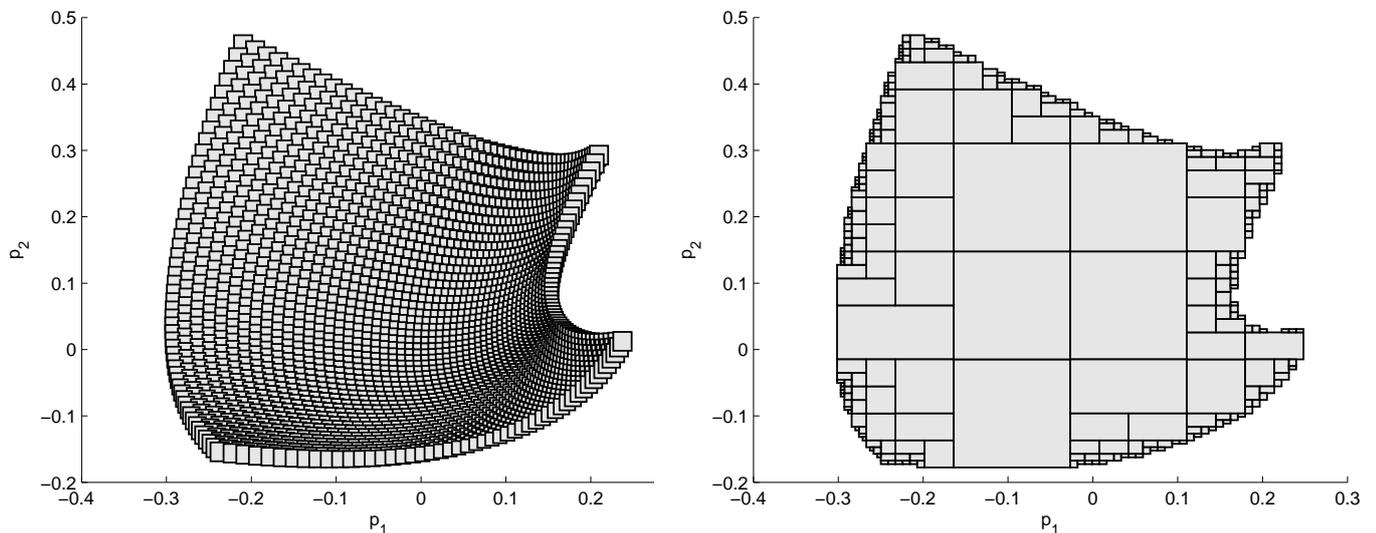


FIGURE 2.7 – À gauche est représenté une liste \mathcal{L} de boîtes se chevauchant. À droite est représenté un sous-pavage régulier externe contenant \mathcal{L} .

Les images de fonctions réelles rationnelles sont surestimées, parfois de façon importante dans le cadre de l'analyse par intervalle. Ainsi, des domaines qui ne sont pas SM-identifiables pourraient être inclus dans des domaines SM-identifiables. La dernière étape a donc été ajoutée pour limiter les effets de surestimation et obtenir un sous-pavage régulier. Un exemple est donné à la figure 2.8. La figure 2.8(a) représente la liste initiale de boîtes se chevauchant, la figure 2.8(b) le sous-pavage régulier obtenu à l'étape 2 de notre algorithme, la figure 2.8(c) le sous-pavage obtenu à l'étape 3 après régularisation.

Exemple 2.5.4. *Considérant l'équation de Bernoulli $\dot{y}(t) = -p_1^2 y(t) + p_2^2 y(t)^2$, l'algorithme appliqué à l'équation*

$$\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \phi(p) = \begin{bmatrix} p_1^2 \\ -p_2^2 \end{bmatrix} \text{ avec une précision } \epsilon = 0.05 \text{ a donné la figure 2.9. En rouge est représenté l'ensemble } \mu\text{-SM-identifiable et en gris et noir les ensembles SM-identifiables.}$$

2.5.4 Estimation des paramètres par des méthodes ensemblistes et propriétés

Dans cette section, je vais présenter le problème d'estimation de paramètres dans le cadre ensembliste ainsi que deux propriétés que nous avons introduites : la propriété de robustesse et la propriété de consistance.

Dans le cadre de l'estimation paramétrique classique, on dispose d'une série de données bruitées $y_m(t_i), i = 0, \dots, h$ ($y_m(\cdot) \in \mathbb{R}^m$) générées par un système physique sur l'intervalle $[0, T]$. Le problème consiste alors à trouver le vecteur de paramètre p^* du modèle mathématique telles que ses sorties soient le plus proches possibles,

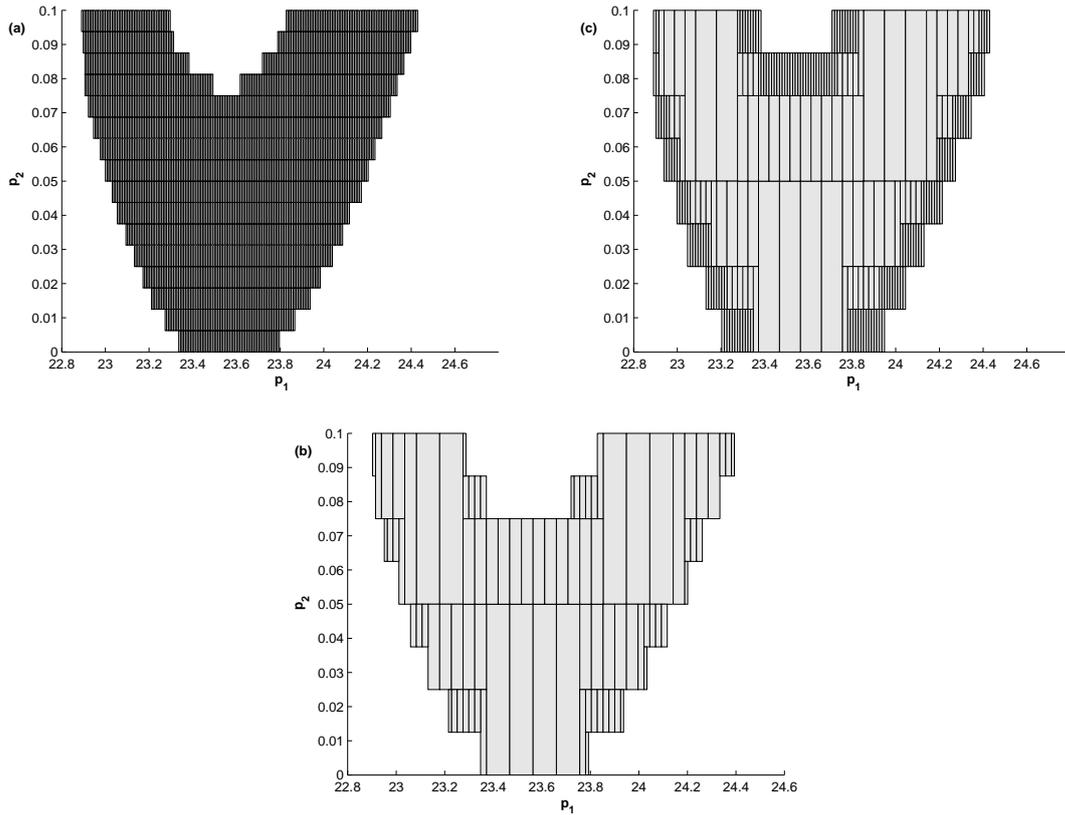


FIGURE 2.8 – (a) : liste de boîtes se chevauchant, (b) : sous-pavage régulier externe (c) : sous-pavage régulier interne

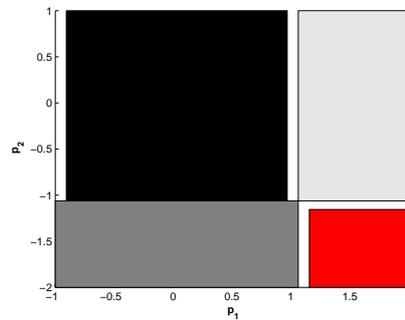


FIGURE 2.9 – En rouge est représenté l'ensemble μ -SM-identifiable et en gris et noir les ensembles SM-identifiable.

en un certain sens, des mesures. La méthode des moindres carrés est une méthode très utilisée et se formule de la façon suivante :

$$p^* = \operatorname{argmin}_{p \in \mathcal{U}_{\mathcal{P}}} \sum_{t=t_0}^{t_h} \|y_m(t) - y(t, p)\|^2.$$

Dans le cadre ensembliste, les données sont supposées variées dans un intervalle borné traduisant les incertitudes que l'utilisateur peut avoir sur leurs valeurs. Les bornes des intervalles peuvent être définies à partir du bruit de mesure ou de la précision des appareils et on a $y_m(t_i) \in Y_m(t_i), i = 0, \dots, h$, les $Y_m(t_i)$ étant des ensembles connexes de \mathbb{R}^m . L'estimation des paramètres par des méthodes ensemblistes consiste à trouver l'ensemble des vecteurs de paramètres $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^p$ telles que les trajectoires générées par \mathcal{P} coïncident avec des trajectoires des données expérimentales, plus précisément :

$$p^* \in \mathcal{P} \Leftrightarrow y(t_i, p^*) \in Y_m(t_i), \forall i = 0, \dots, h.$$

\mathcal{P} est appelé l'ensemble des paramètres réalisables. Ces problèmes sont généralement résolus avec une méthode d'arborescence de type branch and bound. L'espace des paramètres étant partitionnés, l'ensemble des trajectoires générées par chacune de ces partitions est comparé aux trajectoires mesurées. Le sous-ensemble de paramètres est alors soit réalisable, non réalisable ou indéterminé. Les ensembles non réalisables sont exclus alors que les ensembles indéterminés sont partitionnés et testés pour déterminer s'ils sont réalisables. L'algorithme réitère le processus jusqu'à ce que le diamètre des solutions candidates soit plus petit ou égal à un seuil ε donné par l'utilisateur.

ε est appelé le seuil de précision de l'algorithme. L'algorithme SIVIA (Set Inversion Via Interval Analysis) [105] rappelé dans l'annexe 6.3, section 6, utilise ce principe dans le cadre de l'analyse par intervalle. Le nombre de bisections ou de partitions du domaine est en général très important. Des algorithmes utilisent des techniques de propagation de contraintes pour réduire la dimension des sous-ensembles ou boîtes à tester. Dans ce contexte, le modèle est interprété comme l'ensemble des contraintes d'un problème de satisfaction de contraintes (CSP). Pour le résoudre, différents types de contracteurs peuvent être utilisés [34].

Il est à noter que ces algorithmes, indépendamment du temps de calcul, fournissent des solutions garanties. La solution retournée est une sur-estimation de l'ensemble des paramètres réalisables et est l'union convexe d'un ou plusieurs ensembles candidats dits réalisables et indéterminés (cf. [104]).

Regardons sur un exemple les problèmes qui peuvent être rencontrés.

Exemple 2.5.5. *Considérons le modèle :*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (p_1 + 2(1-p_2)\cos(p_1))x_1^2 + (1-p_2)x_2, \\ \dot{x}_2 = \sin(p_1)x_1, \\ y = x_1, \end{cases} \quad (2.50)$$

où $(p_1, p_2) \in [-1, 4] \times [0, 1/10] = \mathcal{U}_{\mathcal{P}}$.

En posant $c_1 = \sin(p_1)$, avec l'ordre d'élimination $\{c_1, p_2\} < \{y\} < \{x_1, x_2\}$, l'algorithme de Rosenfeld-Groebner donne le polynôme différentiel :

$$R(y, u) = \ddot{y} - 2(p_1 + 2(1-p_2)\cos(p_1))\dot{y}y - (1-p_2)\sin(p_1)y. \quad (2.51)$$

Le déterminant fonctionnel est réduit à $\Delta R(y) = \det(\dot{y}y, y) = -y^2\ddot{y}$ et n'est pas identiquement nul.

En étudiant l'injectivité de la fonction $\phi : (p_1, p_2) \rightarrow (p_1 + 2(1-p_2)\cos(p_1), (1-p_2)\sin(p_1))$ et grâce à l'algorithme que nous avons développé et rappelé à la section 2.5.3.3, nous obtenons la figure 2.10 (à droite). Ainsi $\mathcal{U}_{\mathcal{P}} = [-1, 4] \times [0, 1/10]$ est partitionné en deux domaines : le domaine rouge sur lequel la fonction ϕ est partiellement injective et donc ce domaine est μ -SM-identifiable et deux sous-ensembles blancs pour lesquels leur image par ϕ a une intersection non vide.

Or tout algorithme d'optimisation est défini selon une précision ε (ou un seuil) que ce soit la précision machine ou la précision décidée par l'utilisateur. Pour savoir s'il permet de conserver le nombre d'ensembles solutions, on a cherché à répondre aux deux questions suivantes. Si deux ensembles de paramètres sont distants de moins de ε , quelles sont les conditions sur le système et la précision de mesure pour décider si

- \mathcal{P} est composé d'un seul ensemble connexe ou non ?
- les trajectoires calculées sont distinguables au sens de la précision de mesure ?

La première question nous a conduit à définir la robustesse d'un problème d'estimation de paramètres dans le cadre ensembliste et la deuxième la ε -consistance.

Comme dans le cadre de l'estimation paramétrique classique, on souhaite savoir si lors d'un problème d'estimation de paramètres dans le cadre ensembliste, \mathcal{P} est réduit à un seul ensemble connexe, cette propriété indiquant que le problème est bien posé mathématiquement. Aussi, nous avons introduit la définition suivante de robustesse qui est représentée à la figure 2.11.

Définition 13. *Un problème d'estimation de paramètres dans le cadre ensembliste est dit robuste si $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{U}_{\mathcal{P}}$ est réduit à un seul ensemble connexe. Dans ce cas, \mathcal{P} est dit également robuste.*

Étant donné un algorithme d'estimation de paramètres dans le cadre ensembliste avec un seuil de précision ε , on note $\mathcal{P}_{\varepsilon}$ l'ensemble solution. Nous allons regarder les propriétés de $\mathcal{P}_{\varepsilon}$ par rapport à \mathcal{P} (voir la figure 2.12).

Définition 14. *Supposons que \mathcal{P} est égal à l'union de $\kappa \geq 1$ ensembles connexes deux à deux disjoints, alors l'ensemble solution $\mathcal{P}_{\varepsilon}$ est dit ε -consistant si $\mathcal{P}_{\varepsilon}$ est égal à l'union de κ_{ε} ensembles connexes deux à deux disjoints et $\kappa_{\varepsilon} = \kappa$.*

La précision fixée des algorithmes peut conduire à une surestimation de \mathcal{P} . Dans ce cas, $\kappa_{\varepsilon} < \kappa$, c'est à dire une au moins des composantes de $\mathcal{P}_{\varepsilon}$ contient plusieurs ensembles composant \mathcal{P} .

La robustesse est analysée à la section 2.5.5 et la ε -consistance à la section 2.5.6. Un exemple dans cette dernière section permettra de tester numériquement la ε -consistance par rapport à la précision ε de l'algorithme.

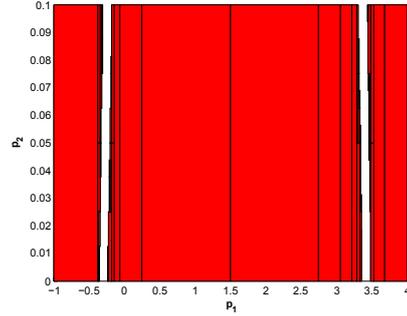
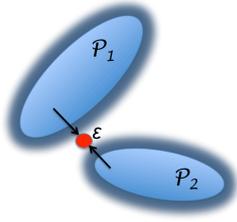


FIGURE 2.10 – À gauche, une boule de diamètre ε comprise entre \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 définit la limite à partir de laquelle l’algorithme ne peut plus les distinguer. À droite, le domaine de paramètres a été partitionné en deux sous-domaines : en rouge les sous-domaines μ -SM-identifiables ; en noir, les sous-domaines SM-identifiables ; en blanc, les domaines ayant la même image. Quelle doit être la valeur de ε sur la figure de gauche et les conditions sur le système pour que les trajectoires calculées soient distinguables au sens de la précision de mesure ?

2.5.5 Robustesse

La condition de robustesse est liée à la condition de SM-identifiabilité. En effet, par définition, si \mathcal{P} est globalement SM-identifiable, les trajectoires de (2.46) générées à partir de \mathcal{P} sont distinctes des trajectoires générées par le complémentaire $\mathcal{P}^c = \mathcal{U}_{\mathcal{P}} - \mathcal{P}$. De plus, \mathcal{P} étant connexe, il est robuste. Réciproquement, si \mathcal{P} est robuste, par définition il est globalement SM-identifiable. D’où la proposition suivante.

Proposition 12. *Considérons le système (2.46) et supposons que l’ensemble $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{U}_{\mathcal{P}}$ est l’ensemble des paramètres réalisables d’un problème d’estimation de paramètres dans le cadre ensembliste pour (2.46), alors \mathcal{P} est robuste si et seulement si \mathcal{P} est globalement SM-identifiable.*

Si, en plus d’être SM-identifiable, \mathcal{P} est μ -SM-identifiable alors \mathcal{P} préserve la robustesse quand l’erreur sur les données diminue. Dans ce cas, \mathcal{P} est dit μ -robuste pour (2.46).

Proposition 13. *Étant donné l’ensemble des données $Y_m(t_i), i = 1, \dots, h$, supposons que \mathcal{P} est robuste. Alors, si \mathcal{P} est μ -SM-identifiable pour (2.46), l’ensemble des paramètres réalisables du même problème avec des ensembles de données contractées $\mu_i(Y_m(t_i)), i = 1, \dots, h$, où les μ_i sont des contractions, est également robuste.*

Si un problème d’estimation de paramètres est formulé tel que l’ensemble des paramètres réalisables \mathcal{P} est dans $\mathcal{U}_{\mathcal{P}}$, nous pouvons désormais décider si \mathcal{P} est robuste ou non. En reprenant l’exemple 2.5.5, toute partie connexe rouge est μ -robuste et toute partie connexe noire est robuste.

2.5.6 La ε -consistance

La ε -consistance définie à la définition 14 est une propriété de l’ensemble solution \mathcal{P}_ε retournée par un algorithme d’estimation de paramètres dans le cadre ensembliste avec une précision seuil ε . Parmi les problèmes qui impactent la ε -consistance, nous avons regardé deux problèmes en particulier :

- l’algorithme d’estimation de paramètres dans le cadre ensembliste peut ne pas être capable de séparer des ensembles disjoints connexes de \mathcal{P} en testant des ensembles de solutions candidats topologiquement pertinents,
- les trajectoires issues de paramètres solution peuvent ne pas être distinguées des trajectoires issues de paramètres non-solution, compte tenu de la précision des capteurs.

Si \mathcal{P} est robuste, il est réduit à un seul ensemble connexe. D’après le principe des algorithmes branch and bound, l’ensemble solution \mathcal{P}_ε est donc réduit à un seul ensemble connexe même si c’est une surestimation de \mathcal{P} . Ainsi, l’ensemble solution \mathcal{P}_ε est ε -consistant pour tout ε .

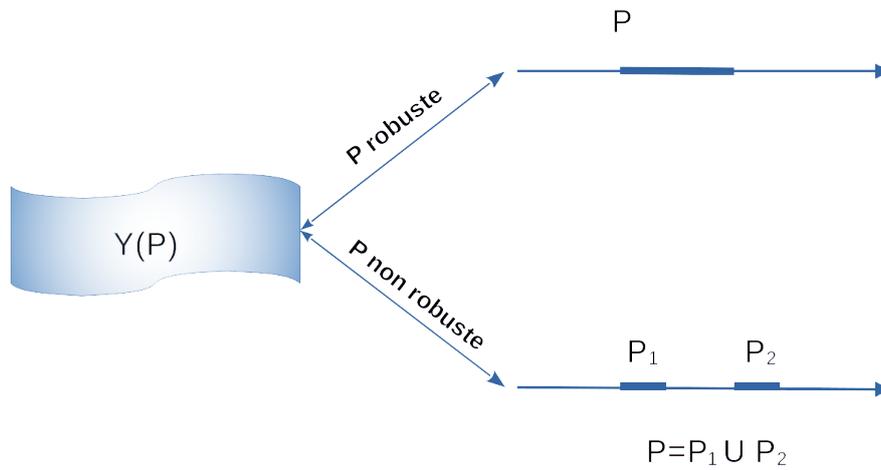


FIGURE 2.11 – Représentation d’un problème d’estimation de paramètres dans le cadre ensembliste. P est l’ensemble des paramètres réalisables donc consistants avec l’ensemble des données. Il est dit robuste s’il est réduit à un seul ensemble connexe.

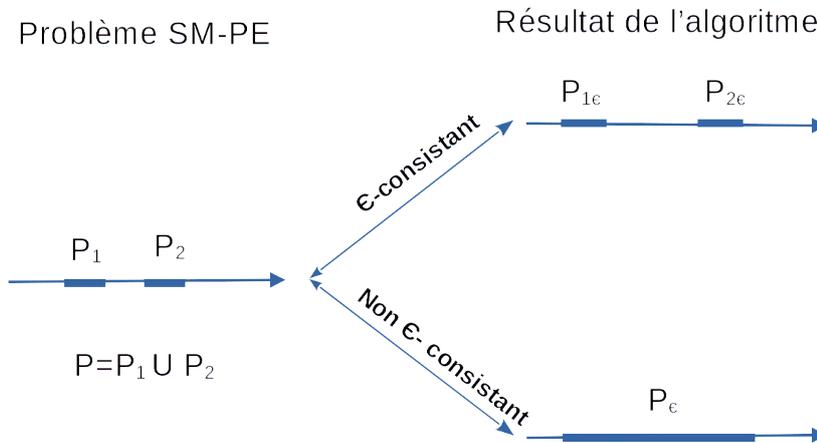


FIGURE 2.12 – Représentation d’une problématique lorsqu’on résout un problème d’estimation de paramètres dans le cadre ensembliste. Ce type de problème peut renvoyer une sur-estimation de l’ensemble P . Ici, l’ensemble P des paramètres réalisables est constitué de 2 ensembles connexes disjoints. Si l’algorithme renvoie deux ensembles solutions, l’ensemble solution \mathcal{P}_ϵ est dit consistant.

Supposons maintenant que \mathcal{P} n'est pas robuste et consiste en κ ensembles mutuellement disjoints $\mathcal{P}_i, i = 1, \dots, \kappa$. Le fait que l'algorithme est capable de séparer les \mathcal{P}_i est un problème topologique impliquant la distance entre les \mathcal{P}_i et le diamètre des plus petits ensembles solutions candidats donnés par l'algorithme branch and bound. Une condition nécessaire pour qu'un ensemble solution \mathcal{P}_ε soit ε -consistant est que $d(\mathcal{P}_i, \mathcal{P}_j) > \varepsilon$, pour tout $i, j = 1, \dots, \kappa, i \neq j$.

Considérons maintenant le second problème concernant les ensembles de sorties de données $Y_m(t_i), i = 0, \dots, h$, fournies par des capteurs dont la précision est de λ , i.e. $v_{mes} = v \pm \lambda$ où v est la vraie valeur et v_{mes} la valeur mesurée. Dans ce cas, deux trajectoires $y(\cdot, p)$ et $y(\cdot, \bar{p})$ doivent être distantes de λ , i.e. être telles qu'il existe $t \in [t_0, T]$, $\|y(t, p) - y(t, \bar{p})\|_\infty > \lambda$, pour être distinguables. Si on ne peut distinguer les trajectoires provenant de paramètres qui ne sont pas solutions et celles provenant de paramètres solutions \mathcal{P}_i alors \mathcal{P}_ε , l'ensemble solution renvoyé par l'algorithme, peut ne pas être ε -consistant.

La proposition suivante dont la preuve est basée sur le lemme de Gronwall montre que, sous certaines conditions, y est lipschitz continue par rapport au vecteur de paramètres. Elle donne explicitement la constante de Lipschitz $K_{y,p}$. Cette proposition permet également de déterminer la distance maximale entre deux vecteurs de paramètres p et \bar{p} pour que la distance entre les trajectoires $y(t, p)$ et $y(t, \bar{p})$ soit inférieure à λ .

Rappelons que, si une fonction g est réelle et analytique sur M , un ensemble ouvert de \mathbb{R}^n , pour tout ensemble compact $\mathcal{K} \subset M$, il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout x dans \mathcal{K} , on a la majoration suivante :

$$\left\| \frac{dg}{dx}(x) \right\|_\infty \leq K,$$

f et h définissant le modèle (2.46) sont supposées être réelles et analytiques sur M . Si $x \in \mathcal{K}$, \mathcal{K} un compact, alors f et h sont Lipschitz continues selon x .

Considérons les hypothèses suivantes :

- i) f et h définies sur $[t_0, T] \times \mathcal{U}_p$ sont Lipschitz continues selon p et telles que leurs constantes de Lipschitz sont notées $K_{f,p}$ et $K_{h,p}$ respectivement ;
- ii) la solution $x(t, p)$ de (2.46) est dans le compact \mathcal{K} ;
- iii) si les conditions initiales dépendent de p , la fonction $p \mapsto x(t_0, p)$ est supposée être Lipschitz continue selon p et sa constante de Lipschitz est notée $K_{x_0,p}$.

Proposition 14. *Supposons que les conditions i), ii), et iii) sont vérifiées. Alors y est Lipschitz continue selon p et sa constante de Lipschitz $K_{y,p}$ est donnée par :*

$$K_{y,p} = K_{h,x}(K_{x_0,p} + K_{f,p}(T - t_0))e^{K_{f,x}(T - t_0)} + K_{h,p}.$$

Si les conditions initiales ne dépendent pas de p , $K_{y,p}$ est donnée par :

$$K_{y,p} = K_{h,x}K_{f,p}(T - t_0)e^{K_{f,x}(T - t_0)} + K_{h,p}.$$

De plus, les deux trajectoires $y(\cdot, p)$ et $y(\cdot, \bar{p})$ vérifient :

$$\left(\forall p, \bar{p} \in \mathcal{U}_p, \|p - \bar{p}\| \leq \frac{\lambda}{K_{y,p}} \right) \Rightarrow (\forall t \in [t_0, T], \|y(t, p) - y(t, \bar{p})\|_\infty \leq \lambda).$$

Ce résultat signifie également que \mathcal{P}_i formant une partie de \mathcal{P} générera des trajectoires qui ne seront pas distinguables de celles générées par son voisinage.

La proposition suivante donne une condition pour avoir la non ε -consistance.

Proposition 15. *Soit le système (2.46) et les hypothèses i), ii), iii). Supposons que \mathcal{P} n'est pas robuste et est constitué de κ ensembles connexes mutuellement disjoints $\mathcal{P}_i, i = 1, \dots, \kappa$. Soit λ la distance minimale permettant de distinguer les trajectoires et ε la précision de l'algorithme d'estimation de paramètres dans le cadre ensembliste.*

Si $d(\mathcal{P}_i, \mathcal{P}_j) \leq \varepsilon + \frac{2\lambda}{K_{y,p}}$, pour tout $i, j = 1, \dots, \kappa$ alors l'ensemble solution \mathcal{P}_ε retourné par l'algorithme d'estimation de paramètres dans le cadre ensembliste n'est pas ε -consistant.

Remarque 13. *La réciproque est vraie si la fonction d'inclusion $P \rightarrow [Y](P)$ utilisée dans l'algorithme d'estimation (d'estimation de paramètres dans le cadre ensembliste) pour prédire l'ensemble des trajectoires générées par un ensemble de paramètres candidat P est telle que $[Y](P) = Y(P)$, ce qui est rarement le cas.*

Exemple 2.5.6. *Considérons le système suivant défini sur $[0, T]$:*

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t, p) = \cos(p)x_2(t, p), & x_1(0) = (\frac{1}{\sqrt{2}} + 1)/2, \\ \dot{x}_2(t, p) = -x_1(t, p)\cos(p) + (1 - x_1(t, p)^2 - 2x_2(t, p)^2)x_2(t, p), & x_2(0) = 0, \\ y(t, p) = x_1(t, p). \end{cases} \quad (2.52)$$

Les fonctions f et h sont définies par $f(x, p) = (\cos(p)x_2, -x_1 \cos(p) + (1 - x_1^2 - 2x_2^2)x_2)^T$, et $h(x, p) = x_1$ où $x = (x_1, x_2)^T$ et T représente la transposée du vecteur considéré. La solution $(x_1(t), x_2(t))^T$ reste dans l'anneau R défini par les deux cercles centrés en $(0, 0)$ de rayons $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et 1 respectivement. Pour déterminer les constantes de Lipschitz, considérons $z = (z_1, z_2)^T \in R$. Clairement, $K_{h,p} = 0$, $K_{h,x} = 1$ et $K_{f,p} = 1$ comme $\|x\| = \|(x_1, x_2)^T\| < 1$. Pour $K_{f,x}$, en ordonnant les termes et en ajoutant $x_1^2 z_2 - x_1^2 z_2$ à la ligne 3, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|f(x, p) - f(z, p)\|_1 &\leq |\cos(p)|(|x_2 - z_2| + |x_1 - z_1|) + |x_2 - z_2| + |(x_1^2 - 2x_2^2)x_2 - (z_1^2 - 2z_2^2)z_2| \\ &\leq (|x_1 - z_1| + 2|x_2 - z_2|) + |x_1^2 x_2 - x_1^2 z_2 + x_1^2 z_2 - z_1^2 z_2 - 2(x_2^3 - z_2^3)| \\ &\leq (|x_1 - z_1| + 2|x_2 - z_2|) + x_1^2 |x_2 - z_2| + |z_2| |x_1^2 - z_1^2| + 2|x_2^3 - z_2^3|. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Comme $|x_1| < 1$, $|z_1| < 1$, nous en déduisons d'une part que $|x_1^2 - z_1^2| \leq |x_1 - z_1|(|x_1| + |z_1|) \leq 2|x_1 - z_1|$ et d'autre part que $|z_2^3 - x_2^3| = |x_2 - z_2||z_2^2 + 2x_2 z_2 + x_2^2| \leq 4|x_2 - z_2|$. Ainsi

$$\|f(x, p) - f(z, p)\|_1 \leq (|x_1 - z_1| + 2|x_2 - z_2|) + |x_2 - z_2| + 2|x_1 - z_1| + 8|x_2 - z_2| \leq 11\|x - z\|_1. \quad (2.54)$$

En utilisant l'équivalence de la norme 1 et de la norme infinie, il vient :

$$\|f(x, p) - f(z, p)\|_\infty \leq 22 \|x - z\|,$$

et donc $K_{f,x} = 22$. D'après la proposition 14, la constante de Lipschitz $K_{y,p}$ est égale à Te^{22T} . Supposons que $T = 1$, que la précision du capteur est $\lambda = 0,01$ et que le seuil de précision de l'algorithme d'estimation de paramètres dans le cadre ensembliste est égal à $\varepsilon = 10^{-16}$. Alors d'après la Proposition 15, si pour tout $i, j \in \{1, \dots, \kappa\}$, $i \neq j$, $d(\mathcal{P}_i, \mathcal{P}_j) \leq \varepsilon + \frac{2\lambda}{K_{y,p}} \simeq 10^{-16} + 5,579 \cdot 10^{-12} \simeq 5,579 \cdot 10^{-12}$, l'ensemble solution n'est pas ε -consistant. Ainsi, si cette distance est inférieure à $\varepsilon + \frac{2\lambda}{K_{y,p}}$, le nombre d'ensembles renvoyés par l'algorithme sera inférieur au nombre attendu d'ensembles solutions.

2.5.7 Estimation des paramètres dans le cadre ensembliste

2.5.7.1 Une enveloppe de la solution initiale

En reprenant les notations de la partie 2.4, nous avons étendu les méthodes d'estimation de paramètres au cadre de l'analyse par intervalle. Nous avons supposé que les bruits de mesure et les incertitudes sur les paramètres $p \in P$, P étant un vecteur d'intervalle, étaient pris en compte dans le bruit de la sortie y . Ce bruit est supposé additif et borné $\eta(t) \in [\eta(t)]$. $\Gamma_j(P)$ obtenu à partir de $\gamma_j(p)$ en substituant p par l'ensemble connexe P est alors un ensemble connexe. Les problèmes d'estimation proposés dans la partie 2.4 se ré-écrivent de la façon suivante.

1. Méthode basée sur les polynômes ES

Le système (2.11) peut s'interpréter dans le cadre ensembliste de la façon suivante

$$[A][\gamma] = [b] \quad (2.55)$$

où $[A]_k = ([m_j(y_k, u_k)])_{j=1, \dots, q}$ and $[b]_k = -[m_0(y_k, u_k)]$. L'ensemble des solutions du système (2.55) défini par le vecteur intervalle $(\Gamma_j(P))_{1 \leq j \leq q}$ peut être trouvé en résolvant le système

$$0 \in [A][\gamma] - [b]. \quad (2.56)$$

2. Méthode basée sur les polynômes intégral-différentiels

Le système (2.15) interprété dans le cadre ensembliste s'écrit

$$[A^\psi][\gamma] = [b^\psi] \quad (2.57)$$

où $[A^\psi]_i = \left(\left[\int_{t_i - \epsilon}^{t_i + \epsilon} m_j(y, u)(s) \psi_i(s) ds \right] \right)_{j=1, \dots, q}$ et $[b^\psi]_i = - \left[\int_{t_i - \epsilon}^{t_i + \epsilon} m_0(y, u)(s) \psi_i(s) ds \right]$. Les solutions de ce système peuvent être obtenues en résolvant le système suivant ($\gamma = (\gamma_j)_{k=1, \dots, q}$)

$$0 \in [A^\psi][\gamma] - [b^\psi]. \quad (2.58)$$

La question qui vient naturellement est de savoir quelles sont les conditions pour que l'ensemble solution du système $[A^\psi][\gamma] = [b^\psi]$ contient l'ensemble solution du système $[A][\gamma] = [b]$? Le système (2.15) peut-être vu comme un système perturbé du système (2.11). Ainsi, une condition pour que les ensembles solutions du système (2.58) enveloppent les ensembles solutions de (2.56) est que $0 \in [\delta A][\gamma^\psi] - [\delta b]$ (voir [197]).

2.5.7.2 Application

Les fonctions tests sont celles de la partie 2.4.2.4 et l'enveloppe de $\int_a^b f(s)ds$ est obtenue en étendant la méthode classique des trapèzes au cadre ensembliste. Elle est notée $I_{[a,b]}(f)$. Enfin, l'enveloppe des dérivées est calculée en utilisant les différenciateurs HOSM [124, 172] avec les paramètres $\lambda_0 = 3$, $\lambda_1 = 0.2$ et $\lambda_2 = 0.1$.

L'exemple choisi est celui de deux réservoirs couplés l'un au dessus de l'autre par

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t, p) = a_1 u(t) - a_2 \sqrt{x_1(t, p)}, \\ \dot{x}_2(t, p) = a_3 \sqrt{x_1(t, p)} - a_4 \sqrt{x_2(t, p)}, \\ y_1(t, p) = \sqrt{x_1(t, p)}, \\ y_2(t, p) = \sqrt{x_2(t, p)}, \end{cases} \quad (2.59)$$

où $p = (a_i)_{i=1, \dots, 4}$, $a_i \neq 0$, est le vecteur de paramètre, $x = (x_1, x_2)^T$ représente le vecteur d'état et correspond au niveau d'eau dans chaque réservoir. $u \neq 0$ est le vecteur d'entrée. Le niveau d'eau dans les réservoirs peut varier entre 0 et 10.

Pour utiliser l'algorithme de Rosenfeld-Groebner implémenté dans Maple 16, nous avons ajouté les variables auxiliaires $z_1(t, p) = \sqrt{x_1(t, p)}$ et $z_2(t, p) = \sqrt{x_2(t, p)}$ et le modèle contenant quatre fautes est ré-écrit

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t, p) = a_1 u(t) - a_2 z_1(t, p), \\ \dot{x}_2(t, p) = a_3 z_1(t, p) - a_4 z_2(t, p), \\ z_1(t, p)^2 = x_1(t, p), z_2(t, p)^2 = x_2(t, p), \\ y_1(t, p) = z_1(t, p), y_2(t, p) = z_2(t, p), \end{cases} \quad (2.60)$$

D'après l'algorithme de Rosenfeld-Groebner, les polynômes entrée-sortie sont :

$$\begin{aligned} R_1(y, u, p) &= -a_1 u + a_2 y_1 + 2y_1 \dot{y}_1, \\ R_2(y, u, p) &= a_4 y_2 - a_3 y_1 + 2y_2 \dot{y}_2 \end{aligned} \quad (2.61)$$

Le déterminant fonctionnel $\Delta R_1 = u\dot{y}_1 - \dot{u}y_1$ n'est pas identiquement nul tant que $u \neq 0$. Donc $\Delta R_2 = y_2\dot{y}_1 - \dot{y}_2y_1$ n'est pas identiquement nul si $u \neq 0$ et la fonction $\phi : (a_1, a_2, a_3, a_4) \mapsto (a_1, a_2, a_4, a_3)$ étant clairement injective, tout sous-ensemble connexe P^* inclus dans l'ensemble des paramètres admissibles est μ -SM-identifiable.

1. Méthode basée sur les polynômes ES

En notant $y_{1,p}^{(1)}(t_k)$ (resp. $y_{2,p}^{(1)}(t_k)$) l'estimée de $\dot{y}_1(t_k)$ (resp. $\dot{y}_2(t_k)$), le premier système à résoudre est $[A_1][\gamma] = [b_1]$ où

$$\begin{aligned} [A_1]_k &= ([-u(t_k)], [y_1(t_k)]), \\ [b_1]_k &= [-2y_1(t_k)y_{1,p}^{(1)}(t_k)]. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Le second système est composé de la matrice intervalle $[A_2]$ et du vecteur intervalle $[b_2]$ tel que $[A_2]_i = ([-y_1(t_i)], [y_2(t_i)])$ et $[b_2]_i = [-y_2(t_i)y_{2,p}(t_i)]$.

2. Méthode basée sur les polynômes intégral-différentiels

Le premier système à résoudre est $[A_1^\psi][\gamma] = [b_1^\psi]$ où

$$\begin{aligned} [A_1^\psi]_i &= ([-I_{[t_i-\epsilon, t_i+\epsilon]}(u\psi_i)], [I_{[t_i-\epsilon, t_i+\epsilon]}(y_1\psi_i)]), \\ [b_1^\psi]_i &= [I_{[t_i-\epsilon, t_i+\epsilon]}(y_1^2\dot{\psi}_i)]. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Le deuxième est composé de $[A_2^\psi]$ et $[b_2^\psi]$ tel que

$$\begin{aligned} [A_2^\psi]_i &= ([-I_{[t_i-\epsilon, t_i+\epsilon]}(y_1\psi_i)], [I_{[t_i-\epsilon, t_i+\epsilon]}(y_2\psi_i)]), \\ [b_2^\psi]_i &= [I_{[t_i-\epsilon, t_i+\epsilon]}(y_2^2\dot{\psi}_i)]. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Pour les tests de simulation, les paramètres sont $a_1 = 0.2$, $a_2 = 0.05$, $a_3 = 0.1$ et $a_4 = 0.1$. les bornes de l'intervalle pour $\eta(t)$ sont données par $[-0.1 \ 0.1]$. Les intervalles initiaux pour les paramètres sont $\mathbf{p}_0 = [0; 5]$ et

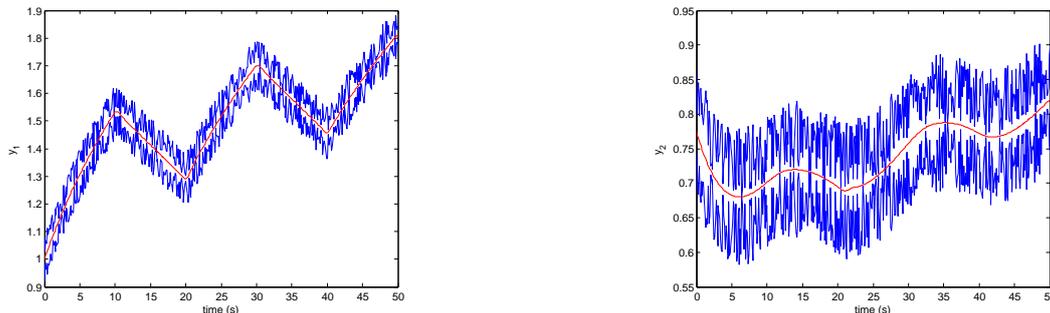


FIGURE 2.13 – À gauche est représenté le niveau d'eau dans le réservoir supérieur ; à droite, le niveau d'eau dans le réservoir inférieur.

le seuil de bisection pour l'algorithme SIVIA est de 0.025 pour chaque paramètre. Les figures 2.13 représentent les niveaux d'eau des réservoirs supérieurs et inférieurs.

Les méthodes d'estimation ont été appliquées à l'intervalle de temps $[0, 20]$ avec une discrétisation $(t_i)_{i=1, \dots, M}$ de pas égal à 0.1.

Les résultats obtenus à partir de la première méthode sont donnés aux figures 2.14 et 2.15. Le temps de calcul est de 24.00 secondes. Ceux de la deuxième méthode sont représentés aux figures 2.16 et 2.17 et le temps de calcul est de 16.41 secondes.

Les boîtes rouges sont les boîtes qui ont été rejetées, en jaune, les boîtes indéterminées, c'est à dire les boîtes contenant des solutions mais dont la longueur est plus petite que la condition d'arrêt. Enfin, les boîtes vertes ne contiennent que des solutions.

Les boîtes vertes contiennent les valeurs exactes des paramètres en utilisant la première ou la seconde méthode. Cependant, la deuxième méthode fournit des solutions beaucoup moins conservatives, i.e. les régions vertes et jaunes sont plus petites.

Les tableaux 2.3 et 2.4 donnent le pourcentage de boîtes initiales éliminées par rapport aux domaines $\overline{\mathbb{S}}$ (boîtes de solution et indéterminées) et $\underline{\mathbb{S}}$ (boîtes de solution uniquement), respectivement définis dans l'équation (6.10).

Le pourcentage éliminé $\% \mathbf{p}$ est calculé par $\% \mathbf{p} = 1 - \frac{w([\mathbf{p}])}{w([\mathbf{p}_0])}$ où $w([\alpha])$ est la largeur de l'intervalle $[\alpha]$.

| Paramètres | $\% \mathbf{p}_{method1}$ | $\% \mathbf{p}_{method2}$ |
|------------|---------------------------|---------------------------|
| a_1 | 86.00 | 95.00 |
| a_2 | 90.00 | 97.00 |
| a_3 | 82.00 | 89.00 |
| a_4 | 70.00 | 91.00 |

TABLE 2.3 – Pourcentage de boîtes éliminées pour les deux méthodes (boîtes indéterminées et solutions).

2.6 Identifiabilité dans le cadre des équations aux dérivées partielles (EDP)

Suite à mes travaux sur l'identifiabilité dans les systèmes d'EDOs, il m'a paru intéressant de voir si il était possible de généraliser la méthode entrée-sortie aux systèmes d'EDPs et quels en seraient les limites. En effet, étant donné un système d'EDOs et/ou d'EDPs, il est toujours possible, du moins formellement, d'utiliser l'al-

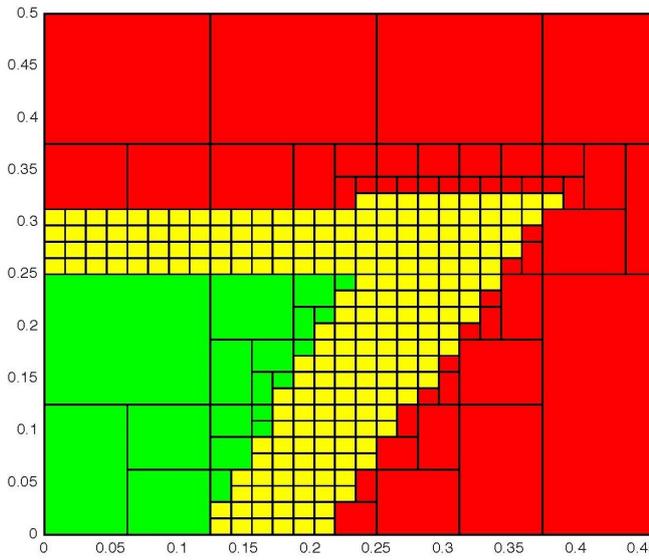


FIGURE 2.14 – Représentation des solutions du système (2.62) par rapport aux paramètres admissibles a_1, a_2 (a_1 sur l'axe x, a_2 sur l'axe y). Les boîtes rouges sont les boîtes qui ont été rejetées, en jaune, les boîtes indéterminées, c'est à dire les boîtes contenant des solutions mais dont la longueur est plus petite que la condition d'arrêt. Enfin, les boîtes vertes ne contiennent que des solutions.

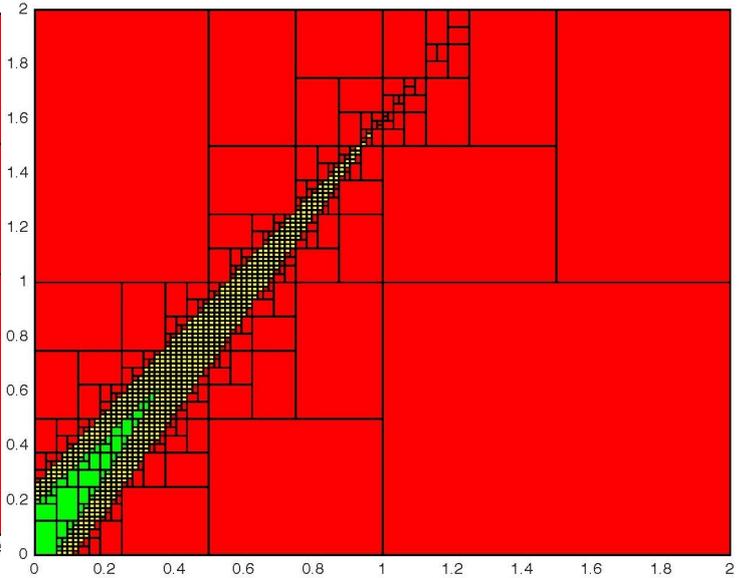


FIGURE 2.15 – Représentation des solutions par rapport aux paramètres admissibles a_3, a_4 pour la méthode 1 (a_3 sur l'axe x, a_4 sur l'axe y).

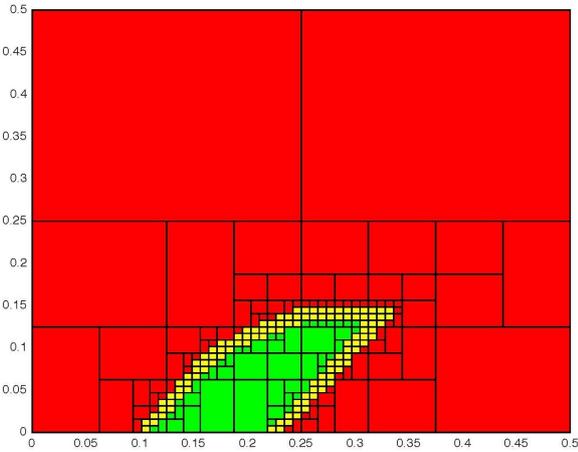


FIGURE 2.16 – Représentation des solutions du système (2.63) par rapport aux paramètres admissibles a_1, a_2 (a_1 sur l'axe x, a_2 sur l'axe y). Les boîtes rouges sont les boîtes qui ont été rejetées, en jaune, les boîtes indéterminées, c'est à dire les boîtes contenant des solutions mais dont la longueur est plus petite que la condition d'arrêt. Enfin, les boîtes vertes ne contiennent que des solutions.

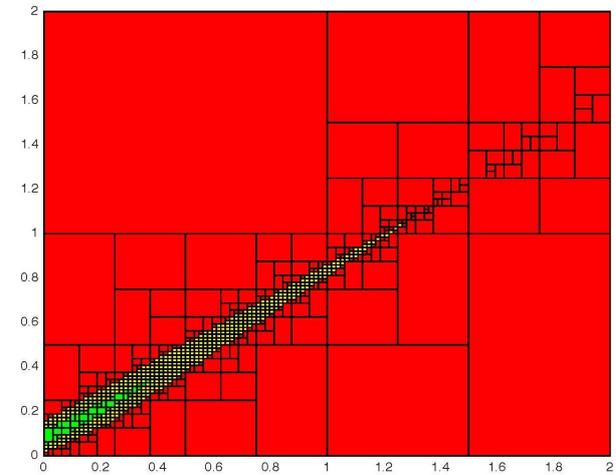


FIGURE 2.17 – Représentation des solutions par rapport aux paramètres admissibles a_3, a_4 pour la méthode 1 (a_3 sur l'axe x, a_4 sur l'axe y).

gorithme de Rosenfeld-Groebner en dérivant par rapport au temps. La difficulté dans cette méthode consiste alors à obtenir un polynôme ES bien défini au sens de la régularité de la solution du modèle initial. En effet, il apparaît souvent que le polynôme contient des dérivées en la sortie d'ordre plus élevé que la régularité de la solution. Pour utiliser tout de même ces relations polynomiales aussi bien d'un point de vue théorique que numérique, nous avons été amené à construire de nouvelles relations adaptées au problème initial. L'exemple qui nous a guidé pour écrire les articles [200, 229, 228] et définir un cadre général pour les EDP est celui de la transmission du chikungunya à l'homme. En effet, le simple modèle EDO ne prend pas en compte un phéno-

| Paramètres | % $\mathbf{P}_{method1}$ | % $\mathbf{P}_{method2}$ |
|------------|--------------------------|--------------------------|
| a_1 | 93 | 95.80 |
| a_2 | 93 | 97.60 |
| a_3 | 92.20 | 93.00 |
| a_4 | 88.00 | 93.60 |

TABLE 2.4 – Pourcentage de boîtes éliminées pour les deux méthodes (boîtes solutions).

mène important dans les maladies épidémiologiques qui est la ré-émergence de la maladie du fait de la mobilité humaine. Pour spatialiser ce modèle, nous avons choisi d'ajouter un terme de diffusion comme dans [149] ou [127] et de considérer sa solution dans L^2 .

Dans la littérature, l'identifiabilité dans les systèmes d'équations aux dérivées partielles porte essentiellement sur les problèmes sources ou le problème de Calderón (voir [5, 56, 71, 88, 150, 191, 224]). Ceux-ci consistent à identifier un terme source ou à déterminer un paramètre variable en espace à partir de mesures au bord. Dans notre cas, nous avons supposé que la solution est connue sur tout le domaine ou sur une partie de celui-ci. Même si cette hypothèse semble moins considérée dans la littérature, on trouve quelques travaux. Par exemple, les auteurs de [48, 221] ont proposé une étude d'identifiabilité sur un modèle de réaction-diffusion en épidémiologique de type SIS (Susceptible - Infecté - Susceptible) en utilisant une méthode de contrôle optimale. Dans [157], les auteurs utilisent des relations entrée-sortie pour étudier l'identifiabilité d'un système d'équations intégro-différentielles non linéaires de type équation de transport. Une approche basée sur la théorie des semi-groupes pour identifier le taux de mortalité dans un modèle de population structuré en âge a été proposé par [158]. Dans le cas de systèmes couplés d'ODEs et d'EDPs, une étude d'identifiabilité a été faite dans [122] en utilisant les estimateurs de type Carleman. Dans [189], les auteurs ont utilisé une approche basée sur l'algèbre différentielle lorsque le modèle EDP est un modèle de population structuré en âge par rapport au début de l'infection.

2.6.1 Notations

Cette première partie introduit les notations utiles pour la suite de la section où on considérera

- Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n et C^2 au bord;
- $C_t([0, \infty); C(\bar{\Omega}))$ l'espace des fonctions continues par morceaux de $[0, \infty)$ sur $C(\bar{\Omega})$ et $C_t^1([0, \infty); C(\bar{\Omega}))$ l'espace des fonctions différentiables par morceaux de $[0, \infty)$ sur $C(\bar{\Omega})$;
- T_F la distribution régulière de F qui est une fonction localement intégrable;
- $H_N^2(\Omega) := \{v \in H^2(\Omega) \mid \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$, où ν est le vecteur normal unitaire sortant de $\partial\Omega$;
- $\langle f \rangle := \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(x) dx$ où $f \in L^1(\Omega)$.

2.6.2 Le modèle considéré

Le type de modèle que nous avons considéré est un modèle maître-esclave de deux espèces. Sa particularité est que l'espèce esclave se déplace contrairement à l'espèce maître. Ce type de modèle peut s'appliquer par exemple au modèle de transmission du Chikungunya. En effet, dans la majorité des cas, le vecteur de transmission, c'est à dire le moustique tigre ne se déplace que très peu par rapport à l'homme.

Le modèle maître est alors un système d'EDOs s'écrivant :

$$\begin{cases} \partial_t \zeta &= F(t, \zeta), \quad \text{in } (0, \infty), \\ \zeta(0) &= \zeta_0. \end{cases} \quad (2.65)$$

où $\zeta_0 \in C(\bar{\Omega})$ et $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ est continue par morceaux en la première composante et lipschitzienne par rapport à la seconde composante. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution différentiable par morceaux ζ telle que $\zeta \in C_t^1([0, \infty); C(\bar{\Omega}))$.

Le modèle esclave est quant à lui un système d'équations de réaction-diffusion défini sur l'espace de Banach $X := C(\Omega; \mathbb{R}^{q_0}) \times L^2(\Omega; \mathbb{R}^{q_1})$ et qui dépend de la solution ζ du modèle maître :

$$\begin{cases} \partial_t U + BU &= G(t, \zeta, U), \quad \text{in } (0, \infty), \\ U(0) &= U_0, \end{cases} \quad (2.66)$$

où $U_0 \in X$ et l'opérateur diagonal $B := \text{diag}(B_i)$ sur X satisfait :

- pour tout $i \in \{1, \dots, q_0\}$, $B_i := I$,
- pour tout $i \in \{q_0 + 1, \dots, q\}$ (où $q := q_0 + q_1$), $B_i := d_i A + b_i$ avec $d_i, b_i > 0$ et A est la réalisation du Laplacien dans $L^2(\Omega)$ avec des conditions homogènes de Neumann sur le bord $\partial\Omega$.

Ainsi, (2.66) est composé de q_0 EDOs, q_1 EDPs et qui sont couplées.

De plus, $G(t, \zeta, \cdot)$ est un opérateur non linéaire de $D(B^\eta)$ dans X où $0 < \eta < 1$, qui satisfait la condition de type lipschitz suivante : il existe une fonction croissante ϕ telle que, pour tout intervalle compact I sur lequel ζ est différentiable et pour tout couple $(t, U), (s, V) \in I \times D(B^\eta)$, G vérifie

$$\begin{aligned} \|G(t, \zeta, U) - G(s, \zeta, V)\|_X &\leq \phi(\|U\|_X + \|V\|_X) \\ &\times \left[\|B^\eta(U - V)\|_X + (\|B^\eta U\|_X + \|B^\eta V\|_X + 1)(|t - s| + \|U - V\|_X) \right], \end{aligned} \quad (2.67)$$

où $\|\cdot\|_X$ est la norme de X .

Une simple adaptation du Théorème 4.4 de [222] (p. 188 et p. 199 pour le cas non autonome) implique qu'il existe $T_{U_0} > 0$ tel que (2.66) admet une unique solution locale

$$U \in C_t([0, T_{U_0}]; D(B)) \cap C_t^1((0, T_{U_0}); X).$$

Notons que U est continue et différentiable par morceaux due à sa dépendance à ζ .

De plus, s'il existe $C_{U_0} > 0$ telle que la solution locale U vérifie

$$\|U(t)\|_2 \leq C_{U_0}, \quad (2.68)$$

sur tout intervalle compact I où U est continue par rapport au temps, alors U est une solution globale c'est à dire :

$$U \in C_t([0, \infty); D(B)) \cap C_t^1((0, \infty); X).$$

Soit $\theta := (\theta_a, \theta_b) \in L^\infty(\Omega; \mathcal{U}_p)$, où \mathcal{U}_p est un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^p , et le vecteur sortie. Les modèles (2.65) et (2.66) peuvent se ré-écrire :

$$(\Gamma_a) \begin{cases} \partial_t \zeta(t, \theta_a) &= f(t, \zeta, \theta_a), & t \in [0, \infty), \\ y_a(t, \theta_a) &= h_a(\zeta), & t \in [0, \infty), \end{cases} \quad (2.69)$$

complété des conditions initiales $\zeta(t=0, \theta_a) = \zeta_0$, et

$$(\Gamma_b) \begin{cases} \partial_t U(t, \theta_b) + B(\theta_b)U(t, \theta_b) &= g(\zeta, U, \theta_b), & t \in [0, \infty), \\ y_b(t, \theta_b) &= h_b(\zeta, U), & t \in [0, \infty), \end{cases} \quad (2.70)$$

complété des conditions $U(t=0, \theta_b) = U_0$ et telles que :

- $f := (f_1, \dots, f_p)$ où f_i , $1 \leq i \leq p$, est une fonction rationnelle en ζ et θ_a ,
- $g := (g_1, \dots, g_q)$ où g_i , $1 \leq i \leq q$, est une fonction rationnelle en ζ , U et θ_b ,
- $h_a := (h_{a,1}, \dots, h_{a,m_a})$ (resp. $h_b := (h_{b,1}, \dots, h_{b,m_b})$) où $h_{a,i}$, $1 \leq i \leq m_a$ (resp. $h_{b,i}$, $1 \leq i \leq m_b$), sont des fonctions rationnelles en ζ (resp. ζ et U).

Par la suite, (Γ_θ) désignera (Γ_a) ou (Γ_b) .

2.6.3 Cas général

La définition classique de l'identifiabilité (1) a été adaptée à notre problème. En effet, les paramètres peuvent être des données spatiales. La définition est la suivante :

Définition 15. *Le modèle (Γ_θ) est identifiable en θ si il existe un temps $t_1 > 0$ et un sous-ensemble $\bar{\Omega}$ de Ω tel que, pour tout $\theta, \tilde{\theta} \in L^\infty(\Omega; \mathcal{U}_p)$, nous avons*

$$\forall (t, \mathbf{x}) \in [0, t_1] \times \bar{\Omega}, \quad y(t, \theta)(\mathbf{x}) = y(t, \tilde{\theta})(\mathbf{x}) \implies \theta = \tilde{\theta}.$$

Ainsi, pour qu'un modèle soit identifiable, il doit exister un intervalle de temps et un domaine tel que deux jeux de paramètres distincts ne généreront pas les mêmes sorties. Cette définition peut-être facilement étendue à des sorties continues par morceaux en considérant l'identifiabilité du modèle sur chaque sous intervalle sur lequel les sorties sont définies.

Là encore, l'étude va se ramener à étudier les coefficients de polynômes en les sorties et les entrées du modèle. Ces derniers peuvent être obtenus grâce à un logiciel de calcul formel. Toutefois, dans ce cas, la procédure d'élimination est faite de façon formelle et ne nous garantit pas que la fonction polynômiale associée au polynôme entrée-sortie soit bien définie par rapport à la régularité de la solution initiale. Pour remédier à ce problème et gagner de la régularité sur la fonction polynômiale, nous avons proposé des méthodes permettant de montrer l'identifiabilité du modèle, résultat que nous n'avions pas en utilisant directement le polynôme de départ.

Rappelons que le polynôme entrée-sortie peut se ré-écrire :

$$P(y_\theta, \theta, u) = m_0(y_\theta, u) + \sum_{k=1}^n \gamma_k(\theta) m_k(y_\theta, u) \quad \text{et} \quad P(y_\theta, \theta, u) = 0, \quad (2.71)$$

où $(\gamma_k(\theta))_{1 \leq k \leq n}$ ($\theta_\alpha \neq \theta_\beta$ si $\alpha \neq \beta$ et $\alpha, \beta \in \{1, \dots, n\}$) sont rationnels en θ , $(m_k(y_\theta, u))_{0 \leq k \leq n}$ sont des polynômes différentiables en y_θ et u , et $m_0 \neq 0$.

Remarque 14. Pour le système (Γ_b) , la fonction ζ peut-être considérée comme une entrée.

La proposition 3 ne peut pas être reprise directement pour montrer l'identifiabilité du modèle Γ_θ . En effet, les ensembles semi-algébriques sont définis sur $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} or ici nous travaillons avec des fonctions L^∞ . Toutefois, elle peut être adaptée. Supposons que la fonction polynômiale associée au polynôme P est bien définie au sens de la régularité de la solution, alors on a la proposition suivante :

Proposition 16. Supposons que la famille de fonctions $m_k(y_\theta, u)$, $1 \leq k \leq d$ définie en (2.71) est linéairement indépendante. Si pour tout $(\theta, \tilde{\theta}) \in L^\infty(\Omega, \mathcal{U}_p)^2$, nous avons

$$\forall k \in \{1, \dots, d\}, \quad \gamma_k(\theta) = \gamma_k(\tilde{\theta}) \implies \theta = \tilde{\theta},$$

alors le modèle est identifiable en θ .

Dans le cas où la dérivée de plus haut degré de y par rapport au temps est trop grande par rapport la régularité de la solution, nous proposons de ré-écrire le polynôme au sens des distributions. Supposons que dans (2.71), les $m_k(y_\theta, u)$, $k = 0, \dots, d$, sont définis presque partout et sont Lebesgue intégrables. On peut alors remplacer $m_k(y_\theta, u)$ par sa distribution $T_{m_k(y_\theta, u)}$. Ainsi, la nouvelle relation obtenue est :

$$T_{m_0(y_\theta, u)} + \sum_{k=1}^n \gamma_k(\theta) T_{m_k(y_\theta, u)} = 0. \quad (2.72)$$

Similairement à la proposition 16, nous avons le résultat suivant au sens des distributions.

Proposition 17. Supposons que la famille de distributions $(T_{m_k(y_\theta, u)})_{1 \leq k \leq n}$ provenant de (2.72) est linéairement indépendante. Si, pour tout $(\theta, \tilde{\theta}) \in L^\infty(\Omega, \mathcal{U}_p)^2$, nous avons

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad \gamma_k(\theta) = \gamma_k(\tilde{\theta}) \implies \theta = \tilde{\theta},$$

alors le modèle considéré au sens des distributions est identifiable en θ .

Remarque 15. Il est facile de montrer que si les $m_k(y_\theta, u)$, $k = 1, \dots, n$ sont linéairement indépendants alors les $T_{m_k(y_\theta, u)}$, $1 \leq k \leq n$ sont linéairement indépendants également. Cette remarque peut être importante dans les applications pour prouver l'hypothèse d'indépendance.

2.6.4 Résultats d'identifiabilité

Résultat d'identifiabilité pour (Γ_a) quand $\theta_a \in L^\infty$

La sortie y_a est en général différentiable par morceaux en temps (ou juste continue). Utilisant cette propriété, on peut obtenir une relation polynômiale plus informative et prenant en compte les points de discontinuité de y_a (rappelons que seule la dérivation en temps est considérée). Cette nouvelle relation peut alors permettre de conclure sur l'identifiabilité du modèle. Regardons l'exemple suivant pour nous convaincre.

Exemple 2.6.1. Considérons le simple système d'EDO suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= u, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + k u, \end{cases}$$

où $k \in \mathbb{R}$ est le paramètre à identifier ($\theta = k$) et u est une fonction entrée.

Supposons que u est C^1 et que la sortie soit $y := x_2$. Alors, y est C^2 et nous avons

$$\ddot{y} = \dot{x}_1 + k\dot{u} = u + k\dot{u}. \quad (2.73)$$

Nous en déduisons que le polynôme ES est :

$$P(y, k, u) := \ddot{y} - u - k\dot{u}.$$

Si u est constant, k n'est pas identifiable.

Maintenant, supposons que u est une fonction constante par morceaux et est définie par

$$u(t) := \begin{cases} u_1 & \text{if } t \in (0, t_1) \\ u_2 & \text{if } t \in (t_1, T), \end{cases}$$

où $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$, $u_1 \neq u_2$. L'équation (2.73) écrite dans le sens des distributions donne

$$T_y'' = T_u + k(u_2 - u_1)\delta_{t_1}.$$

Si $u_1 \neq u_2$, le modèle est identifiable grâce à cette nouvelle relation.

Revenons au système (Γ_a) pour lequel la solution ζ est différentiable par morceaux en temps. Soit s la dérivée la plus élevée en temps de y_a apparaissant dans (2.71). Si la fonction $y_a^{(s)}$ peut s'exprimer formellement dans (2.71) comme un terme de la forme $d(y_a, y_a', \dots, y_a^{s-1})y_a^{(s)}$ où d est une fonction polynômiale différentiable en y_a et qui ne s'annule pas, alors (2.71) peut se ré-écrire :

$$y_a^{(s)} = \tilde{m}_0(y_a) + \sum_{k=1}^d \gamma_k(\theta_a)\tilde{m}_k(y_a), \quad (2.74)$$

où, pour tout $k = 0, \dots, d$, $\tilde{m}_k(y_a)$ est une fonction rationnelle supposée localement lebesgue intégrable en temps ⁸.

Supposons que y_a est s fois différentiable par morceaux par rapport au temps et soit $(t_\nu)_\nu$ la suite ordonnée de points correspondant aux points de discontinuité de y_a . Étant donné les discontinuités de y_a , la relation (2.74) peut être considérée au sens des distributions :

$$T_{y_a}^{(s)} = T_{\tilde{m}_0(y_a)} + \sum_{k=1}^d \gamma_k(\theta_a)T_{\tilde{m}_k(y_a)}. \quad (2.75)$$

Notons pour tout $j = 0, \dots, s$, le saut en t_ν de $y_a^{(j)}$ est donné par

$$\sigma_{y_a, \nu}^j(\theta_a) := y_a^{(j)}(t_\nu^+) - y_a^{(j)}(t_\nu^-).$$

Remarquons que le saut dépend de θ_a puisque y_a dépend lui-même de θ_a . Nous obtenons

$$T_{y_a}^{(s)} = T_{y_a^{(s)}} + \sum_{\nu} \sum_{j=0}^{s-1} \sigma_{y_a, \nu}^j \delta_{t_\nu}^{(s-1-j)},$$

où δ_{t_ν} représente la distribution de Dirac au point t_ν . Ainsi, l'équation (2.75) devient

$$T_{y_a}^{(s)} = T_{\tilde{m}_0(y_a)} - \sum_{\nu} \sum_{j=0}^{s-1} \sigma_{y_a, \nu}^j(\theta_a)\delta_{t_\nu}^{(s-1-j)} + \sum_{k=1}^d \gamma_k(\theta_a)T_{\tilde{m}_k(y_a)}. \quad (2.76)$$

Remarque 16.

1. Ces relations sont plus informatives que (2.74) car les contraintes dues aux discontinuités et pouvant dépendre des paramètres à identifier sont prises en compte directement dans l'étude.
2. Cette opération peut permettre d'obtenir des relations bien définies par rapport à la régularité de la solution.

La proposition suivante donne une condition suffisante pour obtenir l'identifiabilité des paramètres.

⁸. La dépendance en temps a été omise pour simplifier les notations.

Proposition 18. *Supposons que la famille de distributions $(\Gamma_{\tilde{m}_k(y_a)})_{1 \leq k \leq d}$ est linéairement indépendante. Si, pour tout $(\theta_a, \tilde{\theta}_a) \in L^\infty(\Omega, \mathcal{U}_p)^2$, nous avons*

$$\begin{cases} \gamma_k(\theta_a) = \gamma_k(\tilde{\theta}_a) \\ \forall \nu, \sum_{j=0}^{s-1} \sigma_{y_a, \nu}^j(\theta_a) = \sum_{j=0}^{s-1} \sigma_{y_a, \nu}^j(\tilde{\theta}_a) \end{cases} \implies \theta_a = \tilde{\theta}_a,$$

alors le modèle est identifiable en θ_a .

Le résultat vient de l'indépendance linéaire des familles $(\delta_{t_\nu}^{(j)})_{j=0, \dots, s}$ et $(\tilde{T}_{m_k(y_\theta)})_{k=1, \dots, n}$.

Ces relations différentielles (2.71), (2.72), (2.76) peuvent également être utilisées pour obtenir une première estimation des paramètres inconnus comme nous le verrons dans la section suivante.

Résultat d'identifiabilité pour (Γ_b)

Soit le vecteur de paramètres $\theta_b := (\theta_c, \theta_d)$ où $\theta_c \in \mathbb{R}^{q_0}$ et $\theta_d := (d_i)_{i \in I}$ avec $I \subset \{q_0 + 1, \dots, q\}$. Soit $U := (U_i)_{i=1, \dots, q}$ la solution de (Γ_b) et y_b donné par (2.70). Nous avons obtenu le premier lemme suivant :

Lemme 1. *Soit y_b défini par $y_b := (y_c, y_d)$ où $y_d := (U_i)_{i \in I}$. Supposons qu'il existe $\nu \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $t \in (t_\nu, t_{\nu+1})$,*

1. *il existe une famille de réels positifs $(\lambda_i)_{i \in I}$ telle que*

$$\sum_{i \in I} \lambda_i (g_i(\zeta(t), U(t), \theta_d) - \partial_t U_i)$$

est indépendant de θ_d ,

2. *la famille $(U_i(t, \cdot))_{i \in I}$ est linéairement indépendante à une constante additive près dans Ω ,*
3. *les b_i définis dans $B_i = d_i A + b_i$ sont supposés être connus.*

Alors (Γ_b) est identifiable en θ_d .

Remarque 17. *Le lemme 1 donne une condition suffisante pour obtenir l'identifiabilité des coefficients de diffusion $(d_i)_{i \in I}$ quand les solutions associées $(U_i)_{i \in I}$ sont connues.*

En effet, soit $\theta_d, \tilde{\theta}_d$ tel que pour tout $(t, x) \in (t_\nu, t_{\nu+1}) \times \Omega$, $y_b(t, x, \theta_d) = y_b(t, x, \tilde{\theta}_d)$. D'après l'hypothèse (1), nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \lambda_i B_i(\theta_d) U_i &= \sum_{i \in I} \lambda_i (g_i(\zeta(t), U(t), \theta_d) - \partial_t U_i) \\ &= \sum_{i \in I} \lambda_i (g_i(\zeta(t), U(t), \tilde{\theta}_d) - \partial_t U_i) \\ &= \sum_{i \in I} \lambda_i B_i(\tilde{\theta}_d) U_i, \end{aligned}$$

qui implique que

$$\sum_{i \in I} \lambda_i (d_i - \tilde{d}_i) A U_i = 0.$$

Donc $V := \sum_{i \in I} \lambda_i (d_i - \tilde{d}_i) U_i$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre nulle. Ainsi, V est constant. Comme pour tout $t \in (t_\nu, t_{\nu+1})$, $(U_i(t, \cdot))_{i \in I}$ est linéairement indépendante à une constante additive près dans Ω , nous en déduisons que pour tout $i \in I$

$$\lambda_i (d_i - \tilde{d}_i) = 0,$$

qui implique le résultat puisque $\lambda_i \neq 0$.

Pour obtenir l'identifiabilité de θ_c , il est possible d'utiliser les propositions 16 et 17. Cependant, le calcul du wronskien pour prouver l'indépendance linéaire de la famille $(m_k(y_b))_{k=1, \dots, n}$ peut être difficile. Dans le lemme suivant, nous proposons de substituer ce test par un autre.

Lemme 2. *Soit $\tilde{P} := \langle P \rangle$. Supposons que*

1. *(Γ_b) est identifiable en θ_d ,*

2. le polynôme P défini par (2.71) avec $\theta := \theta_c$ satisfait, pour tout $k = 1, \dots, n$,

$$\gamma_k(\theta_c) = \gamma_k(\tilde{\theta}_c) \implies \theta_c = \tilde{\theta}_c,$$

3. la famille de fonctions $(\langle m_k(y_b) \rangle)_{k=1, \dots, n}$ est linéairement indépendante.

Alors (Γ_b) est identifiable en θ_c .

La preuve est basée sur l'expression obtenue en faisant la différence entre $\tilde{P}(y_b, \theta_c)$ et $\tilde{P}(y_b, \tilde{\theta}_c)$ évaluée en t_j où $y_b := y_{\theta_b}(\cdot, \theta_c)$ et $\tilde{y}_b := y_{\theta_b}(\cdot, \tilde{\theta}_c)$.

Remarque 18. 1. Si la relation \tilde{P} obtenue en prenant la valeur moyenne de (2.71) n'est pas bien définie par rapport à la variable de temps, la relation peut être considérée dans le sens des distributions. Dans ce cas, pour l'hypothèse 3, il est suffisant de prouver l'indépendance linéaire de la famille $(\langle m_k(y_b) \rangle)_{k=1, \dots, n}$. En effet, si la famille $(\langle m_k(y_b) \rangle)_{k=1, \dots, n}$ est linéairement indépendante alors la famille $(T_{\langle m_k(y_b) \rangle})_{k=1, \dots, n}$ est également linéairement indépendante.

2. Une autre façon de traiter l'hypothèse d'indépendance linéaire est de supposer qu'il existe n points distincts t_1, \dots, t_n tel que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \langle m_1(y_b) \rangle(t_1) & \dots & \langle m_n(y_b) \rangle(t_1) \\ \langle m_1(y_b) \rangle(t_2) & \dots & \langle m_n(y_b) \rangle(t_2) \\ \vdots & & \vdots \\ \langle m_1(y_b) \rangle(t_n) & \dots & \langle m_n(y_b) \rangle(t_n) \end{vmatrix} \quad (2.77)$$

est non nul.

Dans les applications numériques, les n points distincts t_1, \dots, t_n peuvent être choisis de façon aléatoire pour évaluer ce déterminant.

2.6.5 Exemple

Reprenons l'exemple 2.3.4. Contrairement au déplacement des moustiques qui est très souvent limité à quelques mètres, nous modélisons la mobilité humaine en ajoutant des termes de diffusion comme dans [149]. Le modèle se réécrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Gamma_a) \left\{ \begin{array}{l} \partial_t E_m(t, x) = b A_m(t, x) \left(1 - \frac{E_m(t, x)}{K_E(t, x)}\right) - (s + d) E_m(t, x), \\ \partial_t L_m(t, x) = s E_m(t, x) \left(1 - \frac{L_m(t, x)}{K_L(t, x)}\right) - (s_L + d_L) L_m(t, x), \\ \partial_t A_m(t, x) = s_L L_m(t, x) - d_m A_m(t, x), \end{array} \right. \\ (\Gamma_b) \left\{ \begin{array}{l} \partial_t I_m(t, x) = -\left(s_L \frac{L_m(t, x)}{A_m(t, x)} + \beta_m I_H(t, x)\right) I_m(t, x) + \beta_m I_H(t, x), \\ \partial_t S_H(t, x) = -(b_H + \beta_H I_m(t, x)) S_H(t, x) + b_H + d_1 \Delta S_H(t, x), \\ \partial_t I_H(t, x) = \beta_H I_m(t, x) S_H(t, x) - (\gamma + b_H) I_H(t, x) + d_2 \Delta I_H(t, x), \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (2.78) \quad (b)$$

où $d_1, d_2 > 0$ sont des coefficients de diffusion, x est dans le domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avec des conditions C^2 au bord et $t > 0$. Le modèle est complété avec les conditions initiales suivantes

$$\begin{aligned} (E_m(0, x), L_m(0, x), A_m(0, x)) &= (E_0(x), L_0(x), A_0(x)), \\ (I_m(0, x), S_H(0, x), I_H(0, x)) &= (I_0^m(x), S_0^H(x), I_0^H(x)). \end{aligned}$$

De plus, nous supposons qu'il n'existe pas de population traversant la frontière $\partial\Omega$ de Ω . Ainsi, le modèle est complété par les conditions de Neumann suivantes :

$$\frac{\partial S_H}{\partial \nu} = \frac{\partial I_H}{\partial \nu} = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega,$$

où ν est la normale sortante de $\partial\Omega$. Nous supposons également que

1. $(E_0, L_0, A_0) \in C(\bar{\Omega})^3$, $I_0^m \in C(\Omega)$ et $(S_0^H, I_0^H) \in L^2(\Omega)^2$.

2. Les capacités d'accueil de gîte K_E et K_L satisfont

$$K_E, K_L \in L^\infty([0, \infty) \times \Omega) \quad \text{avec} \quad K_L(t, x) = K_E(t, x)/2 \neq 0, \quad \text{pour presque tout } (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega.$$

3. K_E et K_L sont des fonctions constantes par morceaux en temps et connues, ce qui peut correspondre à des changements brutaux de l'environnement.

En posant, pour x fixé dans Ω ,

$$\forall t \in [0, \infty), \quad \zeta_1(t) := \frac{E_m(t, x)}{K_E(t, x)}, \quad \zeta_2(t) := \frac{L_m(t, x)}{K_E(t, x)}, \quad \zeta_3(t) := \frac{A_m(t, x)}{K_E(t, x)},$$

Comme $\tilde{\zeta}_2$ dépend seulement de d_m et de la variable mesurée ζ_2 , nous la considérons comme variable mesurée. Les trois observations sont

$$y_{a,1} := \zeta_2, \quad y_{a,2} := \tilde{\zeta}_2 \quad \text{et} \quad y_{a,3} := \lambda.$$

Le système (2.78)-(a) se réécrit :

$$\begin{cases} \partial_t \zeta_1 &= b\zeta_3(1 - \zeta_1) - (s + d)\zeta_1 \\ \partial_t \zeta_2 &= s\zeta_1(1 - 2\zeta_2) - (s_L + d_L)\zeta_2 \\ \zeta_3 &= \zeta_3(0)\lambda + s_L\tilde{\zeta}_2 \\ \partial_t \tilde{\zeta}_2 &= \zeta_2 - d_m\tilde{\zeta}_2 \\ \partial_t \lambda &= -d_m\lambda \\ y_{a,1} &= \zeta_2, \quad y_{a,2} = \tilde{\zeta}_2, \quad y_{a,3} = \lambda \end{cases} \quad (2.79)$$

avec les conditions initiales :

$$(\zeta_1(0, x), \zeta_2(0, x), \zeta_3(0, x), \tilde{\zeta}_2(0, x), \lambda(0)) = (\zeta_{1,0}(x), \zeta_{2,0}(x), \zeta_{3,0}(x), 0, 1).$$

Soit

$$\Sigma := \left\{ (E, L, A) \in C(\bar{\Omega})^3 \mid 0 \leq E \leq k, 0 \leq L \leq \frac{k}{2}, 0 \leq A \leq \frac{s_L k}{2d_m} \right\},$$

où nous avons posé $k := \|K_E\|_\infty > 0$.

Une simple adaptation des Lemmes 4.2 et 4.3 de [145] permet de passer du cas K_E constant au cas où K_E est une fonction dépendant de x et constante par morceaux par rapport au temps, d'où :

Proposition 19. *Soit $(E_0, L_0, A_0) \in \Sigma$ et*

$$R := \frac{s_L}{d_m} \frac{b}{s+d} \frac{s}{s_L + d_L}.$$

alors, si $R > 1$, le système (2.78)-(a) admet une unique solution (E_m, L_m, A_m) dans l'espace des fonctions différentiables par morceaux $C_l^1([0, \infty); \text{int}(\Sigma))^3$ où $\text{int}(\Sigma)$ est l'intérieur de Σ .

Remarque 19.

1. Les points de discontinuité de E_m, L_m et A_m sont les mêmes que ceux de K_E .
2. De [145], la condition de survie des oeufs, larves et des populations de moustiques adultes est donnée par $R > 1$. Nous supposons par la suite que $R > 1$ c'est à dire que $E_m, L_m, A_m > 0$. Nous faisons en particulier l'hypothèse suivante :

$$(\mathcal{H}) \quad R > 1 \text{ et il existe } c > 0 \text{ tel que, pour tout } t \geq 0, \zeta_3(t) := A_m(t, \cdot) > c.$$

Comme (\mathcal{H}) est vérifiée,

$$r := \frac{L_m}{A_m} \in C_l^1([0, \infty); C(\bar{\Omega})).$$

En posant $U := (I_m, S_H, I_H)$, le système (2.78)-(b) est de la forme (2.66) où l'espace de Banach X est

$$X := \{(u_1, u_2, u_3) \mid u_1 \in C(\bar{\Omega}), u_2, u_3 \in L^2(\Omega)\},$$

et l'opérateur B est défini par

$$B := \text{diag}(I, -d_1A + b_H, -d_2A + \gamma + b_H).$$

A est la réalisation du Laplacien dans $L^2(\Omega)$ avec les conditions de Neumann homogènes sur le bord $\partial\Omega$, et I est l'opérateur identité sur $C(\bar{\Omega})$. Par conséquent, l'opérateur non-linéaire $G(t, \cdot)$ est défini par

$$G(t, U) := (-(s_L r(t) + \beta_m u_3 - 1)u_1 + \beta_m u_3, -\beta_H u_1 u_3 + b_H, \beta_H u_1 u_2).$$

Nous avons montré dans [200] que G vérifie (2.67) et ainsi que (2.78)-(b) admet une unique solution locale

$$U \in C_l([0, T_{U_0}]; D(B)) \cap C_l^1((0, T_{U_0}]; X)$$

où $U_0 := (I_0^m, S_0^H, I_0^H)$.

De plus, si

$$X_+ := \{(u_1, u_2, u_3) \in X \mid u_1, u_2, u_3 \geq 0\}, \quad (2.80)$$

le théorème suivant donné dans [200] permet de conclure que la solution est globale.

Théorème 1. *Sous l'hypothèse (\mathcal{H}) , pour toute $(I_0^m, S_0^H, I_0^H) \in X_+$, (2.78)-(b) possède une unique solution globale positive telle que*

$$\begin{cases} I_m \in C_l^1([0, \infty); C(\bar{\Omega})), \\ S_H, I_H \in C_l([0, \infty); H_N^2(\Omega)) \cap C_l^1((0, \infty); L^2(\Omega)). \end{cases}$$

2.6.5.1 Résultats d'identifiabilité

Nous reprenons les hypothèses de la section 2.4.2.4, c'est à dire que les paramètres à identifier sont s, s_L pour le système (2.78)-(a) et $\beta_H, \beta_m, d_1, d_2$ pour le système (2.78)-(b). Les sorties mesurées sont L_m, S_H, I_H .

Dans [229], l'identifiabilité du modèle (2.78) a été étudiée mais dans le cas de fonction régulières : pour le système (2.78)-(a), les solutions étaient C^∞ et pour le système (2.78)-(b), elles étaient continues.

Nous avons démontré le résultat suivant dans [200] :

Théorème 2. *Supposons que les constantes $b, d, d_L, d_m, b_H, \gamma$ sont connues et qu'il existe $\nu \in \mathbb{N}$ tel que*

- pour tout $(t, x) \in (t_\nu, t_{\nu+1}) \times \Omega$, $L_m(t, x)$, $S_H(t, x)$ et $I_H(t, x)$ sont des sorties du modèle,
- pour chaque $t \in (t_\nu, t_{\nu+1})$, $S_H(t, \cdot)$ et $I_H(t, \cdot)$ sont indépendants linéairement à une constante additive près dans Ω .

Nous rappelons que la notation $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne la moyenne sur tout l'espace Ω . Alors, le système (2.78) est identifiable en s, s_L, A_0, d_1 et d_2 .

Soit $\tilde{I}_m := \beta_H I_m$. Sous les mêmes hypothèses, si il existe $\tilde{t} \in (t_\nu, t_{\nu+1})$ tel que $\langle I_H S_H^2 \rangle(\tilde{t}) \neq 0$ et $\langle \tilde{I}_m I_H S_H^2 \rangle(\tilde{t}) \neq 0$, alors le système (2.78) est identifiable en β_m et β_H .

Remarque 20.

1. Dans la démonstration, un résultat supplémentaire a été obtenu sur l'identifiabilité de la condition initiale $A_0 \in C(\bar{\Omega})$. Par conséquent, on peut mettre en place une procédure d'estimation de paramètres pour estimer de façon unique A_0 et les autres paramètres à partir de L_m, S_H et I_H .
2. L'identifiabilité des paramètres β_m et β_H a été démontrée à partir d'un polynôme ES obtenu en appliquant l'algorithme de Rosenfeld-Groebner au système (2.78)-(b).
3. L'identifiabilité des paramètres d_1 et d_2 a été obtenue à partir d'un polynôme ES qui est repris à la section suivante pour estimer ces paramètres.

2.6.5.2 Exemple de l'estimation de paramètres à partir des polynômes ES dans le cadre des EDP

Dans cette section, nous présentons une méthode numérique basée sur les polynômes ES pour estimer les paramètres d_1 et d_2 .

La relation ES est obtenue en faisant la somme de la seconde et la troisième équation de (2.78)-(b), ce qui nous donne

$$d_1 \Delta y_{b,1}(t, \cdot) + d_2 \Delta y_{b,2}(t, \cdot) = \partial_t y_{b,1}(t, \cdot) + \partial_t y_{b,2}(t, \cdot) + b_H (y_{b,1}(t, \cdot) - 1) + (\gamma + b_H) y_{b,2}(t, \cdot). \quad (2.81)$$

Pour obtenir une relation bien définie, la relation (2.81) est ré-écrite au sens des distributions :

$$\begin{aligned} d_1 \int_{\Omega} S_H(t, x) \Delta \psi(x) dx + d_2 \int_{\Omega} I_H(t, x) \Delta \psi(x) dx &= \int_{\Omega} \left(\partial_t S_H(t, x) + \partial_t I_H(t, x) \right) \psi(x) dx \\ &+ (\gamma + b_H) \int_{\Omega} I_H(t, x) \psi(x) dx - b_H \int_{\Omega} \left(1 - S_H(t, x) \right) \psi(x) dx, \end{aligned}$$

pour tout $\psi \in C_c(\Omega)$. En intégrant la relation sur $(0, t)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
& d_1 \int_0^t \left(\int_{\Omega} S_H(\tau, s) \Delta \psi(s) ds \right) d\tau + d_2 \int_0^t \left(\int_{\Omega} I_H(\tau, s) \Delta \psi(s) ds \right) d\tau \\
&= \int_{\Omega} \left(S_H(t, s) + I_H(t, s) \right) \psi(s) ds - \int_{\Omega} \left(S_H(0, s) + I_H(0, s) \right) \psi(s) ds \\
&+ (\gamma + b_H) \int_0^t \left(\int_{\Omega} I_H(\tau, s) \psi(s) ds \right) d\tau - b_H \int_0^t \left(\int_{\Omega} (1 - S_H(\tau, s)) \psi(s) ds \right) d\tau,
\end{aligned} \tag{2.82}$$

pour tout $\psi \in C_c(\Omega)$ et tout $t > 0$.

Pour les fonctions test, nous avons choisi :

$$\psi(x, y) := \begin{cases} e^{\frac{1}{1-x^2-y^2}} & \text{if } (x, y) \in \Omega, \\ 0 & \text{else,} \end{cases}$$

et une discrétisation $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_{M+1} = T$ de $[0, T]$. Pour $k = 1, 2, \dots, M$, nous posons

$$\begin{aligned}
A(k, 1) &:= \int_0^{t_{k+1}} \left(\int_{\Omega} S_H(\tau, s) \Delta \psi(s) ds \right) d\tau, \\
A(k, 2) &:= \int_0^{t_{k+1}} \left(\int_{\Omega} I_H(\tau, s) \Delta \psi(s) ds \right) d\tau,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
B(k) &:= \int_{\Omega} \left(S_H(t_{k+1}, s) + I_H(t_{k+1}, s) \right) \psi(s) ds - \int_{\Omega} \left(S_H(0, s) + I_H(0, s) \right) \psi(s) ds \\
&+ (\gamma + b_H) \int_0^{t_{k+1}} \left(\int_{\Omega} I_H(\tau, s) \psi(s) ds \right) d\tau - b_H \int_0^{t_{k+1}} \left(\int_{\Omega} (1 - S_H(\tau, s)) \psi(s) ds \right) d\tau.
\end{aligned}$$

De (2.82), on déduit le système suivant :

$$Ad = B, \text{ où } d := (d_1, d_2)^T \tag{2.83}$$

qui est résolu en utilisant la méthode des moindres-carrés basée sur la factorisation QR . Les résultats sont résumés dans le tableau 2.5 où λ est l'erreur relative entre (S_H, I_H) et (S_H^{meas}, I_H^{meas}) , tandis que re est l'erreur relative entre (d_1, d_2) et (d_1^a, d_2^a) , la solution de (2.83).

Choix des paramètres pour les simulations : Les paramètres utilisés pour les simulations sont données dans le tableau 1 de [146] (également dans [147]) et sont rappelés dans le tableau 2.2. Le domaine considéré est $\Omega := (0, 1)^2$ et le temps final $T = 20$. Nous faisons également l'hypothèse que la population susceptible diffuse plus vite que la population infectée dans le domaine en prenant $d_1 = 0.1$ et $d_2 = 0.01$.

Au temps initial, les variables ζ_i sont constantes. La population infectée est supposée concentrée au centre du domaine, ce qui pourrait modéliser un hôpital par exemple et la population susceptible est localisée aux extrémités du domaine. Les conditions initiales sont alors :

$$\begin{cases} \zeta_1(t=0, x, y) = 0.1, \zeta_2(t=0, x, y) = 0.04, \zeta_3(t=0, x, y) = 0.01, \\ I_m(t=0, x, y) = 0.2, \\ S_H(t=0, x, y) = 1 - z(x, y), \\ I_H(t=0, x, y) = z(x, y), \end{cases}$$

où

$$z(x, y) := \begin{cases} e^{-\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2 - (y - \frac{1}{2})^2}}, & \text{if } (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 < \frac{1}{4} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les simulations de S_H et I_H sont obtenues en résolvant le système (2.78) par la méthode des différences finies explicites.

Les états mesurés S_H^{meas} et I_H^{meas} sont construits en utilisant la fonction *randn* de Matlab dont le coefficient σ est choisi pour avoir une valeur maximale de l'erreur relative entre S_H et S_H^{meas} (et entre I_H et I_H^{meas}) égale à 1%, 5%, 10% et 20%.

Résultats numériques :

| λ | 1% | 5% | 10% | 20% |
|-----------|--------|--------|--------|--------|
| d_1^a | 0.1019 | 0.1011 | 0.0836 | 0.1153 |
| d_2^a | 0.0186 | 0.0159 | 0.0102 | 0.0191 |
| re | 0.0880 | 0.0595 | 0.1636 | 0.1773 |

TABLE 2.5 – Résultats de la résolution du système (2.83) par la méthode des moindres-carrés.

Cette méthode donne de bonnes approximations de d_1 et d_2 et montre une stabilité à un bruit fort.

2.7 Conclusion

Une partie du travail qui a suivi ma thèse a consisté à élargir la notion d'identifiabilité à d'autres cadres mathématiques. Dans le même temps, il m'a paru important de concevoir et de développer des méthodes pour démontrer cette propriété.

Tout d'abord, la notion d'identifiabilité a été généralisée à l'identifiabilité relative qui étudie l'identifiabilité de certains paramètres par rapport à d'autres. Cette propriété permet de connaître les paramètres clés à déterminer pour obtenir l'identifiabilité de paramètres plus difficiles à estimer voir l'identifiabilité du système complet, le résultat étant certifié grâce aux outils semi-algébriques. Puis, ce concept a été généralisé aux systèmes dans le cadre d'erreurs bornées. Un algorithme a été développé pour partitionner le domaine des paramètres en parties présentant des propriétés différentes d'identifiabilité dues au contexte ensembliste. Enfin, l'identifiabilité ainsi que la méthode basée sur la théorie de l'élimination ont été généralisées au cadre EDP montrant l'intérêt qu'elles peuvent présenter pour certains types de modèle. Ce travail a été complété par l'étude et le développement de méthodes numériques pour estimer les paramètres dans chacun de ces trois cadres.

Dans le chapitre suivant, je présente une application de cette propriété à un autre domaine, celui du diagnostic et le lien existant entre ces deux notions. Une des conséquences est le développement de méthodes en diagnostic dans le cas simple et multi-fautes. L'identifiabilité sera vue également au chapitre 5 dans un cas pratique, celui de la modélisation des comportements en situation de catastrophe.

Chapitre 3

Diagnosticabilité fonctionnelle et algébrique

Depuis 2012, je m'intéresse aux problèmes de diagnostic suite au projet ANR MAGIC-SPS [102, 198, 202]. Le *diagnostic*, terme souvent entendu dans le milieu médical, consiste à identifier la cause (l'origine) d'une défaillance, d'un problème, à partir de symptômes¹ relevés par des observations ou des tests du système physique. Sur la plupart des systèmes physiques, le diagnostic peut se faire à partir d'un modèle mathématique. Pour cela, nous faisons les hypothèses suivantes :

- le comportement (ou une partie) du système physique peut être modélisé par un modèle mathématique,
- les mesures des capteurs correspondent à des sorties du modèle,
- les fautes du système physique peuvent être représentées par des variables dans le modèle mathématique.

Nous entendons par (multi) fautes un changement d'une (ou de plusieurs valeurs de) paramètres impliquant des dysfonctionnements du système. Nous supposons également qu'il n'y a pas de restriction sur le type de faute. Elles peuvent agir multiplicativement ou additivement sur les paramètres.

Le diagnostic d'un système est défini comme la détection et l'isolation des fautes (ou la localisation et l'identification). Étant donné le système et le modèle mathématique associé [84], la *détection de fautes* consiste à détecter un mauvais fonctionnement du système et l'*isolation de fautes* à isoler la faute responsable du dysfonctionnement.

Diverses méthodes peuvent être trouvées dans la littérature pour faire du diagnostic. Elles dépendent essentiellement du type de modèle choisi. Dans le cas de modèles non linéaires, les méthodes classiques pour faire le diagnostic sont basées sur les observateurs non linéaires ([180] par exemple) et/ou sur les relations analytiques redondantes (en anglais Analytical Redundancy Relations, ARR) ([183, 187]). Ces dernières sont des relations liant les entrées, les sorties, leurs dérivées, les paramètres et les fautes du modèle (voir [53, 54, 183, 198, 225] pour les simples fautes et [46, 58, 113] pour des fautes multiples). Ainsi, l'étude du diagnostic se fait à partir de signatures de fautes qui, classiquement, sont des fonctions qui à un ensemble de fautes associe un ensemble d'indicateurs ou de relations appelés *résidus*.

Dans notre travail, nous avons supposé que la représentation mathématique du système physique se faisait par un modèle paramétrique non linéaire et que l'on disposait de signaux d'entrée et de sortie. Le choix du modèle amène naturellement à se poser la question :

est-ce que le modèle mathématique que nous avons choisi peut discriminer d'éventuelles fautes à partir des données collectées sur le système physique ?

Cette étude a priori du modèle consiste en une étude de *diagnosticabilité*. En analysant la diagnosticabilité, il est possible d'anticiper le pouvoir discriminant d'un appareil de diagnostic au moment de sa mise en marche et de proposer des solutions à d'autres problèmes importants comme celui du nombre minimal de capteurs et de leur place pour garantir la discriminabilité d'un ensemble anticipé de défauts.

Au cours de ce travail de recherche, nous avons abordé ces études de diagnosticabilité et de diagnostic en exploitant de nouvelles ARR obtenues à partir de l'algèbre différentielle. L'originalité a été la façon d'exploiter ces relations ce qui nous a permis de développer de nouveaux algorithmes certifiés.

1. Les symptômes peuvent être définis comme les écarts constatés entre des valeurs mesurées ou estimées à partir d'un processus et des valeurs présupposées.

3.1 Le modèle

Le modèle considéré dans ce chapitre est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t, p, f) = g(x(t, p), u(t), f, p), \\ y(t, p, f) = h(x(t, p), u(t), f, \varepsilon(t), p), \\ x(t_0, p, f) = x_0, \\ t_0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (3.1)$$

où

- $x(t, p, f) \in \mathbb{R}^n$ et $y(t, p, f) \in \mathbb{R}^m$ représentent les variables d'état et les sorties respectivement,
- les fonctions g et h sont réelles et analytiques sur M , M étant un ensemble ouvert de \mathbb{R}^n tel que $x(t, p, f) \in M$ pour chaque $t \in [t_0, T]$,
- $u(t) \in \mathbb{R}^r$ est le vecteur de contrôle,
- $f \in \mathbb{R}^e$ est le vecteur de fautes,
- le vecteur de paramètres p appartient à \mathcal{U}_p , où $\mathcal{U}_p \subseteq \mathbb{R}^q$ est l'ensemble des paramètres admissibles a priori connu,
- les conditions initiale x_0 sont supposées appartenir à un ensemble borné X_0 , et être différents d'un point d'équilibre du système.

$f = 0$ signifie qu'il n'y a pas de faute. Dans le cas d'un modèle non contrôlé, $u = 0$.

Les auteurs de [53] considèrent qu'un système est diagnosticable si f est algébriquement observable en u et y . Si f_i est la i ème composante du vecteur de faute f , cela signifie que chaque composante f_i peut s'écrire comme la solution d'une équation polynomiale en f_i et des entrées u , des sorties y et de leurs dérivées. Cette définition est équivalente à la définition d'identifiabilité proposée par [125]. Rappelons que dans [125], les polynômes sont obtenus à partir de l'algorithme de Ritt qui cherche à exprimer chaque paramètre/faute en fonction des entrées, sorties et de leurs dérivées. Dans [225], les auteurs ont proposé une méthode de détection et d'isolation de faute pour des systèmes non linéaires. Ils ont basé leur travail de diagnostic sur les relations obtenues par [125] conscients de la difficulté de les obtenir. Ces relations sont utilisées pour construire des résidus évalués grâce à une méthode de détection de changements statistiques. Toutefois, ils ne considèrent pas l'analyse de diagnosticabilité ni les conditions pour que les fautes soient discriminables.

Dans ce travail, nous sommes partis des relations entrées-sorties et les avons exploitées pour proposer une étude de diagnosticabilité, de détection et d'isolation de fautes. Elles ont été exploitées de deux façons différentes : i) en les considérant comme relations fonctionnelles ; ii) en utilisant leurs coefficients en tant que relations algébriques.

Dans un premier temps, les relations polynomiales ES sont ré-écrites en reprenant le polynôme (2.4). Cette ré-écriture a permis dans un second temps de définir des signatures qui ont servi aux études de diagnosticabilité et de détectabilité.

Si on note θ le vecteur $(f, p)^T$, en reprenant (2.4), on obtient le polynôme :

$$P_i(y, u, f, p) = m_{0,i}(y, u, p) - \sum_{k=1}^{s_i} \gamma_k^i(f, p) m_{k,i}(y, u) = 0. \quad (3.2)$$

La première partie du polynôme $\rho_i = m_{0,i}(y, u, p)$ est appelée *résidu*. Celle-ci ne contient pas de composantes de f . Sans faute ($f = 0$), cette relation qui est calculable en les points de mesure est nulle. La seconde partie du polynôme (3.2), $w_{1,i}(y, u, f, p) := \sum_{k=1}^{s_i} \gamma_k^i(f, p) m_{k,i}(y, u)$, est appelée la *forme résiduelle interne*.

Exemple 3.1.1. *Considérons une masse $m = 1$ attachée à un ressort de force k . Notons u une force extérieure au système non identiquement nulle et $d \geq 1$ une constante. Le mouvement de la masse est décrit par l'équation suivante*

$$\ddot{x} + kx - du = 0. \quad (3.3)$$

Supposons que deux fautes $f_1 \in [0, 2)$ et $f_2 \in [0, 2)$ impactent respectivement le ressort k et le paramètre d et que le modèle (3.3) prenne la forme :

$$\ddot{x} + k(f_1 - 1)^2 x - (d + f_2)u = 0. \quad (3.4)$$

Supposons que $y := x$ est une sortie mesurée du système. L'équation (3.4) représente par définition une ARR du modèle (3.3). On peut la ré-écrire :

$$P(y, u, f, p) = \ddot{y} + k(f_1 - 1)^2 y - (d + f_2)u = 0. \quad (3.5)$$

Remarquons que l'équation (3.4) peut se mettre sous la forme du modèle (3.1), ce qui donne :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -k(f_1 - 1)^2 x_1 + (d + f_2)u \end{cases} \quad (3.6)$$

et qu'on peut retrouver (3.5) en utilisant l'algorithme de Rosenfeld-Groebner.

Ainsi, l'ARR (3.5) peut se ré-écrire

$$P(y, u, f, p) = m_0(y, u, p) - w_1(y, u, f, p) = 0 \quad (3.7)$$

avec $m_0(y, u, p) = \ddot{y} + ky - du$ et $w_1(y, u, p) = -k(f_1^2 - 2f_1)y + f_2u$.

La première définition de signature qui est apparue est le vecteur de booléen associant la valeur 1 si la faute apparaît dans l'ARR et 0 sinon. Dans cet exemple, cette signature est définie par $Sig(f_1) = Sig(f_2) = 1$ car les 2 fautes apparaissent dans la même ARR. Cette signature ne permet donc pas de discriminer quelle faute agit sur le système. Nous avons eu l'idée de définir d'autres signatures à partir de cette ARR en exploitant ses propriétés.

À partir de la forme interne du résidu w_1 , nous avons proposé les deux définitions suivantes. La première est une signature fonctionnelle définie dans cet exemple par $FSig(f) = (-k(f_1^2 - 2f_1)y, f_2u)$. La première composante, obtenue en annulant f_2 , caractérise la faute f_1 et la deuxième composante la faute f_2 . Si les deux composantes sont distinctes alors il est possible de discriminer les deux fautes. La seconde signature est une signature algébrique définie à partir des coefficients de w_1 . La signature algébrique prend la forme $ASig(f) = (k(f_1 - 1)^2, -d - f_2)$.

Nous allons voir dans la suite comment nous avons défini des critères pour discriminer les fautes à partir des signatures.

3.2 Diagnosticabilité fonctionnelle

3.2.1 Définition de diagnosticabilité basée sur la signature fonctionnelle

Soit f_j la j ème composante du vecteur de faute f . Notons $f_{[j]}$ le vecteur de faute dont toutes les composantes sont nulles sauf la j ème égale à f_j . f_j comme $f_{[j]}$ fait référence à la *simple faute*.

Supposons que m résidus peuvent être obtenus. La définition classique de la signature de la faute f_j est la suivante [187] :

Définition 16. La signature de f_j est le vecteur $Sig(f_j)$ de dimension m dont la i ème composante est égale à 1 si le i ème résidu $w_{1,i}(y, u, f, p)$ contient la faute f_j et est égale à 0 sinon.

À partir de cette définition, les auteurs de l'article [187] ont proposé les définitions de discriminabilité et de diagnosticabilité suivantes.

Définition 17. Deux fautes f_i et f_j sont discriminables si leurs signatures sont différentes. Quand toutes les fautes sont discriminables, le modèle est dit diagnosticable.

D'après cette définition, si deux fautes ont les mêmes résidus, le modèle n'est pas diagnosticable comme dans l'exemple 3.1.1.

Cette définition est loin d'exploiter les propriétés des résidus. Aussi, nous avons introduit la notion de signature fonctionnelle.

La signature fonctionnelle de la faute f_j est donnée par la forme interne des m résidus en considérant que seule la faute f_j agit sur le système. En d'autres termes, la signature fonctionnelle est définie par le vecteur dont la i ème composante est $w_{1,i}(\bar{y}, u, f_{[j]}, p)$, c'est à dire le polynôme obtenu à partir de $w_{1,i}(y, u, f, p)$ en considérant que toutes les composantes de f sont nulles sauf la j ème égale à f_j . Formellement, la définition est la suivante :

Définition 18. La signature fonctionnelle est la fonction $FSig$ qui, à la faute f_j associe le vecteur $(w_{1,i}(\bar{y}, \bar{u}, f_{[j]}, p))_{i=1, \dots, m}$.

L'avantage de cette définition est qu'elle prend en compte explicitement l'effet de l'amplitude du défaut et de la valeur de l'entrée. Elle est donc plus informative que la définition classique.

Soit $FSig^{(i)}(f_j) = w_{1,i}(y, u, f_{[j]}, p)$ la i ème composante de $FSig(f_j)$. La question qui se pose est maintenant de définir la notion de discriminabilité par rapport à cette définition fonctionnelle.

Exemple 3.2.1. *Considérons l'équation de Bernoulli :*

$$\dot{y}(t) = \beta_1 y(t) + \beta_2 y(t)^2, \text{ for } t \in [0, 5], y(0) = -1. \quad (3.8)$$

Sa solution est $y(t) = \frac{\beta_1 e^{\beta_1 t}}{\beta_2 - \beta_1 - \beta_2 e^{\beta_1 t}}$.

Nous obtenons directement $w_{0,1}(y, p) = \dot{y}(t) - \beta_1 y(t) - \beta_2 y(t)^2$.

Supposons que deux simples fautes positives f_1 et f_2 impactent additivement les deux paramètres β_1 et β_2 respectivement. Alors $w_{1,1}(y, f, p) = f_1 y(t, p, f) + f_2 y(t, p, f)^2$ où $p = (\beta_1, \beta_2)^T$, $f = (f_1, f_2)^T$, et T représente la transposée du vecteur considéré. On en déduit que $Sig(f_1) = Sig(f_2) = 1$ et $FSig(f_1) = f_1 y(\cdot, p, f_{[1]})$, $FSig(f_2) = f_2 y(\cdot, p, f_{[2]})^2$ où $y(\cdot, p, f_{[i]})$ représente la sortie impactée par la faute f_i seulement. Là encore, les deux fautes ne sont pas discriminables au sens classique car leurs signatures sont égales quelque soit les valeurs de β_1 et β_2 . Cependant, elles peuvent être discriminables au sens de la définition de la signature fonctionnelle pour $t \in [0, 5]$. Par exemple, avec les valeurs de paramètres $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 2$, on peut montrer que $y(t, p, f_{[1]})$ est négatif sur $[0, 5]$ donc $FSig(f_1)$ également alors que $FSig(f_2)$ est positif.

Suite à cet exemple, nous avons proposé les définitions suivantes pour lier les notions de discriminabilité et de diagnosticabilité fonctionnelle. La première est vraie pour toute entrée, la seconde est vérifiée seulement pour une seule entrée.

Définition 19. *Deux fautes f_j et f_l sont fortement fonctionnellement discriminables si pour toute entrée u , il existe au moins un indice i^* et un temps fini $t_1 \in]t_0, T]$ tel que pour tout $t \in [t_0, t_1]$, $FSig^{(i^*)}(f_j)(t) \neq FSig^{(i^*)}(f_l)(t)$. Quand toutes les fautes sont fortement fonctionnellement discriminables, le modèle est dit fortement diagnosticable.*

Définition 20. *Deux fautes f_j et f_l sont faiblement fonctionnellement discriminables si il existe une entrée u , il existe au moins un indice i^* et un temps fini $t_1 \in]t_0, T]$ tel que pour tout $t \in [t_0, t_1]$, $FSig^{(i^*)}(f_j)(t) \neq FSig^{(i^*)}(f_l)(t)$. Quand toutes les fautes sont faiblement fonctionnellement discriminables, le modèle est dit faiblement diagnosticable.*

La définition peut-être étendue à des modèles non contrôlés.

La détectabilité est un cas particulier de discriminabilité qui nécessite que la situation sans défaut soit discriminable quelque soit la faute. La détectabilité fonctionnelle peut donc être définie sur la base des signatures fonctionnelles comme suit.

Définition 21. *La faute f_i est fonctionnellement détectable si la signature fonctionnelle $FSig(f_i)$ n'est pas égale au vecteur nul.*

Remarque 21. *Comme nous le verrons dans l'exemple 3.2.3, contrairement à la signature classique, la signature fonctionnelle apporte des informations sur la sensibilité des résidus.*

Les signatures fonctionnelles de fautes peuvent être regroupées dans une matrice dont la composante (i, j) contient le i ème résidu en la faute f_j , c'est à dire $w_{1,i}(\bar{y}, \bar{u}, f_{[j]}, p)$.

Exemple 3.2.2. *Considérons l'exemple suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (p_1 + f_1)(p_2 + f_2)x_1^2 + x_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = (p_2 + f_2)(p_3 + f_3)x_2^2 + x_2 x_3, \\ \dot{x}_3 = (p_1 + f_1)(p_3 + f_3)x_3^2 + x_1 x_3, \\ y_1 = x_1, y_2 = x_2, y_3 = x_3. \end{cases} \quad (3.9)$$

Il est facile de vérifier que :

$$\begin{aligned} w_{0,1}(\bar{y}, \bar{u}, p) &= \dot{y}_1 - y_1 y_2 - p_1 p_2 y_1^2, \\ w_{0,2}(\bar{y}, \bar{u}, p) &= \dot{y}_2 - y_2 y_3 - p_2 p_3 y_2^2, \\ w_{0,3}(\bar{y}, \bar{u}, p) &= \dot{y}_3 - y_1 y_3 - p_1 p_3 y_2^2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

et :

$$\begin{aligned} w_{1,1}(\bar{y}, \bar{u}, f, p) &= (p_1 f_2 + p_2 f_1 + f_1 f_2) y_1^2, \\ w_{1,2}(\bar{y}, \bar{u}, f, p) &= (p_2 f_3 + p_3 f_2 + f_2 f_3) y_2^2, \\ w_{1,3}(\bar{y}, \bar{u}, f, p) &= (p_1 f_3 + p_3 f_1 + f_1 f_3) y_3^2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Les signatures fonctionnelles sont :

$$\begin{aligned}FSig(f_1) &= (p_2 f_1 y_1^2, 0, p_3 f_1 y_3^2)^T, \\FSig(f_2) &= (p_1 f_2 y_1^2, p_3 f_2 y_2^2, 0)^T, \\FSig(f_3) &= (0, p_2 f_3 y_2^2, p_1 f_3 y_3^2)^T.\end{aligned}$$

La diagnosticabilité peut alors être analysée grâce à la table suivante :

| f | f_1 | f_2 | f_3 |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $FSig^{(1)}(f)$ | $p_2 f_1 y_1^2$ | $p_1 f_2 y_1^2$ | 0 |
| $FSig^{(2)}(f)$ | 0 | $p_3 f_2 y_2^2$ | $p_2 f_3 y_2^2$ |
| $FSig^{(3)}(f)$ | $p_3 f_1 y_3^2$ | 0 | $p_1 f_3 y_3^2$ |

Clairement, pour $(j, l) \in \{1, 2, 3\}^2$, $j \neq l$, $FSig(f_j) \neq FSig(f_l)$ et le modèle est fonctionnellement diagnosticable. Le système (3.9) est également diagnosticable au sens classique.

3.2.2 Lien entre identifiabilité et diagnosticabilité fonctionnelle

Rappelons que

$$FSig(f_j) = \left(\sum_{k=1}^{s_i} \gamma_k^i(f_j, p) m_{k,i}(y, u) \right)_{i=1, \dots, m}.$$

Proposition 20. *Supposons qu'il existe un ensemble d'indices $I_0 \subseteq \{1, \dots, m\}$ tel que pour tout $i \in I_0$, les déterminants fonctionnels $\Delta w_{1,i}(y, u) = \det(m_{k,i}(y, u), k = 1, \dots, s_i)$ sont non identiquement nulles. Si, avec les polynômes $w_i(y, u, f, p)$, $i \in I_0$, le modèle est identifiable en les fautes alors le modèle est faiblement fonctionnellement diagnosticable. La réciproque n'est pas vraie.*

De la proposition 1, on en déduit que l'injectivité de la fonction $\phi(\cdot)$ est une condition suffisante pour que le modèle soit diagnosticable mais elle n'est pas nécessaire. En effet, considérons la simple équation différentielle $\dot{y}(t, p) = (p_1 - p_2)y(t)$, $y(0) = 1$, $p = (p_1, p_2)^T$, dont la solution est $y(t, p) = e^{(p_1 - p_2)t}$, $t \in \mathbb{R}$. Supposons que deux simples fautes additives et strictement positives f_1 et f_2 agissent sur les deux paramètres p_1 et p_2 respectivement. On déduit directement de l'équation que $w_1(\bar{y}, f, p) = (f_1 - f_2)y(t, p, f)$. Ce modèle n'est pas identifiable en les fautes car la fonction $\phi : (f_1, f_2) \mapsto f_1 - f_2$ n'est pas injective. Cependant, la signature fonctionnelle $FSig(f_1) = f_1 y(t, p, f_{[1]}) = f_1 e^{(p_1 + f_1 - p_2)t}$ est strictement positive et la signature fonctionnelle $FSig(f_2) = -f_2 y(t, p, f_{[2]}) = -f_2 e^{(p_1 - p_2 - f_2)t}$ est strictement négative. Les deux signatures sont donc distinctes sur \mathbb{R} et le modèle est fonctionnellement diagnosticable.

Les signatures fonctionnelles dépendent directement des fautes a priori inconnues. Toutefois, il est possible de ré-écrire ces expressions en fonction du résidu. En dehors de toute faute, le polynôme P (voir (3.2) dans le cas où on a un seul polynôme car alors l'indice i est omis) est égal au résidu $\rho = m_0(y, u, p)$. Lorsqu'une faute agit sur le système, ce polynôme n'est plus nul et est égal à la signature fonctionnelle définie par la faute. Ainsi, selon la valeur du résidu et des sorties mesurées, il est possible de détecter et d'isoler la faute.

Reprenons l'exemple 3.2.1 sur l'équation de Bernoulli.

Exemple 3.2.3. *Pour l'exemple 3.2.1, le résidu vaut $\rho = w_{0,1}(\bar{y}, p) = \dot{y}(t) - \beta_1 y(t) - \beta_2 y(t)^2$. Comme précédemment, nous supposons que deux simples fautes dans $[0, 1]$ agissent additivement sur les deux paramètres β_1 et β_2 respectivement. Rappelons que $w_{1,1}(\bar{y}, f, p) = f_1 y(t, p, f) + f_2 y(t, p, f)^2$ et $FSig(f_1) = f_1 y(\cdot, p, f_{[1]})$, $FSig(f_2) = f_2 y(\cdot, p, f_{[2]})^2$. Le déterminant fonctionnel est égal à $\Delta w_{1,1}(\bar{y}) = \dot{y} y^2 \neq 0$ et la fonction $\phi : (f_1, f_2) \mapsto (f_1, f_2)$ est injective. D'après les propositions 1 et 20, le modèle est globalement identifiable en les fautes et donc fonctionnellement identifiable sur $[0, 5]$. Ainsi, les signatures fonctionnelles sont distinctes lorsqu'une des fautes agit. Numériquement, supposons que $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 2$, et qu'une des deux fautes agit de façon permanente à partir de $t = 0.5s$. Supposons que la sortie soit perturbée par un bruit gaussien telle que l'erreur relative a une valeur maximale de 0.1. Les figures 3.12 et 3.13 représentent les résidus pour différents scénarios consistant à faire varier la valeur des fautes entre 0.1 et 1. On peut remarquer que l'évaluation des signatures à travers les résidus permet de détecter les fautes agissant sur le système car leurs comportements sont différents.*

Remarque 22. *Remarquons que la signature fonctionnelle donne un moyen de détecter une faute et de l'isoler. Lorsqu'il n'y a pas de fautes agissant sur le système, la signature fonctionnelle est nulle. Cependant, la présence de bruit de mesures corrompt le signal mesuré conduisant à une signature fonctionnelle non nulle. Nous avons donc introduit la notion de ε -fonctionnellement détectable. La faute est dite ε -fonctionnellement détectable s'il*

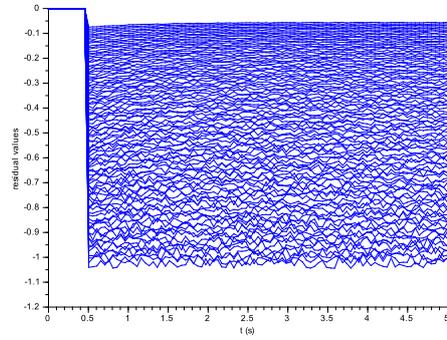


FIGURE 3.1 – Valeur des signatures obtenues à partir de l'équation de Bernoulli quand une faute de magnitude comprise entre 0.1 et 1 agit sur β_1 à partir de $t=0,5s$.

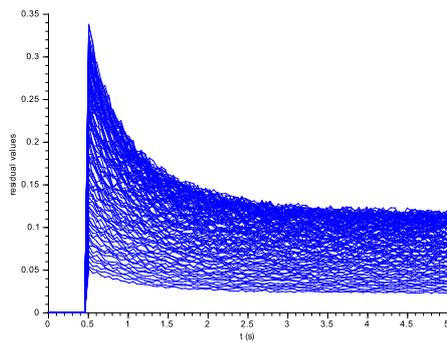


FIGURE 3.2 – Valeur des signatures obtenues à partir de l'équation de Bernoulli quand une faute de magnitude comprise entre 0.1 et 1 agit sur β_2 à partir de $t=0,5s$.

existe un intervalle de temps $[t_1, t_2] \subseteq [t_0, T]$ tel que pour tout $t \in [t_1, t_2]$, $d(FSig^{(j)}(f_i), 0) > \varepsilon$, avec d une distance sur \mathbb{R} . Cette condition assure qu'au moins un des résidus est au dessus du seuil ε . Pour l'exemple de Bernoulli ci-dessus, on constate sur la figure 3.13 que les fautes sont 0.02-fonctionnellement détectables.

3.2.3 Un exemple complet : celui du réservoir

Considérons l'exemple de deux réservoirs couplés

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t, p) = a_1 u(t) - a_2 \sqrt{x_1(t, p)}, x_1(0) = 1, \\ \dot{x}_2(t, p) = a_3 \sqrt{x_1(t, p)} - a_4 \sqrt{x_2(t, p)}, x_2(0) = 0.6, \\ y_1(t, p) = a_5 \sqrt{x_1(t, p)}, \\ y_2(t, p) = a_6 \sqrt{x_2(t, p)}, \end{cases} \quad (3.12)$$

où $p = (a_i)_{i=1, \dots, 6}, a_i \neq 0$, est le vecteur de paramètres du modèle, $x = (x_1, x_2)^T$ représente le vecteur d'état et correspond au niveau de l'eau dans chacun des réservoirs, $u \neq 0$ est l'entrée. Supposons que le niveau d'eau dans les réservoirs peut varier entre 0 et 10.

Soient f_1 une faute inconnue agissant additivement sur le signal d'entrée, f_2 et f_3 des fautes additives agissant sur les deux capteurs en sortie de chacun des réservoirs d'eau, et f_4 un défaut de colmatage. $f_4 = 1$ représente un tuyau complètement bouché et $0 < f_4 < 1$ un tuyau bouché partiellement. Pour le scénario avec faute, nous supposons qu'elles sont introduites au temps $t = 20s$.

Pour utiliser l'algorithme de Rosenfeld-Groebner implémenté dans Maple 16, les variables auxiliaires $z_1(t, p) = \sqrt{x_1(t, p)}$ et $z_2(t, p) = \sqrt{x_2(t, p)}$ sont introduites dans le modèle ainsi que les 4 fautes. Le modèle se réécrit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t, p) = a_1 (u(t) + f_1) - a_2 (1 - f_4) z_1(t, p), \\ \dot{x}_2(t, p) = a_3 (1 - f_4) z_1(t, p) - a_4 z_2(t, p), \\ z_1(t, p)^2 = x_1(t, p), \\ z_2(t, p)^2 = x_2(t, p), \\ y_1(t, p) = a_5 (1 - f_4) z_1(t, p) + f_2, \\ y_2(t, p) = a_6 z_2(t, p) + f_3, \\ \dot{f}_i = 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

L'algorithme de Rosenfeld-Groebner fournit les deux ARRr :

$$\begin{aligned} w_1(y, u, f, p) &= w_{0,1}(y, u, p) - w_{1,1}(y, u, f, p) \\ w_2(y, u, f, p) &= w_{0,2}(y, u, p) - w_{1,2}(y, u, f, p) \end{aligned} \quad (3.14)$$

où

$$\begin{aligned} w_{0,1} &= -ua_1a_5^2 + (a_2a_5 + 2\dot{y}_1)y_1, \\ w_{1,1} &= 2\dot{y}_1f_2 - (f_4^2a_2a_5 - 2f_4a_2a_5)y_1 - (-f_4^2a_1a_5^2 + 2f_4a_1a_5^2)u \\ &\quad + f_4^2f_2a_2a_5 + f_4^2f_1a_1a_5^2 - 2f_4f_2a_2a_5 - 2f_4f_1a_1a_5^2 + f_2a_2a_5 + f_1a_1a_5^2, \\ w_{0,2} &= 2a_5\dot{y}_2y_2 - a_3a_6^2y_1 + a_4a_5a_6y_2, \\ w_{1,2} &= 2\dot{y}_2f_3a_5 + f_3a_4a_5a_6 - f_2a_3a_6^2. \end{aligned} \quad (3.15)$$

D'où,

$$\begin{aligned} FSig(f_1) &= (-f_1a_1a_5^2, 0)^T \\ FSig(f_2) &= (-2\dot{y}_1f_2 - f_2a_2a_5, f_2a_3a_6^2)^T \\ FSig(f_3) &= (0, -2\dot{y}_2f_3a_5 - f_3a_4a_5a_6)^T \\ FSig(f_4) &= (y_1f_4^2a_2a_5 - 2y_1f_4a_2a_5 - uf_4^2a_1a_5^2 + 2uf_4a_1a_5^2, 0)^T. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Les déterminants fonctionnelles $\Delta w_{1,1}(\bar{y}, \bar{u}) = \det(1, u, y_1, \dot{y}_1) = \dot{u}(\ddot{y}_1 y_1^{(4)} - y_1^{(3)2}) - \ddot{u}(\dot{y}_1 y_1^{(4)} - y_1^{(3)} \ddot{y}_1) + u^{(3)}(\dot{y}_1 y_1^{(3)} - \dot{y}_1^2)$ et $\Delta w_{1,2}(\bar{y}, \bar{u}) = \det(\dot{y}_2, 1) = -\dot{y}_2$ ne sont pas identiquement nuls tant que u n'est pas constant. La fonction

$$\begin{aligned} \phi(f) = & (-2f_2, f_4^2 a_2 a_5 - 2f_4 a_2 a_5, -f_4^2 a_1 a_5^2 + 2f_4 a_1 a_5^2, -f_4^2 f_2 a_2 a_5 - f_4^2 f_1 a_1 a_5^2 + 2f_4 f_2 a_2 a_5 \\ & + 2f_4 f_1 a_1 a_5^2 - f_2 a_2 a_5 - f_1 a_1 a_5^2, -2f_3 a_5, -f_3 a_4 a_5 a_6 + f_2 a_3 a_6^2) \end{aligned} \quad (3.17)$$

est clairement injective pour $f_4 \in]0, 1[$. On en déduit que le modèle est globalement identifiable en f lorsque $f \in]0, 1[$. D'après la proposition 20, le modèle est faiblement fonctionnellement diagnosticable.

Dans les simulations, un simple contrôleur est utilisé pour contrôler le niveau de l'eau dans le réservoir supérieur. Il suit un signal carré de référence. Les deux capteurs sont supposés être perturbés par un bruit Gaussien de telle sorte que l'erreur relative a une valeur maximale de 0.1. Les paramètres du modèle sont égaux à $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0.3$, $a_5 = a_6 = 1$. La figure 3.3 montre les niveaux d'eau dans les deux réservoirs dans le cas sans faute mais avec les données bruitées. Les résidus déduits de (3.14) sont $\rho_1 = -u a_1 a_5^2 + (a_1 a_5 + 2\dot{y}_1) y_1$

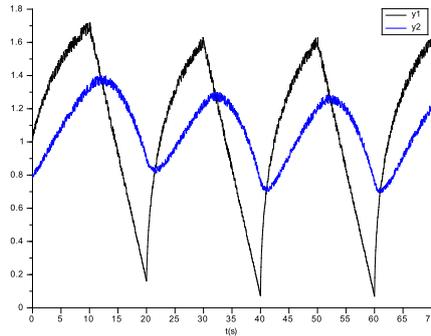


FIGURE 3.3 – Niveau d'eau dans le réservoir supérieur, y_1 , et inférieur y_2 lors des simulations sans faute.

et $\rho_2 = 2a_5 \dot{y}_2 y_2 - a_3 a_6^2 y_1 + a_4 a_5 a_6 y_2$. Ils sont utilisés pour détecter et discriminer les fautes, celles-ci étant introduites à $t = 20s$. Les dérivées sont estimées en utilisant les différenciateurs HOSM ([123], [124]). Les figures 3.4-3.11 représentent les résidus ρ_1 et ρ_2 quand les différentes fautes agissent sur le système.

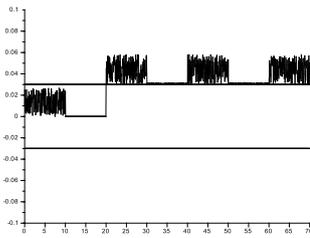


FIGURE 3.4 – Résidu ρ_1 quand la faute f_1 est introduite au temps $t = 20s$.

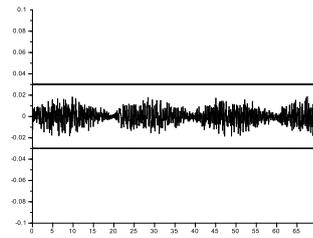


FIGURE 3.5 – Résidu ρ_2 quand la faute f_1 est introduite au temps $t = 20s$.

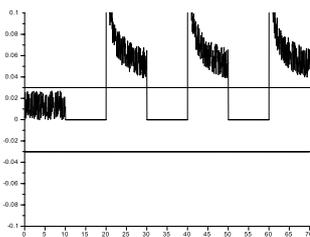


FIGURE 3.6 – Résidu ρ_1 quand la faute f_2 est introduite au temps $t = 20s$.

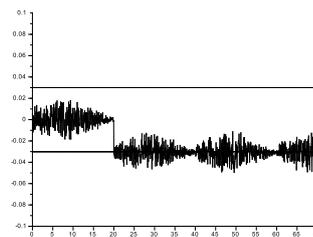


FIGURE 3.7 – Résidu ρ_2 quand la faute f_2 est introduite au temps $t = 20s$.

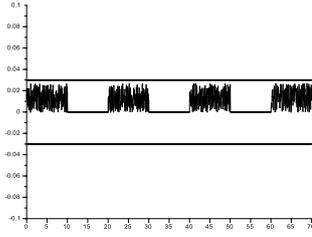


FIGURE 3.8 – Résidu ρ_1 quand la faute f_3 est introduite au temps $t = 20s$.

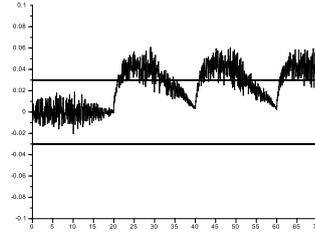


FIGURE 3.9 – Résidu ρ_2 quand la faute f_3 est introduite au temps $t = 20s$.

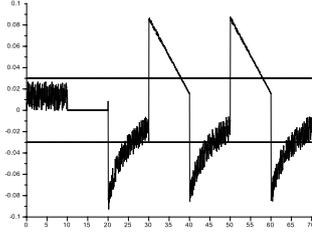


FIGURE 3.10 – Résidu ρ_1 quand la faute f_4 est introduite au temps $t = 20s$.

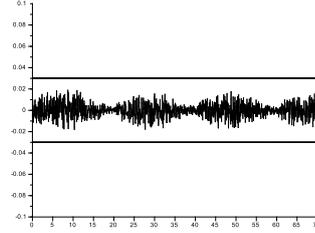


FIGURE 3.11 – Résidu ρ_2 quand la faute f_4 est introduite au temps $t = 20s$.

D'après les graphes des résidus, chaque faute est 0.03-déTECTABLE et il est possible de déduire la faute qui agit.

Remarquons que le résidu de la faute f_1 est positif contrairement à la faute f_2 qui est négatif et que le cas a priori ambigu est celui des fautes f_1 et f_4 car elles ont la même signature classique : la première composante est non nulle alors que la deuxième est nulle. Toutefois, le comportement des graphes est complètement différent. Par exemple, sur l'intervalle de temps $[21, 29]$, elles sont 0.04-fonctionnellement discriminable, ce qui assure une certaine sécurité sur le résultat quant au bruit.

Cet exemple montre une certaine robustesse des résultats. Toutefois, ces résultats sont dépendants de l'identifiabilité des fautes et le cas multi-fautes lorsqu'il n'y a pas d'identifiabilité n'a pu être résolu pour le moment avec les signatures fonctionnelles. L'approche algébrique présentée à la section suivante nous a permis d'apporter une solution.

3.3 Diagnosticabilité algébrique

Dans [202], nous avons proposé une nouvelle approche pour étudier la diagnosticabilité et faire du diagnostic. Celle-ci consiste à exploiter les coefficients des ARR qui sont vus comme des relations algébriques. Ce changement de point de vue et l'utilisation des outils semi-algébriques a permis tout d'abord d'intégrer des contraintes sur les paramètres et les fautes, comme les inégalités satisfaites par les paramètres et les contraintes déduites des conditions initiales. Comme nous le verrons par la suite, ces contraintes peuvent jouer un rôle fondamental dans l'analyse de la diagnosticabilité et le diagnostic. Ensuite, cette approche ne nécessite pas d'hypothèse forte sur le modèle comme i) son identifiabilité ii) la valeur de certains paramètres dans des cas particuliers iii) l'action additive des (multi)-fautes.

Cette méthode se résume ainsi :

1. calculer les ARR en utilisant l'algorithme de Rosenfeld-Groebner sur le modèle ;
2. utiliser les bases de Groebner pour obtenir une application algébrique que nous appellerons *signature algébrique*. Chacune de ses composantes dépend seulement des paramètres et des coefficients des ARR. Elle peut être estimée numériquement à partir des entrées et des sorties du système. Par construction, chaque composante de la signature algébrique s'annule quand au moins une des (multi)-faute agit sur le système ;
3. utiliser pour chaque (multi)-faute possible des outils semi-algébriques pour vérifier que des composantes de la signature s'annulent ou pas. Cette étape permet de certifier le résultat. Les résultats peuvent être résumés dans un tableau pré-calculé ;

4. utiliser le tableau comme entrée d'un traitement numérique : à partir des mesures du système, il retourne les estimations des signatures algébriques. Leur comparaison avec les valeurs nominales permet de détecter et d'isoler les (multi-)faute(s).

Comme nous le verrons, nous avons automatisé toutes les étapes de cette procédure.

3.3.1 Préliminaires

Supposons que les fautes f_i appartiennent à des ensembles connexes de \mathbb{R} et notons \mathcal{F} le produit cartésien de ces ensembles.

On suppose par la suite que les contraintes sur $p \in \mathcal{P}$ et $f \in \mathcal{F}$ et éventuellement les contraintes liant les fautes et les paramètres peuvent être formulées à l'aide d'équations et/ou d'inégalités algébriques. Cette hypothèse permet de travailler avec des ensembles semi-algébriques pour lesquels des outils de calculs algébriques ont été développés (voir [26, 73, 218] par exemple).

Rappelons que $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels et tels que X_1, \dots, X_n sont les n indéterminées. De plus, un ensemble de solutions réelles d'un ensemble fini d'équations polynomiales à plusieurs variables (de la forme $P = 0$) et/ou d'inégalités polynomiales (de la forme $Q \neq 0$) de $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ est appelée ensemble semi-algébrique.

Soit $C_{p,f}$ l'ensemble de toutes les équations et inégalités vérifiées par les composantes des vecteurs de paramètres et de fautes du modèle et $\mathcal{C}_{p,f}$ l'ensemble semi-algébrique défini par $C_{p,f}$. Pour prendre en compte les conditions initiales, les relations algébriques induites par ces conditions peuvent être rajouter à l'ensemble $C_{p,f}$.

Exemple 3.3.1. Reprenons l'exemple de la masse (Exemple 3.6) :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -k(f_1 - 1)^2 x_1 + (d + f_2)u. \end{cases} \quad (3.18)$$

Supposons que les paramètres k , d et les fautes, f_1 et f_2 vérifient les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} 0 < k < 4 \\ 1 \leq d \\ 0 \leq f_1 < 2, \\ 0 \leq f_2 < 2. \end{cases} \quad (3.19)$$

Ces contraintes algébriques peuvent être vues comme un ensemble d'équations et d'inégalités polynomiales dont les indéterminées sont k , d , f_1 et f_2 . Ces inégalités algébriques définissent $C_{p,f}$ et $\mathcal{C}_{p,f}$ est l'ensemble des valeurs admissibles des paramètres et des fautes correspondant.

Pour définir le vecteur de multi-fautes, nous introduisons les notations suivantes. Soient \mathcal{N} un sous-ensemble de $\{1, \dots, e\}$ et $f_{\mathcal{N}}$ le vecteur de multi-fautes dont les composantes f_i sont non nulles si $i \in \mathcal{N}$ et égales à 0 autrement. Naturellement, $f_{\mathcal{N}}$ appartient à $\mathcal{F}_{\mathcal{N}} = \{f \in \mathcal{F} \mid f_i \neq 0 \text{ si } i \in \mathcal{N} \text{ et } f_i = 0 \text{ si } i \notin \mathcal{N}\}$ et $\mathcal{F}_{\mathcal{N}}$ est un ensemble semi-algébrique par construction. Quand seule une composante de f est non nulle, on retrouve le cas simple faute.

Comme la diagnosticabilité et la détectabilité du modèle (3.1) peut dépendre de $p = (p_1, \dots, p_m)$, nous considérons par la suite l'ensemble $R = \mathbb{R}[p_1, \dots, p_m]$ des polynômes en les indéterminées p_i à coefficients réels.

3.3.2 Construction de la signature algébrique à partir du résumé exhaustif

La définition suivante introduit la notion de signature algébrique et permet de caractériser les multi-fautes. Elle diffère de la définition de diagnosticabilité fonctionnelle car elle est composée d'expressions algébriques. Par la suite, nous l'avons définie à partir du résumé exhaustif, la suite formée par les coefficients des polynômes ES.

Définition 22. Soit $ASig = (ASig_1, \dots, ASig_l)$ un vecteur d'expressions algébriques admettant f_1, \dots, f_e comme indéterminées et à coefficients dans R . Une signature algébrique est une fonction $ASig$ définie par :

$$\begin{aligned} ASig: \mathcal{F} &\longrightarrow R^l \\ f &\mapsto (ASig_1(f), \dots, ASig_l(f)). \end{aligned}$$

Exemple 3.3.2. En reprenant l'exemple 3.3.1, la fonction ϕ définie par

$$\phi(f) = (k(f_1 - 1)^2, -d - f_2)$$

donne la signature algébrique $ASig(f) = (k(f_1 - 1)^2, -d - f_2)$.

La comparaison des images de $ASig$ pour deux multi-fautes différentes donnera un moyen de les discriminer.

Si le modèle est contrôlé, nous proposons deux définitions : la forte diagnosticabilité algébrique et la faible diagnosticabilité algébrique, la première étant vraie pour toute entrée, la seconde pour un entrée.

Définition 23. Soit \mathcal{N} et \mathcal{N}' deux sous-ensembles distincts de $\{1, \dots, e\}$. Les multi-fautes de $\mathcal{F}_{\mathcal{N}}$ et de $\mathcal{F}_{\mathcal{N}'}$ sont dites fortement algébriquement discriminables (resp. faiblement algébriquement discriminables) si il existe une signature algébrique telle que pour toute entrée u (resp. une entrée),

$$ASig(\mathcal{F}_{\mathcal{N}}) \cap ASig(\mathcal{F}_{\mathcal{N}'}) = \emptyset. \quad (3.20)$$

Cette égalité est satisfaite en particulier quand il existe un indice i tel que $ASig_i(\mathcal{F}_{\mathcal{N}}) \cap ASig_i(\mathcal{F}_{\mathcal{N}'}) = \emptyset$.

Si, pour deux sous ensembles distincts quelconques \mathcal{N} et \mathcal{N}' de $\{1, \dots, e\}$, les multi-fautes de $\mathcal{F}_{\mathcal{N}}$ et $\mathcal{F}_{\mathcal{N}'}$ sont fortement algébriquement discriminables (resp. faiblement algébriquement discriminables), le modèle est dit fortement algébriquement diagnosticable (resp. faiblement algébriquement diagnosticable).

Dans le cas de modèles non contrôlés, la définition consiste à omettre la notion d'entrée dans les définitions précédentes.

La notion de détectabilité de fautes consiste à détecter la présence de fautes ou multi-fautes agissant sur le système. Nous avons proposé la définition suivante dans le cas de la signature algébrique.

Définition 24. Un ensemble de vecteurs multi-fautes $\mathcal{F}_{\mathcal{N}}$ est algébriquement détectable si

$$ASig(\mathcal{F}_{\mathcal{N}}) \cap ASig(\mathcal{F}_{\emptyset}) = \emptyset,$$

$ASig(\mathcal{F}_{\emptyset})$ étant la signature algébrique évaluée lorsque aucune faute agit sur le système.

La détectabilité consiste donc à comparer les valeurs de la signature algébrique avec celle obtenue quand l'ensemble \mathcal{N} est vide, c'est à dire quand aucune faute agit sur le système.

Exemple 3.3.3. Reprenons l'exemple 3.1.1 (et 3.3.1). Les signatures possibles pour les multi-fautes sont $ASig(f_{\emptyset}) = (k, -d)$, $ASig(f_{\{1\}}) = (k(f_1 - 1)^2, -d)$, $ASig(f_{\{2\}}) = (k, -d - f_2)$ et $ASig(f_{\{1,2\}}) = (k(f_1 - 1)^2, -d - f_2)$. Les contraintes sur les paramètres et les fautes impliquent que les images des signatures algébriques ne s'intersectent pas. Par exemple, comme pour toute faute $f_2 \in (0, 2)$, $-d \neq -d - f_2$, on a $ASig(f_{\{1\}}) \cap ASig(f_{\{1,2\}}) = \emptyset$. Ainsi, les multi-fautes peuvent être discriminées et le modèle est algébriquement diagnosticable.

Dans cet exemple, la fonction ϕ n'est pas injective : les valeurs $1/2$ et $3/2$ de f_1 donneront la même valeur de $\phi(f)$. Rappelons que le modèle est identifiable si et seulement si ϕ est injective [62]. Donc l'identifiabilité des fautes implique la diagnosticabilité algébrique car les images par ϕ des fautes auront une valeur distincte. L'exemple du ressort montre que la diagnosticabilité algébrique n'implique pas l'identifiabilité. En effet, si ϕ n'est pas injective, la discrimination des multi-fautes est possible.

La définition de la signature algébrique à partir du résumé exhaustif nous a paru insuffisante dans le sens que deux fautes distinctes agissant sur les mêmes composantes ne peuvent être discriminées. De plus, elles ne sont pas exploitables numériquement car elles dépendent des fautes non connues a priori. Une approche naturelle consiste à obtenir une expression explicite des composantes des fautes en fonction des paramètres du modèle et des composantes ϕ_1, \dots, ϕ_N de $\phi(f)$. Cette approche revient à un problème d'inversion d'un système algébrique et n'aboutit pas en général. Nous avons donc développé une méthode pour obtenir des expressions algébriques ne dépendant pas des fautes et qui caractérisent leur présence. De telles expressions peuvent être calculées à l'aide d'une procédure automatique basée sur les bases de Groebner ([51, 76]) et utilisées pour définir une signature algébrique.

Pour alléger la présentation, nous supposons que $(\gamma_k^i)_{1 \leq k \leq n_i}$ sont des polynômes dans $R[f_1, \dots, f_e]$. Lorsque ces expressions sont des fractions rationnelles, elles peuvent s'exprimer comme polynômes en introduisant de nouvelles variables égales aux inverses des dénominateurs. Des conditions sur la non nullité des dénominateurs peuvent être ajoutées à $C_{p,f}$.

Étant donné une multi-faute $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{N}}$ ($\mathcal{N} \subset \{1, \dots, e\}$), soit $E_{\mathcal{N}}$ un ensemble de polynômes

$$E_{\mathcal{N}} = \{\gamma_1^1(p, f) - \phi_1, \dots, \gamma_s^{n_s}(p, f) - \phi_N\} \cup \{v_i f_i - 1 | i \in \mathcal{N}\} \cup \{f_i | i \notin \mathcal{N}\}$$

où v_i sont de nouvelles indéterminées.

Dans la définition de $E_{\mathcal{N}}$, les ensembles $\{v_i f_i - 1 | i \in \mathcal{N}\}$ et $\{f_i | i \notin \mathcal{N}\}$ caractérisent les multi-fautes de $\mathcal{F}_{\mathcal{N}}$. Le

premier signifie que la multi-faute $f \in \mathcal{F}_\mathcal{N}$ a ses composantes $f_i, i \in \mathcal{N}$ non nulles et le deuxième que ses autres composantes $i \notin \mathcal{N}$ sont nulles.

Considérons l'idéal polynômial $I_\mathcal{N}$ généré par $E_\mathcal{N}$, c'est à dire l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des éléments de $E_\mathcal{N}$ dans $R[v_1, \dots, v_e, f_1, \dots, f_e, \phi_1, \dots, \phi_N]$.

Une base de Groebner de l'idéal $I_\mathcal{N}$ est calculée avec l'ordre d'élimination consistant à éliminer tout d'abord les indéterminées v_i et f_i . L'intersection $G_\mathcal{N}$ de cette base de Groebner et de $R[\phi_1, \dots, \phi_N]$ génère l'idéal $J_\mathcal{N} = I_\mathcal{N} \cap R[\phi_1, \dots, \phi_N]$ (Voir [51]). Clairement, tout polynôme de $G_\mathcal{N}$ s'annule lorsqu'une multi-faute $f \in \mathcal{F}_\mathcal{N}$ agit sur le système.

Pour toutes les multi-fautes possibles $f_\mathcal{N}$, les ensembles $G_\mathcal{N}$ sont calculés. Les polynômes de $\cup_{\mathcal{N} \subset \{1, \dots, m\}} G_\mathcal{N}$ s'annulant pour toutes les multi-fautes, i.e. les polynômes de $\cap_{\mathcal{N} \subset \{1, \dots, m\}} I_\mathcal{N}$, sont retirés de cet ensemble. Les polynômes restant sont utilisés pour définir les composantes de la signature algébrique.

L'algorithme retournant la signature algébrique est résumé ci-dessous.

Signature_algébrique

1. Pour chaque sous ensemble \mathcal{N} de $\{1, \dots, e\}$, nous considérons une multiple faute générique $f_\mathcal{N}$ et nous appliquons les étapes suivantes à cette multiple faute.
 - (a) Calcul de la base de Groebner de l'idéal $I_\mathcal{N}$ engendré par $E_\mathcal{N}$ avec l'ordre lexicographique $v_{i_1} \succ \dots \succ v_{i_l} \succ f_1 \succ \dots \succ f_m \succ \phi_1 \succ \dots \succ \phi_N \succ p_1 \succ \dots \succ p_m$.
 - (b) Détermination de l'intersection, $G_\mathcal{N}$, de cette base de Groebner et de $R[\phi_1, \dots, \phi_N]$.
 2. Élimination dans $\cup_{\mathcal{N} \subset \{1, \dots, m\}} G_\mathcal{N}$ des polynômes s'annulant pour toutes les multi-fautes, i.e. les polynômes de l'idéal $\cap_{\mathcal{N} \subset \{1, \dots, m\}} I_\mathcal{N}$.
 3. Classement de façon arbitraire de tous les polynômes restant pour former la suite $ASig = (ASig_1, \dots, ASig_l)$.
 4. Renvoi de $ASig$.
-

Cet algorithme permet d'obtenir une signature algébrique de toutes les multi-fautes telle que :

$$\begin{aligned} ASig : \mathbb{R}^e &\longrightarrow (R[\phi_1, \dots, \phi_N])^l \\ f &\mapsto (ASig_1(\phi), \dots, ASig_l(\phi)). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Exemple 3.3.4. *Considérons le résumé exhaustif $\phi(f_1, f_2) = (k(f_1 - 1)^2, -d - f_2)$ donné dans l'exemple 3.3.2. L'algorithme *Signature_algébrique* retourne la signature $ASig$ définie par $ASig(f_1, f_2) = (\phi_1 - k, \phi_2 + d)$ dont chaque composante s'annule pour au moins une multi-faute.*

Par construction, la signature $ASig(f)$ ne dépend pas explicitement de f . Cependant, la présence de (multi-)fautes apparaît dans les valeurs numériques de (ϕ_1, \dots, ϕ_N) et donc dans $ASig$.

En comparant une estimation de $ASig(f)$ et les composantes attendues nulles de la liste $ASig(f_\mathcal{N})$, des (multi-)fautes peuvent être écartées. Toutefois, une telle comparaison peut ne pas être suffisante pour discriminer certaines multi-fautes. En effet, des polynômes de $G_\mathcal{N}$ apparaissant dans $ASig(f_\mathcal{N})$ s'annuleront quand la faute $f_\mathcal{N}$ a lieu mais les autres composantes de la signature $ASig(f_\mathcal{N})$ peuvent s'annuler également pour certaines valeurs particulières de paramètres et de fautes. C'est pourquoi, nous avons ajouté des critères supplémentaires pour améliorer la discrimination des multi-fautes.

3.3.3 Critères pour différencier les signatures

Pour élaborer ces critères, nous avons utilisé des outils semi-algébriques, en particulier, ceux permettant d'étudier les solutions réelles d'équations et d'inéquations polynomiales [10]. Cette approche permet de prendre en compte l'ensemble $C_{p,f}$ qui est l'ensemble des contraintes sur les paramètres et les fautes. Comme nous le verrons dans l'exemple 3.3.5, celles-ci peuvent jouer un rôle fondamental pour discriminer les signatures de (multi-)fautes.

Les trois résultats suivants sont basés sur le test d'ensemble vide d'ensembles semi-algébriques. Ce test peut-être fait grâce à des outils de calcul algébrique ([73, 218]).

Le premier critère (resp. le second) consiste à déterminer si la k -ème composante de $ASig(f_\mathcal{N})$ s'annule pour au moins une valeur réelle de la multi-faute $f \in \mathcal{F}_\mathcal{N}$ (resp. ne s'annule jamais).

Pour tout $\mathcal{N} \subset \{1, \dots, m\}$, considérons l'ensemble $S_\mathcal{N}$ des équations et inéquations polynomiales définies par

$$S_\mathcal{N} := \{\gamma_1^1(p, f) = \phi_1, \dots, \gamma_s^{n_s}(p, f) = \phi_N\} \cup C_{p,f} \cup \{v_i f_i = 1 | i \in \mathcal{N}\} \cup \{f_i = 0 | i \notin \mathcal{N}\}$$

où v_i sont de nouvelles indéterminées.

Critère 1. Si l'ensemble semi-algébrique défini par $S_{\mathcal{N}} \cup \{ASig_k(f_{\mathcal{N}}) = 0\}$ est vide alors la k ème composante de $ASig(f_{\mathcal{N}})$ ne s'annule jamais.

Critère 2. Si l'ensemble semi-algébrique défini par $S_{\mathcal{N}} \cup \{v_k ASig_k(f_{\mathcal{N}}) - 1 = 0\}$ est vide alors la k ème composante de $ASig(f_{\mathcal{N}})$ est égale à 0.

Pour certains systèmes particuliers, une composante de la signature qui s'annule caractérise les multi-fautes dont la i ème composante est nulle.

Critère 3. Soit S l'ensemble semi-algébrique défini par $S := \{\gamma_1^1(p, f) = \phi_1, \dots, \gamma_s^{n_s}(p, f) = \phi_N\} \cup C_{p, f}$. Si l'ensemble des solutions réelles $S \cup \{ASig_j(f) = 0, v_i f_i - 1 = 0\}$ et $S \cup \{v_j ASig_j(f) - 1 = 0, f_i = 0\}$ est vide alors $ASig_j(f) = 0$ est équivalent à $f_i = 0$.

Si le critère 3 est satisfait pour toutes les composantes f_i de $f = (f_1, \dots, f_m)$, il n'est clairement pas utile d'appliquer les critères 1 et 2 sur toutes les $m!$ possibles multi-fautes.

En utilisant les trois critères ci-dessus, les valeurs attendues de $ASig(f)$ quand une (multi-)faute f agit peuvent être regroupées dans un tableau. Par la suite, nous prendrons les conventions suivantes : pour toute multi-faute f ,

- une cellule contenant \emptyset signifie que les critères 1 ou 3 assurent que la composante de $ASig(f)$ ne s'annulera jamais quand la multi-faute agit sur le système ;
- un 0 dans une cellule signifie que les critères 2 ou 3 assurent que $ASig_i(f)$ est nécessairement égal à 0 quand la multi-faute agit sur le système ;
- une cellule vide indique que la composante de la signature s'annule pour certaines valeurs de (p, f) et ne s'annule pas pour d'autres valeurs de (p, f) .

Exemple 3.3.5. Continuons l'exemple 3.3.1 et reprenons la signature algébrique $ASig(f_1, f_2) = (\phi_1 - k, \phi_2 + d)$ retournée par notre algorithme dans l'exemple 3.3.4.

Si l'ensemble des contraintes $C_{p, f} = \{0 < k < 4, 1 \leq d, 0 \leq f_1 < 2, 0 \leq f_2 < 2\}$ est pris en compte, les deux premiers critères fournissent les caractéristiques de la signature algébrique des multi-fautes possibles. Elles sont résumées dans le tableau suivant :

| f | $ASig_1(f)$ | $ASig_2(f)$ |
|----------------|-------------|-------------|
| $f_{\{\}} $ | 0 | 0 |
| $f_{\{1\}} $ | \emptyset | 0 |
| $f_{\{2\}} $ | 0 | \emptyset |
| $f_{\{1,2\}} $ | \emptyset | \emptyset |

Clairement, les valeurs de $ASig(f)$ et, plus précisément, les valeurs de $ASig_1(f)$ et de $ASig_2(f)$ sont suffisamment discriminantes pour toutes les multi-fautes possibles. Ce résultat peut être également obtenu en appliquant le critère 3 aux deux composantes de la signature : ce critère permet de montrer l'équivalence entre $f_1 = 0$ (resp. $f_2 = 0$) et $ASig_1 = 0$ (resp. $ASig_2 = 0$).

Si on ne considère pas les contraintes sur les paramètres et les fautes, le tableau suivant est obtenu :

| f | $ASig_1(f)$ | $ASig_2(f)$ |
|----------------|-------------|-------------|
| $f_{\{\}} $ | 0 | 0 |
| $f_{\{1\}} $ | | 0 |
| $f_{\{2\}} $ | 0 | \emptyset |
| $f_{\{1,2\}} $ | | \emptyset |

Ce tableau montre que les contraintes jouent un rôle important dans l'étude de la diagnosticabilité. Plus précisément, les outils semi-algébriques assurent que, pour des valeurs particulières de paramètres, la faute $f_{\{1\}}$ ne peut pas être détectée d'après les signatures algébriques de $f_{\{\}}$ et $f_{\{1\}}$. On peut faire la même remarque pour la discrimination des multi-fautes $f_{\{2\}}$ et $f_{\{1,2\}}$.

Remarque 23. D'autres critères algébriques utilisant les calculs de bases de Groebner peuvent être développés pour obtenir de l'information sur les valeurs possibles de $ASig(f_{\mathcal{N}})$ quand une multi-faute $f_{\mathcal{N}}$ agit. Par exemple,

1. si la base de Groebner $E_{\mathcal{N}} \cup \{ASig_k(f_{\mathcal{N}})\}$ est égale à $\{1\}$ alors la k ème composante de $ASig(f_{\mathcal{N}})$ ne s'annule jamais. En effet, dans ce cas, les fonctions polynomiales associées aux polynômes de $E_{\mathcal{N}} \cup \{ASig_k(f_{\mathcal{N}})\}$ n'ont pas de zéro complexe en commun ([51]) et par conséquent pas de solution réelle ;

2. par construction de I_N , nous avons que si $ASig_k(f_N)$ appartient à I_N alors $ASig_k(f_N) = 0$.

Même si les contraintes sur les paramètres impliquant les inégalités ne peuvent pas être prises en compte, ces critères peuvent être testés plus rapidement dans la pratique que les critères 1 ou 2.

3.3.4 Application

Dans cette section, nous allons reprendre l'exemple du réservoir 3.2.3 utilisé dans le cadre de la signature fonctionnelle. Nous allons montrer comment à partir de la signature algébrique et des critères que nous avons définis dans la section précédente on peut traiter la diagnosticabilité et le diagnostic d'un système dans le cas (multi-)fautes. Nous avons implémenté les algorithmes pour la construction de la signature algébrique et les critères 1, 2 et 3 en Maple 18. Cette première étape nous a permis de faire une étude de diagnosticabilité du système en nous fournissant la table donnant les valeurs attendues des signatures en fonction des multi-fautes possibles. Cette table a ensuite constitué l'entrée d'un programme Scilab permettant d'estimer numériquement les signatures algébriques des multi-fautes à partir des sorties simulées bruitées. La comparaison entre les valeurs numériques et les valeurs attendues de la signature ont permis de détecter et d'isoler les multi-fautes.

Reprenons l'exemple 3.2.3 du réservoir mais avec une seule observation ².

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t, p) = p_1 u(t) - p_2 \sqrt{x_1(t, p)}, x_1(0) = 0.3, \\ \dot{x}_2(t, p) = p_3 \sqrt{x_1(t, p)} - p_4 \sqrt{x_2(t, p)}, x_2(0) = 0.6, \\ y(t, p) = p_5 \sqrt{x_1(t, p)}, \end{cases} \quad (3.22)$$

où p_1, \dots, p_5 sont des paramètres positifs.

Les fautes sont f_1 une faute additive sur le signal d'entrée, f_2 une faute additive agissant sur le capteur à la sortie du premier réservoir et $f_3 \in]0; 1[$ un défaut de colmatage.

Utilisant les changements de variables $z_1(t, p) = \sqrt{x_1(t, p)}$, $z_2(t, p) = \sqrt{x_2(t, p)}$ et l'algorithme de Rosenfeld Groebner, l'ARR suivante a été obtenue :

$$2y\dot{y} - p_5(f_3 - 1)^2(p_1 p_5 f_1 + p_2 f_2) - p_1 p_5^2(f_3 - 1)^2 u + p_2 p_5(f_3 - 1)^2 y - 2f_2 \dot{y} = 0$$

d'où on déduit le résumé exhaustif :

$$\phi(f_1, f_2, f_3) = (-p_5(f_3 - 1)^2(p_1 p_5 f_1 + p_2 f_2), -p_1 p_5^2(f_3 - 1)^2, p_2 p_5(f_3 - 1)^2, -2f_2).$$

L'application de l'algorithme *Signature_Algebrique* nous a donné la signature algébrique :

$$ASig(f) = (\phi_1, \phi_4, p_1 p_5^2 + \phi_2, -p_2 p_5 + \phi_3, -\phi_3 \phi_4 + 2\phi_1, -p_2 p_5 \phi_4 + 2\phi_1).$$

L'étape suivante consiste à calculer les valeurs attendues de $ASig(f)$. L'ensemble des contraintes considérées est :

$$C_{p,f} = \{0 < p_1, \dots, 0 < p_5, 0 \leq f_3 < 1\}.$$

qui correspondent à la signification physique des paramètres et des fautes du modèle. Les critères 1 et 2 permettent de déduire le tableau 3.1 :

Ce tableau montre que les composantes $ASig_2(f)$, $ASig_4(f)$ et $ASig_5(f)$ permettent de discriminer toutes les multi-fautes pour n'importe quelle entrée u . En effet, $ASig_2(f)$, $ASig_4(f)$ et $ASig_5(f)$ ne dépendent pas de la composante ϕ_2 qui est le seul coefficient contenant l'entrée u . Le modèle est donc fortement algébriquement diagnosticable.

Remarque 24. 1. Ce résultat est valable même si la valeur des paramètres p_1 , p_3 et p_4 n'est pas connue. Ainsi, la connaissance de toutes les valeurs des paramètres internes n'est pas nécessaire pour détecter et discriminer toutes les multi-fautes possibles.

2. La conclusion que le modèle est fortement algébriquement diagnosticable peut être obtenue en appliquant le critère 3 à $ASig_2(f)$, $ASig_4(f)$ et $ASig_5(f)$.

Dans les simulations, un simple contrôleur est utilisé pour contrôler le niveau de l'eau dans le réservoir supérieur. On a supposé qu'il suivait un signal carré de référence. Les paramètres du modèle sont $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 0.3$, $p_5 = 1$. La sortie simulée est perturbée par un bruit gaussien η tel que $\eta(t) \in [-0.01; 0.01]$. Ainsi $y(t) = \bar{y}(t) + \eta(t)$ où \bar{y} est la valeur exacte de la sortie correspondant à la valeur exacte des paramètres. Les observations sont supposées être faites aux temps discrets $(t_i)_{i=1, \dots, M}$ sur l'intervalle $[0, 50]$, le pas de temps étant $h = 0.5$.

Dans le scénario avec faute, nous supposons que les fautes sont introduites au temps $t = 22s$. Les figures 3.12 et 3.13 représentent différents cas de simples et multi-fautes agissant sur le système.

| | $ASig_1(f)$ | $ASig_2(f)$ | $ASig_3(f)$ | $ASig_4(f)$ | $ASig_5(f)$ | $ASig_6(f)$ |
|-----------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| $f_{\{\}}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $f_{\{1\}}$ | \emptyset | 0 | 0 | 0 | \emptyset | \emptyset |
| $f_{\{2\}}$ | \emptyset | \emptyset | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $f_{\{3\}}$ | 0 | 0 | \emptyset | \emptyset | 0 | 0 |
| $f_{\{1,2\}}$ | | \emptyset | 0 | 0 | \emptyset | \emptyset |
| $f_{\{1,3\}}$ | \emptyset | 0 | \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset |
| $f_{\{2,3\}}$ | \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | 0 | \emptyset |
| $f_{\{1,2,3\}}$ | | \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | |

TABLE 3.1 – Valeurs numériques attendues des signatures algébriques

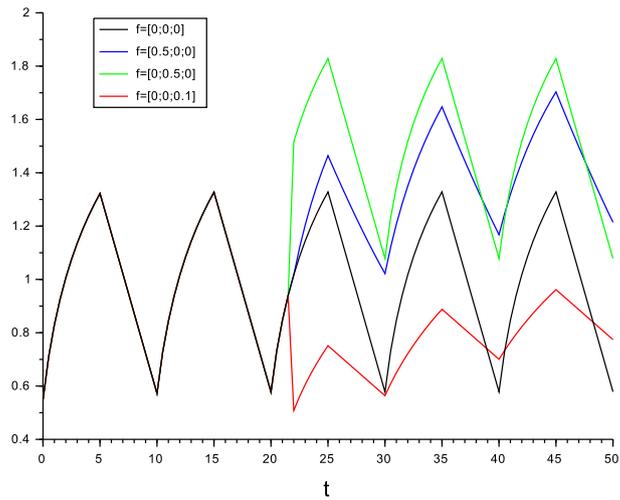


FIGURE 3.12 – Niveau d'eau dans le réservoir supérieur, y , durant la simulation sans faute et durant les simulations avec de simples fautes introduites à $t = 22s$.

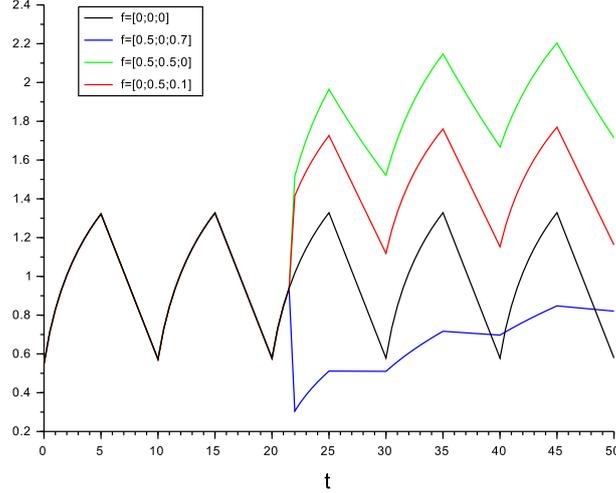


FIGURE 3.13 – Simulations du niveau d’eau dans le réservoir supérieur (valeurs de y) pour le cas sans faute (courbe noire) et et les cas multi-fautes introduites à $t = 22s$ (courbes bleues, vertes et rouges).

Les dérivées sont estimées en utilisant une méthode basée sur les B-splines [97]. Pour estimer ϕ , nous nous sommes ramenés à la résolution d’un système linéaire sur-dimensionné. Pour cela, nous avons réécrit l’ARR à chaque instant discret t_i , d’où un système linéaire de dimension M dont les inconnues sont les composantes de ϕ . Notons $y_p(t_i)$ l’estimée de $\dot{y}(t_i)$. Le système a la forme suivante :

— Dans le cas avec faute,

$$A^f X_f = b \quad (3.23)$$

avec $X_f = (-p_5 (f_3 - 1)^2 (p_1 p_5 f_1 + p_2 f_2), -p_1 p_5^2 (f_3 - 1)^2, p_2 p_5 (f_3 - 1)^2, -2 f_2) (= \phi(f))$,
 $A_i^f = (1, u(t_i), y(t_i), y_p(t_i))$ et $b_i = -2y(t_i) y_p(t_i)$.

— Dans le cas sans faute,

$$AX_0 = b \quad (3.24)$$

avec $X_0 = (p_1 p_5^2; p_2 p_5)$, $A_i = (u(t_i), y(t_i))$ et $b_i = -2y(t_i) y_p(t_i)$.

Ces systèmes sont résolus en utilisant la factorisation QR.

Le système (3.24) est utilisé pour détecter le temps t_d à partir duquel la multi-faute agit. À partir des 10 premiers pas de temps, la matrice A et le vecteur b sont construits. Ensuite, à chaque pas de temps, ils sont complétés et le système (3.24) est résolu avec cette nouvelle matrice A et ce nouveau vecteur b . L’estimée de X_0 est comparée avec la valeur nominale. Si leur différence en norme 2 est plus grande que $\varepsilon = 10^{-3}$, une multi-faute est détectée.

Une fois une multi-faute détectée, le système (3.23) sert à discriminer la (multiple) faute. Au moins quatre valeurs de temps après la détection de la multiple faute en t_d sont nécessaires puisque X_f est un vecteur de dimension 4. Remarquons que les multi-fautes peuvent être détectées et discriminées tous les 0.5 correspondant aux mesures de sortie. La signature $ASig$ est alors estimée et le tableau 2.1 est utilisé pour discriminer la multi-faute qui agit. Les résultats sont résumés dans le tableau 3.2.

Même si nous avons fait le simple choix de définir un seuil constant, toutes les multi-fautes ont été détectées et discriminées. Ces résultats pourraient sans doute être améliorés en utilisant une autre méthode pour définir un seuil en fonction du bruit.

3.3.5 La détection de faute dans le cadre ensembliste

Cette partie reprend une partie de l’article [102] et fait le lien entre les définitions d’identifiabilité ensemblistes donnés à la section 2.5 et la détection.

Dans le cadre du projet ANR MAGIC-SPS, nous nous sommes intéressées aux méthodes de détection et d’identification des défauts pour les modèles non linéaires à incertitudes bornées. La détection de faute dans le cadre ensembliste peut se faire à partir de l’estimation des états du système ou des paramètres. Lorsque le modèle est

2. Ce choix est fait pour que le modèle ne soit pas identifiable presque partout.

| (Multi-)fautes f | Temps de Détection | Temps de Discrimination |
|-------------------------------|-----------------------|----------------------------|
| $f_{\{1\}} = (0.5, 0, 0)$ | 0 | 3 |
| $f_{\{2\}} = (0, 0.5, 0)$ | 0.5 | 1.5 |
| $f_{\{3\}} = (0, 0, 0.5)$ | 0.5 | 2 |
| $f_{\{1,3\}} = (0.5, 0, 0.1)$ | 0 | 1.5 |
| $f_{\{1,3\}} = (0.5, 0, 0.7)$ | 0.5 | 11* |
| $f_{\{1,2\}} = (0.5, 0.5, 0)$ | 0 | 1.5 |
| $f_{\{2,3\}} = (0, 0.5, 0.1)$ | 0 | 1.5 |
| $f_{\{2,3\}} = (0, 0.5, 0.7)$ | 0 | 1.5 |

TABLE 3.2 – Temps de détection et de discrimination. Un temps de détection égal à 0 signifie que la multi-faute est détectée à 22s dès que la multi-faute agit. Un temps de discrimination de 1.5s signifie qu’il aura fallu 4 pas de temps (22; 22.5; 23; 23.5) pour discriminer la faute.

* $f_3 \neq 0$ est tout d’abord détecté à $t = 22.5s$ et la multi-faute $f_{\{1,3\}}$ est discriminée à $t = 33s$.

non linéaire, les ensembles à caractériser peuvent être non convexes et même se composer de plusieurs ensembles disjoints. Dans ce dernier cas, l’analyse par intervalles donne l’enveloppe connexe de l’union de ces ensembles entraînant le non déclenchement d’alarme. La difficulté est alors d’obtenir des vecteurs de solution intervalles plus conservateurs. Des méthodes récentes telles que [2] ou celle que nous avons proposées dans [102] fournissent des améliorations dans ce sens.

Dans [102], nous avons repris le travail d’identifiabilité et d’estimation de paramètres dans le cadre ensembliste et présenté aux sections 2.5.4 et 2.5.7. Ce travail tire parti de la méthode basée sur l’algèbre différentielle pour vérifier l’identifiabilité ensembliste et son homologue opérationnel, la μ -identifiabilité ensembliste. Ces notions fournissent un moyen d’étudier différents aspects de l’identifiabilité pour les systèmes à erreurs bornées, en particulier les systèmes qui représentent une famille infinie de systèmes non linéaires. En construisant le schéma d’estimation des paramètres sur l’analyse de l’identifiabilité, nous garantissons que l’ensemble de solutions se réduit à un ensemble connexe, évitant ainsi le pessimisme des méthodes ensemblistes. L’identifiabilité est étroitement liée à la diagnosticabilité car elle fournit la garantie que deux situations correspondant à des valeurs de paramètres différents sont distinguables. La méthode proposée a été appliquée à l’exemple décrivant la capacité d’un récepteur du macrophage à recevoir des macromolécule solubles spécifiques et présenté à la Section 2.1. Dans [103], le modèle a été donné dans un cadre stochastique. L’incertitude a été prise en compte au moyen d’hypothèses appropriées sur les distributions de probabilité de l’erreur du bruit et du modèle. Dans [102], la sortie y a été perturbée par un bruit additif borné η , $\eta(t) \in [\eta(t)]$ et nous nous sommes ramenées à la résolution d’un système $0 \in [A][x] - [b]$ avec l’algorithme SIVIA (voir Annexe 6).

Différents scénarios sans faute et avec faute ont été considérés. Le scénario sans faute a donné les intervalles nominaux de référence pour chaque paramètre. Pour chaque scénario, les paramètres ont été estimés correctement avec une précision raisonnable et les intervalles obtenus pour les paramètres avec fautes avaient une intersection disjointe avec les intervalles nominaux.

3.4 Conclusion

Dans le cadre de la méthode basée sur les ARRs, nous avons proposé deux définitions de diagnosticabilité : la diagnosticabilité fonctionnelle et la diagnosticabilité algébrique pour les modèles dynamiques non linéaires. Contrairement aux définitions classiques, l’étude de ces définitions met en évidence certaines des propriétés analytiques des relations de redondance liées à la faute agissant sur le système.

Dans le premier cas, la propriété d’identifiabilité permet d’assurer qu’une ou des fautes pourront être discriminées en comparant et évaluant la faute en fonction de l’ensemble des trajectoires du résidu. Dans le second cas, une table obtenue à partir d’outils semi-algébriques certifie que des (multi)-fautes peuvent ou non être discriminées en évaluant des relations algébriques. Les méthodes développées s’appuient sur plusieurs outils d’algèbre (différentielle et algébrique) permettant de garantir les résultats théoriques. De celles-ci, nous en avons déduit des méthodes numériques pour détecter, discriminer et isoler la ou les fautes.

Chapitre 4

Réseaux

4.1 Introduction

Je me suis également intéressée aux réseaux d'oscillateurs [30, 31, 50, 154]. Ceux-ci sont très utilisés pour décrire des processus dynamiques qui se produisent dans de nombreux domaines de la science comme la biologie, l'étude des populations. La caractéristique principale de ces réseaux d'interaction complexes est l'émergence de nouvelles propriétés comme la synchronisation entre les différents éléments.

J'ai tout d'abord étudié les conditions de synchronisation de réseaux dont les noeuds sont constitués de systèmes dynamiques non linéaires, non nécessairement identiques et dont les termes de synchronisation peuvent être non linéaires [154]. La résolution de ce problème nécessite la prise en compte des dynamiques individuelles des oscillateurs ainsi que la topologie du graphe, ce qui rend ce problème difficile à résoudre dans certains cas. La littérature sur ce thème est abondante et de nombreux résultats portant sur des conditions suffisantes pour obtenir la synchronisation complète de systèmes sont donnés (voir [159]). Classiquement, deux cycles limites couplés sont synchronisés dès que leur évolution en temps est périodique avec la même période et parfois avec la même phase [175]. Une question importante sur la synchronisation d'un réseau d'oscillateurs est de déterminer la stabilité de l'état de synchronisation. Il faut alors considérer les propriétés du réseau et les vecteurs d'état des oscillateurs (voir par exemple [16, 214, 215, 217, 226]). Deux méthodes ont été proposées dans la littérature. La première ("*master stability function*" en anglais), est basée sur le calcul de l'exposant de Lyapunov et les valeurs propres de la matrice de connectivité [156]. Cependant, le calcul des valeurs propres peut être difficile pour de grands réseaux d'oscillateurs. Une seconde méthode est la méthode de stabilité de connexion de graphe ("*connection graph stability method*" en anglais) [16]. Elle lie l'étude d'une fonction de Lyapunov à la topologie du graphe. Après avoir été développée sur des réseaux dont les termes de synchronisation sont linéaires, elle a ensuite été étendue aux graphes non orientés [13, 14, 15].

Nous avons étendu un des résultats existant dans le cas où les fonctions de couplage sont non linéaires. Les conditions suffisantes de synchronisation que nous avons proposées sont basées sur l'étude d'une fonction de Lyapunov et l'utilisation d'une pseudo-métrique. Ensuite, nous avons donné deux résultats pour obtenir la synchronisation complète. Le premier donne une condition sur la force de synchronisation. Le second est une version locale de la première, c'est à dire quand les oscillateurs sont proches de la variété de synchronisation. Nous avons également donné une condition d'existence des trajectoires des oscillateurs.

Ensuite, dans les articles [30, 31, 50], je me suis intéressée aux liens entre la synchronisation et les paramètres de bifurcations. Dans [30, 31], présentés dans le prochain chapitre, nous avons étudié la synchronisation de modèles décrivant des comportements humains en situation de catastrophe dans le cadre du contrôle. À un paramètre de bifurcation, nous avons associé un type de comportements. Selon sa valeur, la zone géographique représente une zone de sécurité ou une zone de danger.

Dans [50], nous avons étudié les connexions entre une bifurcation de Hopf d'un neurone modélisé par un système de Hindmarsh-Rose (HR) et une bifurcation d'un réseau de neurones acyclique direct formé par des systèmes HR distincts. En particulier, nous nous sommes demandées comment évoluaient les valeurs d'une bifurcation dans un réseau en fonction des valeurs des paramètres de couplage.

4.2 Synchronisation de systèmes non orientés

4.2.1 Extension de la méthode de stabilité de connexion de graphes

Soient G un graphe connexe non orienté et n son nombre d'arêtes, \mathcal{E} l'ensemble de ses arêtes. L'arête de G , non orientée, du noeud i au noeud j sera notée (i, j) .

Les systèmes dynamiques considérés dans cette partie sont de la forme :

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = F_1(X_1, t) - \epsilon \sum_{(1,j) \in \mathcal{E}} h(X_1, X_j), \\ \vdots \\ \dot{X}_n = F_n(X_n, t) - \epsilon \sum_{(n,j) \in \mathcal{E}} h(X_n, X_j), \end{cases} \quad (4.1)$$

où

- $X_i = (X_i^1, \dots, X_i^d)^T$ est le vecteur composé des d coordonnées du i ème oscillateur,
- $F_i = (F_i^1, \dots, F_i^d)^T$ un vecteur de fonctions,
- $h = (h^1, \dots, h^d)^T$ est la fonction de synchronisation qui définit le vecteur de couplage entre les oscillateurs,
- le paramètre réel ϵ est la force de synchronisation appliquée au réseau d'oscillateurs.

Le système (4.1) de conditions initiales $(X_1(0), \dots, X_n(0))^T$, est dit *complètement synchronisé* si, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\|X_i(t) - X_j(t)\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

Cela signifie que le vecteur (X_1, \dots, X_n) approche la variété de synchronisation définie par

$$X_1(t) = X_2(t) = \dots = X_n(t).$$

En particulier, ceci implique que les oscillateurs ont le même comportement asymptotique (comme des trajectoires chaotiques, des solutions stables et périodiques). La synchronisation complète du système (4.1) est dite *globale* si elle a lieu pour n'importe quel état initial des oscillateurs. Si le système (4.1) synchronise complètement dans un voisinage de la variété de synchronisation, la synchronisation est dite *locale*.

Par la suite, nous noterons les différences $\Delta_{i,j} = X_i^T - X_j^T$ et le vecteur constitué de l'ensemble des différences

$$\Delta = (\Delta_{1,2}, \dots, \Delta_{1,n}, \Delta_{2,3}, \dots, \Delta_{2,n}, \dots, \Delta_{n-1,n})^T.$$

Ainsi, prouver la synchronisation complète du système (4.1) est équivalent à prouver que $\|\Delta(t)\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.

Les résultats de synchronisation vont dépendre de la notion de pseudo-métrique.

Soit D un ensemble non vide. Une *pseudo-métrique* est une application $\varphi : D \times D \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui vérifie les axiomes suivants :

- $\varphi(z_1, z_1) = 0$,
- $\varphi(z_1, z_2) = \varphi(z_2, z_1)$ (propriété de symétrie),
- $\exists \rho > 0, \varphi(z_1, z_3) \leq \rho(\varphi(z_1, z_2) + \varphi(z_2, z_3))$

On peut noter que toute métrique est une pseudo-métrique avec $\rho = 1$.

Soit φ une pseudo-métrique sur l'ensemble D . Posons, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\rho(m)$ le plus petit réel tel que

$$\varphi(z_1, z_{m+1}) \leq \rho(m) [\varphi(z_1, z_2) + \dots + \varphi(z_m, z_{m+1})]. \quad (4.2)$$

Remarquons que $\rho(1) = 1$.

Dans les exemples suivants, les expressions de $\rho(m)$ sont les conséquences directes de la convexité des fonctions $x \rightarrow (x^2)^\alpha$ et $x \rightarrow x \tanh(x)$.

Exemple 4.2.1. 1. L'application $\varphi_\alpha : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$\varphi_\alpha \left(\left(\begin{array}{c} x_1 \\ y_1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} x_2 \\ y_2 \end{array} \right) \right) = ((x_1 - x_2)^2)^\alpha$$

avec $\alpha \geq 1/2$ est une pseudo-métrique pour laquelle $\rho(m) = m^{2\alpha-1}$.

2. Soit D la boule fermée de centre 0 et de rayon 1. L'application $\varphi : D \times D \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$\varphi \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) = (x_1 - x_2) \tanh(x_1 - x_2)$$

est une pseudo-métrique pour laquelle $\rho(m) = m$.

Nous avons les propriétés suivantes.

Proposition 21. ✓ La suite de réelles $(\rho(m))_{m \geq 1}$ est croissante.

✓ Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\rho(m) \leq \rho(2)^{m-1}$ (voir [219]).

✓ Soit φ_1 et φ_2 deux pseudo-métriques sur D tels que $\rho_1(m)$ et $\rho_2(m)$ sont les plus petits réels vérifiant (4.2). Pour tout $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, l'application $\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2$ est une pseudo-métrique sur D vérifiant $\rho(m) = \text{Max}\{\rho_1(m), \rho_2(m)\}$.

La définition d'une pseudo-métrique permet de définir une pseudo-longueur entre deux sommets de G . Considérons φ une pseudo-métrique définie sur l'ensemble des variables des oscillateurs. z_i étant la variable d'état du i ème sommet de G et $\varphi(z_i, z_j)$ la pseudo-longueur entre les sommets i et j alors $\varphi(z_{i_1}, z_{i_2}) + \dots + \varphi(z_{i_{m-1}}, z_{i_m})$ est la pseudo-longueur de n'importe quel chemin $P_{i,j} = (i = i_1, i_2, \dots, i_m = j)$ du sommet i au sommet j .

Les résultats de synchronisation du système (4.1) que nous avons établis (théorèmes 3 et 4 de la section 4.2.2) s'appuient sur un résultat de majoration de la somme des pseudo-longueurs entre deux oscillateurs quelconques. Nous avons montré que cette somme est bornée par la somme des pseudo-longueurs des chemins joignant deux oscillateurs quelconques. Cette majoration est définie à une constante multiplicative près $C(G)$. La constante $C(G)$ joue un rôle important dans les théorèmes 3 et 4 puisque la force de synchronisation ϵ est proportionnelle à cette constante. Le résultat de majoration est le suivant :

Proposition 22. Soit G un graphe connexe, \mathcal{E} l'ensemble de ses sommets et φ une pseudo-métrique sur l'ensemble D . Pour toute sommet i , soit $z_i \in D$ un vecteur associé au sommet i . Il existe une constante C dépendant seulement de G telle que

$$\sum_{i,j} \varphi(z_i, z_j) \leq C \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} \varphi(z_i, z_j). \quad (4.3)$$

De plus, le plus petit réel C satisfaisant (4.3) et noté $C(G)$ est borné par

$$\frac{n(n-1)}{2} \delta(G) \rho(\delta(G)), \quad (4.4)$$

où $\delta(G)$ est le diamètre de G .

Remarque 25. 1. La borne (4.4) de $C(G)$ peut ne pas conduire à une bonne estimation de $C(G)$ pour un graphe particulier. Néanmoins, cette borne est valable pour tout graphe avec n sommets.

2. Dans le cas d'une pseudo-métrique satisfaisant l'inégalité triangulaire, i.e. quand $\rho(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une méthode considérant G comme entrée et donnant une borne de $C(G)$ est proposée dans [15]. Les deux principales étapes de la méthode proposée sont :

(a) pour tout (i, j) avec $i > j$, choisir un chemin $P_{i,j}$; celui-ci est généralement choisi de longueur minimale (nombre d'arêtes du chemin);

(b) pour chaque arête e du graphe, déterminer la somme $B(e)$ des longueurs de tous les chemins $P_{i,j}$ contenant l'arête e . Une borne pour $C(G)$ est alors $\text{Max}\{B(e) : e \in \mathcal{E}\}$.

Pour chaque choix de chemin, ces deux étapes retournent une borne de $C(G)$. Clairement, le nombre de chemins possibles est important ces choix ne sont pas optimaux en général. Toutefois, les calculs des bornes de $C(G)$ restent possibles. En modifiant la première étape de la méthode, elle peut-être appliquée à notre cas : elle consiste à considérer, pour tout chemin $P_{i,j}$, la pseudo-longueur $\rho(|P_{i,j}|)$ plutôt que la longueur $|P_{i,j}|$.

3. Dans le cas de pseudo-métriques φ satisfaisant $\rho(m) = m$, la méthode proposée dans [15, 16] et les bornes explicites de $C(G)$ calculées avec cette méthode peuvent être directement utilisées. C'est le cas de la seconde fonction dans l'exemple 4.2.1.

4.2.2 Synchronisations complètes

Nous avons traité deux cas. Le premier était la synchronisation complète pour laquelle les oscillateurs X_1, \dots, X_n sont dans $D = \mathbb{R}^d$, le second étant la synchronisation complète pour laquelle les oscillateurs sont dans un voisinage de D pour la variété $X_1 = X_2 = \dots = X_n$.

Les hypothèses sur le système (4.1) sont les suivantes :

— Pour tout $(i, j) \in \mathcal{E}$, il existe des réels positifs a_1, \dots, a_d tels que pour tout $(X_i, X_j) \in D$,

$$\varphi(X_i, X_j) = \sum_{k=1}^d a_k (X_i^k - X_j^k) h^k(X_i, X_j) \quad (4.5)$$

sont des pseudo-métriques où $h = (h^1, \dots, h^d)^T$ est la fonction de synchronisation.

— Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ et, pour tout $t \geq t_0$ où $t_0 \in \mathbb{R}$, si $(X_i, X_j) \in D$, alors nous avons

$$\sum_{k=1}^d a_k (X_i^k - X_j^k) \left(F_i^k(X_i, t) - F_j^k(X_j, t) \right) \leq \varphi(X_i, X_j). \quad (4.6)$$

— Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ et tout $(X_i, X_j) \in D$, si

$$\sum_{k=1}^d a_k (X_i^k - X_j^k) \left(F_i^k(X_i, t) - F_j^k(X_j, t) \right) = 0$$

et/ou $\varphi(X_i, X_j) = 0$ alors $(X_i = X_j)$. (4.7)

Remarque 26. 1. L'hypothèse (4.5) implique que,

$$h(X_i, X_j) = -h(X_j, X_i) \text{ (anti-symétrique).}$$

2. L'hypothèse (4.7) est nécessaire pour prouver la synchronisation du système (4.1) dans les théorèmes 3 et 4. La condition $\varphi(X_i, X_j) = 0$ dans cette hypothèse n'est pas toujours suffisante car elle n'implique pas les égalités de toutes les composantes des oscillateurs. Dans ce cas, la première condition est nécessaire pour prouver la synchronisation complète.

Dans les cas pratiques, une première difficulté est de prouver l'existence des trajectoires du système (4.1) pour t suffisamment grand. La proposition suivante lie l'existence des trajectoires des systèmes couplés et non couplés.

Proposition 23. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, supposons que les hypothèses (4.5), (4.6) et (4.7) sont satisfaites et que, pour tout $t \geq t_0$, $X_i^T F_i(X_i, t) \leq \Psi(\|X_i\|)$ où Ψ satisfait les conditions

$$\int_{t=t_0}^{+\infty} \frac{ds}{\Psi(s)} = +\infty \text{ et } \Psi(t) > 0 \text{ pour tout } t \geq t_0 \geq 0.$$

Alors, le problème de Cauchy défini par le système (4.1) et la condition initiale $\begin{pmatrix} X_1(t_0) \\ \vdots \\ X_n(t_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{nd}$ a une

solution définie sur $[t_0; +\infty)$.

Nous avons établi le théorème suivant qui permet d'obtenir la synchronisation complète du système (4.1). Sa preuve est basée sur l'application de la seconde méthode de Lyapunov et sur les propriétés de la pseudo-métrique φ .

Théorème 3. Supposons que les hypothèses (4.5), (4.6) et (4.7) soient satisfaites pour $D = (\mathbb{R}^d)^2$. Si $\epsilon > \frac{C(G)}{2n}$, où $C(G)$ est la borne optimale telle que l'inégalité (4.3) est vraie, alors le système (4.1) synchronise complètement.

Nous avons également établi un résultat de synchronisation locale. Pour cela, nous avons eu besoin des

notations suivantes. Soit H la matrice diagonale $Diag(a_1, \dots, a_d)$ et $\mathcal{H} = \begin{pmatrix} H & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & H \end{pmatrix}$ la matrice

composée de $\frac{n(n-1)}{2}$ matrices H . L'application

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_V : \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}d} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ X &\rightarrow \sqrt{\frac{1}{2}X^T \mathcal{H}X} \end{aligned} \quad (4.8)$$

est une norme puisque a_1, \dots, a_d sont positifs. Considérons

$$V(t) = \|\Delta(t)\|_V^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d \sum_{i < j \leq n} a_k (X_i^k(t) - X_j^k(t))^2.$$

Théorème 4. *Soit \mathcal{B} la boule fermée*

$$\{X \in \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}d} \mid \|X\|_V \leq r\}$$

où r est un réel positif. Supposons que les hypothèses (4.5), (4.6) et (4.7) sont vérifiées quand Δ appartient à \mathcal{B} et supposons qu'à un instant t_0 , $\Delta(t_0)$ appartient à l'intérieur $\overset{\circ}{\mathcal{B}}$ de \mathcal{B} .

Si $\epsilon > \frac{C(G)}{2n}$, $C(G)$ étant la borne optimale telle que l'inégalité (4.3) a lieu, alors le système (4.1) se synchronise.

4.2.3 Application

Le théorème 4 est appliqué à un réseau d'oscillateurs de Chua [42, 43, 131]. Si $X = (x, y, z)^T$, les équations pour un simple oscillateur sont données par $\dot{X} = F(X)$ où

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} a[y - x - f(x)] \\ x - y + z \\ -by - cz \end{pmatrix},$$

$a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ et f est une fonction par morceaux définie par

$$f(x) = dx + 1/2(d - e)(|x + 1| - |x - 1|).$$

Considérons une configuration en étoile pour laquelle le vecteur d'état du i -ème oscillateur est donné par

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{z}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a[y_i - x_i - f(x_i)] \\ x_i - y_i + z_i \\ -by_i - cz_i \end{pmatrix} + \epsilon \sum_{j \mid (i,j) \in \mathcal{E}} \begin{pmatrix} \tanh(x_i - x_j) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

et $\mathcal{E} = \{(1;2), (1;3), \dots, (1;n)\}$.

Remarque 27. 1. *La fonction de synchronisation \tanh modélise la situation commune dans laquelle l'influence des oscillateurs sur les autres sature quand elle est trop grande. Ce type de fonction apparaît naturellement dans les systèmes dynamiques [182].*

2. *Le fait que les solutions du système sont définies sur \mathbb{R} est une conséquence directe de la proposition 23.*

Soit δ un réel positif tels que $2d - e - 1 < \delta$. Remarquons que $2d - e$ borne l'ensemble des pentes

$$\left\{ \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \mid 0 < |x - y| \leq 1 \right\}.$$

Le système (4.9) est équivalent à

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{z}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a[y_i - x_i - f(x_i)] \\ x_i - y_i + z_i \\ -by_i - cz_i \end{pmatrix}$$

$$+\epsilon' \sum_{j|(i,j) \in \mathcal{E}} \begin{pmatrix} \delta \tanh(x_i - x_j) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

où $\epsilon' = \epsilon/\delta^1$. Dans le but d'appliquer le théorème 4, vérifions les hypothèses (4.5), (4.6) et (4.7). Pour cela, considérons la boule $\mathcal{B} = \{X \in \mathbb{R}^{\frac{3n(n-1)}{2}} \mid \|X\|_V \leq 1\}$ et $a_1 = 1/a$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1/b$. Comme $a > 0$ et $b > 0$, l'hypothèse (4.5) est évidente.

Vérifions l'hypothèse (4.6). Nous avons

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^3 a_k (X_i^k - X_j^k) \left(F_i^k(X_i) - F_j^k(X_j) \right) \\ &= (x_i - x_j)(f(x_i) - f(x_j)) - (x_i - x_j)^2 \\ & \quad - (y_i - y_j)^2 - c/b(z_i - z_j)^2 \\ & \leq (2d - e - 1)(x_i - x_j)^2. \end{aligned} \quad (4.11)$$

De la définition de δ , nous en déduisons un voisinage fermé \mathcal{B} de la variété de synchronisation,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^3 a_k (X_i^k - X_j^k) \left(F_i^k(X_i) - F_j^k(X_j) \right) \\ & \leq \delta(x_i - x_j) \tanh(x_i - x_j) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Par conséquent, l'hypothèse (4.6) est vérifiée.

Montrons l'hypothèse (4.7). Supposons que $\varphi(x_i, x_j) = 0$, nous avons $x_i = x_j$ car \tanh est décroissante. L'égalité (4.11) implique que $X_i = X_j$.

L'application φ est une pseudo-métrique dans un voisinage de la variété de synchronisation satisfaisant, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\rho(m) = m$ (voir par exemple 4.2.1) et la borne $C(G)$ est donnée explicitement par $2n - 3$ (voir la remarque 25 et [16]).

Le théorème 4 peut être appliqué : si, pour un instant t_0 , le système (4.9) est suffisamment proche de la variété de synchronisation, c'est à dire si $\Delta(t_0) \in \mathcal{B}$, et si $\epsilon > \frac{\delta C(G)}{2n} = \frac{\delta(2n-3)}{2n}$ alors le système (4.9) synchronise complètement.

Remarque 28. *L'approche que nous avons utilisée dans cet exemple peut être facilement étendue à d'autres fonctions f et à d'autres termes de synchronisation [109].*

4.3 Liens entre synchronisation et bifurcations

Le modèle HR décrit en partie le fonctionnement d'un neurone et résulte de la simplification et la généralisation du modèle de Hodgkin-Huxley [95, 96]. Le modèle HR est un système autonome de trois équations différentielles ordinaires pouvant reproduire plusieurs dynamiques du neurone comme les spikes ou les comportements chaotiques. Il s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x} &= y + ax^2 - x^3 - z + I \\ \dot{y} &= 1 - dx^2 - y \\ \dot{z} &= \epsilon(b(x - c_x) - z) \end{cases} \quad (4.13)$$

Les paramètres a , b et d sont déterminés expérimentalement. Le paramètre I correspond au courant appliqué tandis que c_x est la solution x du système de dimension 2 défini par les deux premières équations de (4.13) quand $I = 0$ et $z = 0$. Finalement, le paramètre ϵ représente le rapport d'échelle de temps entre les flux rapides et lents qui ont lieu à travers la membrane d'un neurone. Les deux premières équations contrôlent la dynamique rapide du système tandis que la troisième la dynamique lente.

Les comportements périodiques sont des phénomènes fréquents dans beaucoup de systèmes naturels et sont souvent liés à des paramètres de bifurcation du modèle mathématique. Or, étant donné la difficulté des calculs,

1. Le réel δ est introduit pour borner la somme $\sum_{k=1}^3 a_k (X_i^k - X_j^k) (F_i^k(X_i) - F_j^k(X_j))$ par la pseudo-métrique $\varphi(X_i, X_j) = \delta(x_i - x_j) \tanh(x_i - x_j)$ comme dans l'hypothèse (4.6)

les analyses de bifurcation du modèle HR sont essentiellement numériques [59, 86, 185, 212] sauf dans [28] mais où une partie des paramètres est fixée.

Le paramètre ϵ joue un rôle important pour décrire l'activité neuronale et c'est ce paramètre que nous avons choisi comme paramètre de bifurcation, comme dans [49, 86]. Une bifurcation de Hopf réfère à un changement radical de la dynamique de sortie du modèle dû au changement de la valeur d'un des paramètres. Près d'un point critique, selon la valeur du paramètre de bifurcation, la sortie du modèle tend soit vers un point d'équilibre stable soit vers une solution périodique [90]. À la figure 4.1 est représenté le portrait de phase dans (x, y, z) et les séries temporelles du système (4.13) pour deux valeurs différentes de ϵ , avant et après la bifurcation de Hopf. Les valeurs des autres paramètres sont $a = 3$, $b = 4$, $D = 5$ et $I = 3,25$. Lorsque la valeur de ϵ est plus petite que $\epsilon_c = 0,125912$, le système admet une solution périodique. Lorsque sa valeur croît, cette solution disparaît, puis le système admet un point d'équilibre stable quand sa valeur est plus grande que ϵ_c .

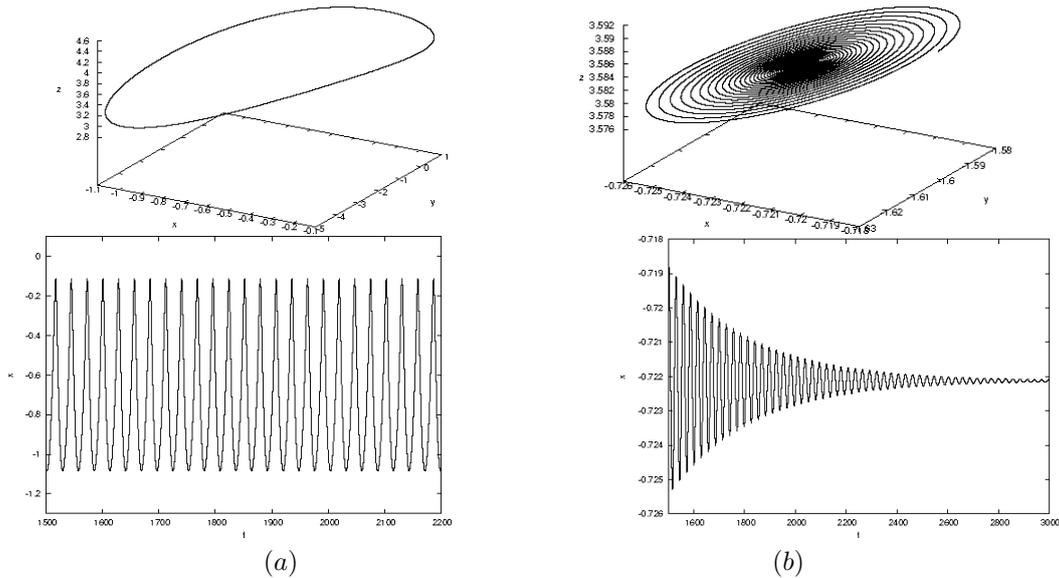


FIGURE 4.1 – (a) Portrait de phase dans (x, y, z) et séries temporelles du système (4.13) avec les paramètres $a = 3$, $b = 4$, $D = 5$ et $I = 3,25$ et $\epsilon = 0,12 < \epsilon_c$. Ici, a solution asymptotique est un cycle limite stable. (b) Portrait de phase dans (x, y, z) et séries temporelles du système (4.13) avec les paramètres $a = 3$, $b = 4$, $D = 5$ et $I = 3,25$ et $\epsilon = 0,13 > \epsilon_c$. Pour cette valeur de ϵ la solution asymptotique est un noeud stable.

Dans [49, 86], les auteurs ont fait une étude de bifurcation sur le simple modèle HR par rapport à ϵ et en donnant une valeur numérique aux autres paramètres. Dans [50], nous avons proposé une étude de bifurcation par rapport à ϵ quelque soit les valeurs des autres paramètres. De plus nous avons étendu l'étude à un système couplé de N neurones. Un de nos défis était d'étudier la dynamique d'un réseau de neurones, comme l'émergence de comportements coordonnés du réseau, à partir des dynamiques d'un seul neurone.

En ce qui concerne les fonctions de couplage, nous avons choisi les fonctions linéaires. En effet, dans le cerveau, les neurones interagissent grâce aux synapses [87] qui peuvent être soit électriques soit chimiques. Dans le premier cas, les interactions sont modélisées par des fonctions de couplage linéaires, dans le second, par des fonctions de couplage non linéaires. Notre choix s'est porté sur les synapses électriques. Plus généralement, les réseaux que nous avons considérés sont des réseaux de neurones acycliques, orientés de modèles HR couplés linéairement. Notre choix de topologie inclut des topologies classiques si le réseau a un noeud source et pas de cycles (voir la figure 4.2).

Au niveau du réseau, nous avons travaillé sur un point d'équilibre particulier du réseau. Si les premiers systèmes découplés des autres commencent à osciller dues à la valeur critique de bifurcation, les autres sous-systèmes développeront également des cycles limites avec une amplitude dépendant de la force de couplage et le réseau présentera une bifurcation de Hopf. Nous avons été plus loin dans le raisonnement et avons montré qu'il est suffisant qu'un seul sous-système oscille pour avoir une bifurcation de Hopf du système complet. Dans le cas d'un réseau acyclique direct, nous avons également établi :

- une expression analytique du paramètre de bifurcation d'un sous-système en fonction des coordonnées du point d'équilibre et des paramètres de ce sous-système et de la somme des forces de couplage dépendant des systèmes précédents,
- les formules donnant la direction, la stabilité et la période des solutions périodiques de toute bifurcation de Hopf dans le réseau.

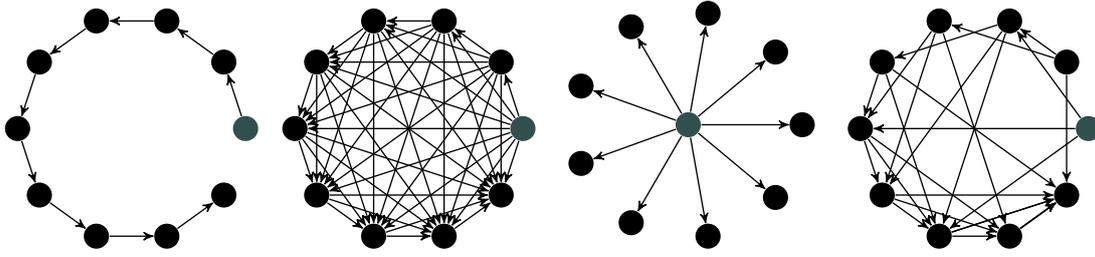


FIGURE 4.2 – Chaîne de réseau (si $k_{ij} = 0 \forall j \neq i-1$); fermeture transitive de la chaîne (et tout état intermédiaire de cette fermeture); réseau en étoile (si $k_{ij} = 0 \forall j \neq 1$); tout graphe direct acyclique avec un noeud source.

Ce travail théorique a permis d'étudier l'influence du couplage sur les bifurcations de Hopf dans le réseau dans deux cas particuliers.

4.4 Conclusion

Les réseaux d'oscillateurs sont depuis toujours un des paradigmes les plus utilisés pour décrire les processus dynamiques qui se produisent dans de nombreux domaines de la science. Étant donné la complexité des systèmes étudiés, la plupart des résultats sont numériques. Nous avons pu toutefois généraliser des résultats théoriques de synchronisation et proposer des expressions analytiques pour étudier des bifurcations de Hopf du réseau à partir d'une bifurcation (de Hopf) survenant dans un neurone. Dans le prochain chapitre, je traite d'exemples de réseaux modélisant une zone géographique impactée par une catastrophe et la propagation des différents comportements adoptés par la population.

Chapitre 5

Croisement entre les mathématiques et les sciences humaines

Cette partie présente un travail qui a commencé en 2013 avec le projet PEPS HuMaIn (Humanité-Mathématiques-sciences de l'Information) : *Le comportement de foule en situation de catastrophe : les comprendre pour mieux les prévenir*. Celui-ci visait à décrire et modéliser les différents comportements adoptés lors d'une catastrophe en s'appuyant sur les connaissances en neurosciences. Il a conduit au développement du modèle Panique-Control-Réflexe (PCR) et à la thèse de Guillaume Cantin. Les différents intervenants que nous avons rencontrés au cours de ces années comme les géographes, les professionnels de gestion de crise et les psychologues ont fait évoluer notre compréhension sur les types de comportements et leurs transitions au cours d'un événement brutal. Ce travail a abouti au projet ANR Com2SiCa (<https://www.com2sica.cnrs.fr/>). Ainsi, le modèle PCR a été enrichi et est devenu le modèle Alerte-Panique-Contrôle (APC). Ce dernier est basé sur deux variables clés utilisées en psychologie pour identifier et caractériser les différents comportements humains : l'intensité de la charge émotionnelle et sa régulation. Cette caractérisation a conduit à définir trois états comportementaux adoptés lors d'une catastrophe : alerté, contrôlé et paniqué ainsi que les transitions entre ces états.

Un effort particulier de réflexion a été fait pour simplifier la représentation des différents comportements tout en gardant les caractéristiques principales des dynamiques individuelles et collectives dans ce qui est sans doute un domaine assez complexe de l'expérience humaine, celui du comportement humain en situation d'urgence. Ainsi, les déterminants psychologiques capturés sur la base des discussions avec des psychologues, d'enquêtes de terrain et de simulations ont été traduits en systèmes relativement simples d'équations différentielles ordinaires non linéaires. Cet effort s'est déroulé en deux étapes successives concordant au développement de deux modèles : le modèle PCR puis le modèle APC. Tous les deux ont été étudiés sous leur forme adimensionnelle. Pour ces deux modèles, nous nous sommes essentiellement concentrés sur un événement unique même si dans les premiers travaux sur le modèle PCR, nous avons intégré un processus d'enchaînement de catastrophes dans les transitions entre les trois états paniqués, contrôlés et réflexes.

La difficulté dans ces projets a été de valider les modèles mathématiques étant donné la difficulté de récupérer les données sur le terrain. Toutefois, pour le modèle APC, des connaissances des thématiciens, nous avons pu donner un ordre de grandeur des paramètres. Puis, nous avons travaillé sur une expérience de réalité virtuelle réalisée en lieu clos et contrôlé au Laboratoire de Psychologie des Pays de la Loire (Nantes) en 2020. Elle s'appuie sur un scénario, celui de l'arrivée d'une vague de tsunami d'origine sismique sur une plage de Nice [19]. Ce scénario est désormais intégré en France dans les outils réglementaires nationaux. L'étude portait plus spécifiquement sur l'analyse des réactions psychologiques, comportementales et physiologiques (mesures physiologiques du stress) des participants volontaires. Le scénario intégrait également des personnages virtuels (avatars) afin d'observer les réactions dans un contexte d'interaction sociale (entre la personne volontaire et les personnages virtuels). Le calage des données topographiques de la plage (largeur de la plage, présence d'escaliers, de galets, rambardes d'accès etc...) a été réalisé par des mesures précises réalisées durant les enquêtes de terrain à Nice [205]. Actuellement, nous ne disposons pas de données pour confronter et apprécier la différence entre réalité et réalité virtuelle. Cependant, dans les expériences de réalité virtuelle (RV) faites dans d'autres domaines des sciences humaines et sociales, il y a une bonne validité écologique, c'est-à-dire que les réactions humaines sont similaires entre la réalité et les expériences de RV comme expliqué dans [118]. Ce modèle ouvre de nouvelles perspectives dans la compréhension et la modélisation des comportements en situation de catastrophe comme nous le verrons dans la suite.

Modèles dynamiques

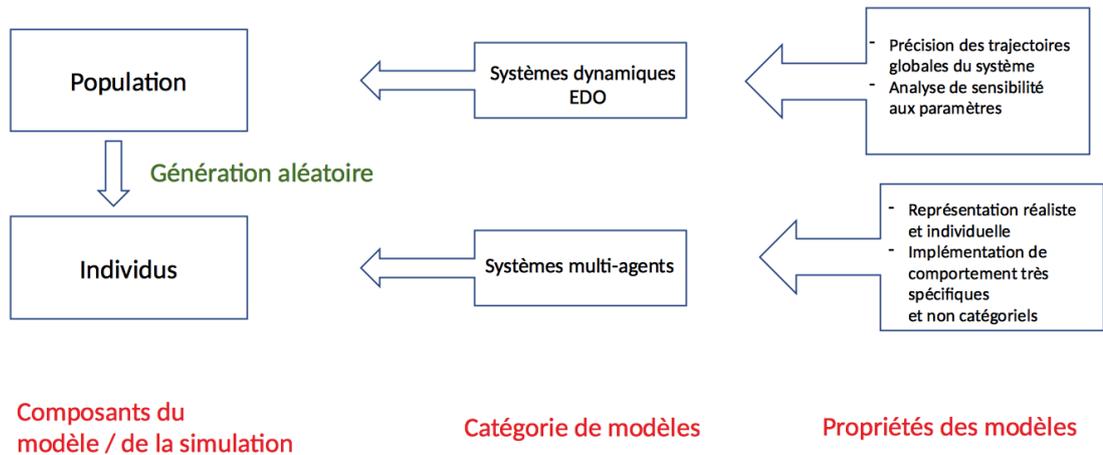


FIGURE 5.1 – Analyse et comparaison des deux approches de modélisation comportementale basée, soit sur des descriptions individuelles conduisant à des systèmes multi-agents (bas de la figure), soit sur des description de populations conduisant à des systèmes dynamiques (haut de la figure). L’approche à base d’agents nécessite une génération d’individus avec une part d’aléatoire puisqu’on ne peut se référer à des connaissances ou données qu’à l’échelle des populations (C. Bertelle, 2021)

5.1 Pourquoi avons nous choisi la modélisation macroscopique à base d’EDOs ?

Deux échelles de modèles sont envisageables pour représenter les dynamiques et les interactions comportementales : au niveau individuel (approche micro utilisant généralement des modèles à base d’agents) et au niveau collectif (approche macro utilisant généralement des modèles à base de systèmes dynamiques) (voir Figure 5.1).

Dans la première phase de projet, deux points essentiels nous ont amenés à choisir la modélisation à base de systèmes dynamiques au détriment des modèles micro ou agent. Tout d’abord, dans les modèles micro ou agent, il est nécessaire d’introduire une part d’aléatoire dans les comportements des individus ; l’attribution individuelle des comportements est parfois difficile à justifier scientifiquement. Ces modèles, qui donnent l’apparence d’une grande précision, conduisent à un très grand nombre de degrés de liberté empêchant tout contrôle des dynamiques afin de comprendre les processus qui les génèrent. Ensuite, l’un des objectifs du projet était le développement d’une plateforme web cartographique de simulation des réactions humaines destinée à la communauté scientifique mais aussi aux professionnels en charge de la sécurité et sûreté des citoyens. Or, les politiques et notamment des politiques du risque souhaitent gérer et réguler les situations au niveau collectif et non de contrôler chaque individu. Ils agissent à une échelle macroscopique, celle de la population dans son intégralité. En raison de ces limites, nous n’avons pas retenu la modélisation à base d’agents mais une modélisation à base de systèmes dynamiques. Ces derniers permettent d’intégrer les connaissances que l’on a sur les propriétés collectives d’une population et sur le(s) processus(s). De plus, le paramétrage est bien adapté à la gestion des dynamiques comportementales collectives en situation de catastrophe. Par exemple, il suffit de modifier de façon continue un paramètre jugé important, comme celui de la culture du risque, pour en déduire comment varie la dynamique des comportements humains collectifs. Ces modèles sont donc intégrateurs de connaissances. Ils peuvent donner une aide à la formation dans une situation d’urgence et permettre de mieux comprendre le comportement émotionnel d’un groupe d’individus conduisant entre autres à des effets de panique.

5.2 Le modèle Panic-Control-Reflex (PCR)

Cette partie reprend des travaux [30, 32, 33, 164, 193, 199] est le fruit d'un travail en commun avec Guillaume Cantin, des géographes (Damienne Provitolo, Edwige Dubos-Paillard et Anne Tricot), des mathématiciens (Valentina Lanza, Moulay Aziz Alaoui) et des informaticiens (Rodolphe Charrier, Cyrille Bertelle).

5.2.1 D'une typologie des comportements au modèle mathématique

Dans ces projets, nous avons fait abstraction des dynamiques de déplacements collectifs [35, 47, 93, 130, 186, 223] et nous nous sommes focalisés sur des aspects souvent moins détaillés dans les modèles présents dans la littérature. Ces aspects correspondent à la modélisation des états comportementaux, leurs évolutions dans une situation de catastrophe et les phénomènes de propagation sociale de ces états. En effet, la plupart des modèles mathématiques font référence seulement aux paniques collectives [70, 106, 155] car ces réactions sont plus facilement observables et retranscrites tant lors de catastrophes naturelles, technologiques que sanitaires [52, 85, 94, 163, 165]. À une époque où les politiques et responsables territoriaux sont juridiquement responsables des incidents que peuvent provoquer la gestion de foules et des grands rassemblements, ces réactions de panique sont d'autant plus craintes par les acteurs en charge de la gestion des catastrophes. En effet, ils ne peuvent pas facilement les contrôler car elles se déclenchent et se diffusent comme un "feu de paille". Ces comportements collectifs de panique ne sont pas uniquement une réaction à une situation critique mais ils peuvent être l'origine de la dangerosité d'une situation qui aurait pu être contrôlée avec un comportement adapté comme lors de la panique au stade Heysel en 1985 ou lors des rassemblements à la Mecque, notamment sur le pont Djamarat en 2015. Pour décrire de manière plus précise ces comportements collectifs, les seules comportements de panique ne sont pas suffisants.

Des comportements contrôlés sont également relatés [68, 133, 153] : certains illustrent des réactions statiques comme l'immobilité ; d'autres des réactions dynamiques comme la fuite réfléchie, l'éloignement ou encore l'entraide [69, 78, 166]. Enfin, les recherches en psychologie et en neurosciences ont pu enseigner que l'être humain restait rarement figé dans un même état comportemental mais exprimait un enchaînement de réactions du début à la fin d'une catastrophe.

Provitolo et al. [164] ont proposé une typologie des comportements humains dans les zones impactées par un événement catastrophique. Cette typologie est basée sur les zones cérébrales impliquées dans la réponse comportementale mais également durant les phases temporelles de l'événement et ses alertes. Dans une zone impactée, deux catégories de comportements ont été décrites selon la zone cérébrale impliquée :

- la zone reptilienne du cerveau, le centre de nos instincts et la base de nos émotions. Il est la source des comportements instinctifs qui induisent des comportements impulsifs et d'urgence ;
- la zone préfrontale du cerveau qui conduit à des comportements contrôlés. Il adapte de manière plus réfléchie les réactions aux stimuli extérieurs.

La première catégorie regroupe les comportements d'évasion et de panique, mais aussi les comportements comme la sidération et les comportements d'automate [52]. Ce mécanisme permet aux gens de réagir rapidement soit en s'enfuyant le plus vite possible, soit en étant sidérés et en étant physiquement incapables de se déplacer dans l'espace. La deuxième catégorie concerne les comportements calmes et de maîtrise de soi.

Dans ce premier modèle mathématique, nous avons décidé de distinguer trois types de comportements différents en situation de catastrophe soudaine : deux faisant partie de la première catégorie et un faisant partie de la seconde. Malgré la diversité des comportements réflexes, nous avons décidé de les diviser en deux types.

- les comportements réflexes hors panique (sidération et comportements d'automates).
- les réactions de panique puisqu'elles ont un statut particulier dans les comportements réflexes.

Le comportement de panique a été différencié car il est le plus redouté : il peut provoquer des situations dangereuses dans une foule, dues au piétinement et à l'écrasement et peut provoquer des décès. De plus, il est difficile de stopper ce mécanisme une fois enclenché puisque il est plus lié à des dynamiques internes qu'à l'éloignement du danger [52]. On peut noter que ce comportement n'est pas toujours adopté comme, par exemple, lors d'un tremblement de terre au Japon, un pays où la population est formée pour réagir de façon adéquate en cas de catastrophe.

Enfin, puisque le cortex préfrontal s'empare du cerveau reptilien, le troisième type de comportement envisagé regroupe l'ensemble des réactions contrôlées, intelligentes et raisonnées. Ils peuvent prendre différentes formes lors d'une catastrophe, comme par exemple l'évacuation ou la fuite, le confinement, la mise à l'abri, la recherche de secours, le pillage, le vol, etc... Malgré leur variété, nous avons décidé de les globaliser.

Il faut bien noter qu'automatisme ne veut pas dire irrationalité. Le fait qu'une réaction soit automatique, instinctive, n'indique pas qu'elle soit irrationnelle, inadaptée ou erronée. Le même constat s'applique pour les comportements contrôlés, ces derniers n'étant pas systématiquement adaptés à la situation.

Les trois comportements précédents ne se produisent pas tous en même temps et respectent un certain ordre. En effet, le premier comportement d'un individu face au danger est un comportement réflexe, suivi dans un

second temps, d'un comportement contrôlé ou paniqué [83].

Cette catégorisation de ces comportements et leurs interactions a conduit à la création du modèle PCR (Panic-Control-Reflex) qui est décrit de façon plus précise à la section suivante.

5.2.2 Le modèle mathématique PCR et ses applications

Soit la classe Q composée d'individus dans un comportement du quotidien. On suppose qu'il n'y a pas de naissance ou de décès au cours de la catastrophe. La population est donc constante et est composée de N individus. Ainsi, on note

- $Q(t)$ le nombre d'individus ayant un comportement du quotidien avant que la catastrophe commence, donc $Q(0) = N$,
- $B(t)$ le nombre d'individus revenus à un comportement du quotidien durant ou après la catastrophe. Nous supposons qu'à la fin de la catastrophe, tous les individus sont dans ce comportement, donc $B(t_{end}) = N$.

D'après la section précédente, la population est décomposée en 3 sous-populations lors de la catastrophe, d'où les variables :

- $R(t)$ = nombre de personnes dans un comportement réflexe,
- $C(t)$ = nombre de personnes dans un comportement contrôlé,
- $P(t)$ = nombre de personnes dans un comportement paniqué.

Puisque nous supposons être en présence d'un événement soudain et imprévisible, toute la population concernée aura d'abord un comportement réflexe, correspondant à des comportements instinctifs. Ainsi, les comportements routiniers, représentés ici avec la variable $Q(t)$, ne peuvent être transformés qu'en comportements réflexes. Par la suite, les comportements réflexes peuvent devenir des comportements contrôlés ou paniqués. Puisque $B(t)$ représente le nombre d'individus qui reviennent à un mode de vie normal, il ne peut être alimenté que par les comportements contrôlés $C(t)$. En effet, un individu a besoin de reprendre le contrôle de soi afin de retrouver la routine quotidienne. De plus, nous supposons qu'une fois revenu à la normale, il reste dans leurs comportements habituels. Ainsi, les individus dans B ne peuvent pas passer dans Q et rentrer dans la boucle.

Selon les psychologues et les géographes [24, 52, 91, 164], lors d'événements catastrophiques, les individus ne restent pas dans le même état comportemental. Des transitions, récurrentes à chaque catastrophe, ont lieu entre ces sous-populations : les processus de causalité (B_1, B_2, C_1, C_2) et les processus d'imitation et de contagion ($\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$) qui seront expliqués dans la suite. Ces états comportementaux et ces processus sont représentés à la figure 5.2. L'événement extérieur, c'est à dire la catastrophe est représentée par la fonction γ

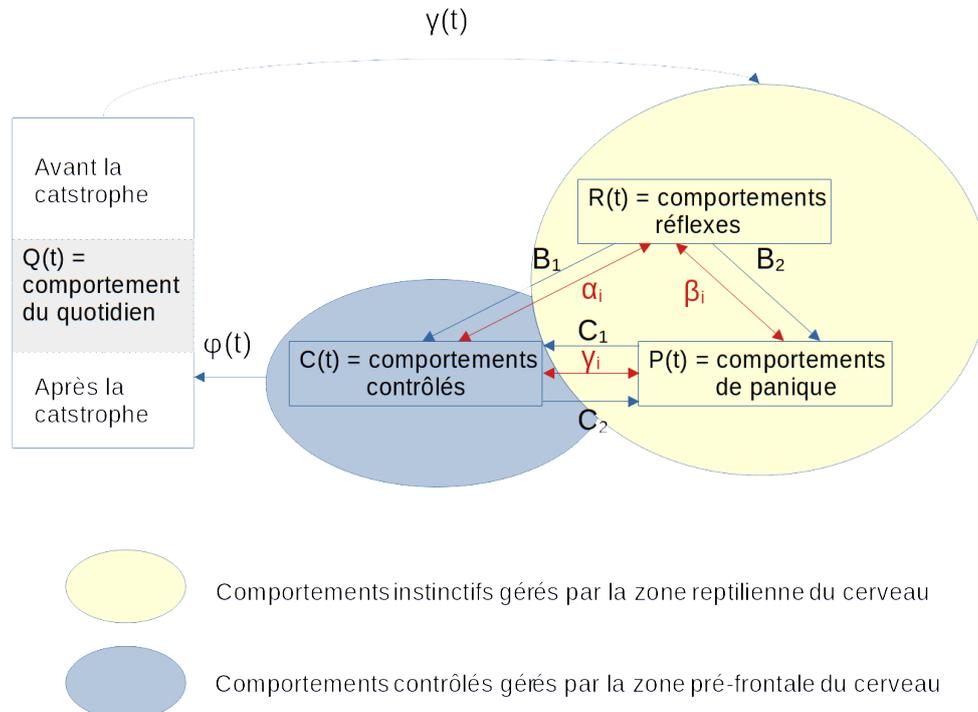


FIGURE 5.2 – Graphe modélisant les trois types de comportements humains dans un contexte de catastrophe

qui peut être une fonction discrète ou continue selon le type de catastrophe. Par exemple, un événement tels

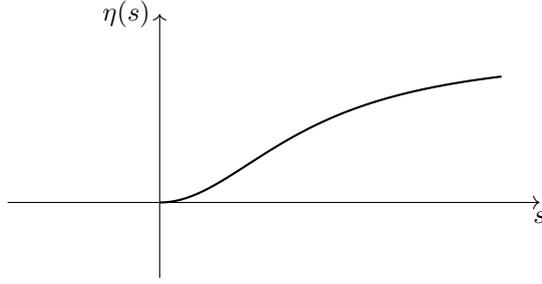


FIGURE 5.3 – Représentation de la fonction η

qu'un tsunami peut être modélisé par une fonction discrète alors qu'une inondation peut-être modélisée par une fonction continue puisqu'elle peut-être annoncée quelques heures avant son début. La fonction φ modélise le retour au comportement du quotidien des personnes en comportement de contrôle.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dR}{dt} = \gamma(t)Q \left(1 - \frac{R}{N}\right) - (B_1 + B_2)R + \tilde{F}(R, C) \frac{R}{N}C + \tilde{G}(R, P) \frac{R}{N}P, \\ \frac{dC}{dt} = B_1R + C_1P - C_2C - \tilde{F}(R, C) \frac{R}{N}C + \tilde{H}(C, P) \frac{C}{N}P - \varphi(t)C \left(1 - \frac{B}{N}\right), \\ \frac{dP}{dt} = B_2R - C_1P + C_2C - \tilde{G}(R, P) \frac{R}{N}P - \tilde{H}(C, P) \frac{C}{N}P, \\ \frac{dQ}{dt} = -\gamma(t)Q \left(1 - \frac{R}{N}\right), \quad \frac{dB}{dt} = \varphi(t)C \left(1 - \frac{B}{N}\right). \end{array} \right. \quad (5.1)$$

La population est supposée constante, c'est à dire : $N = R + C + P + Q + B$.
Les fonctions d'imitation sont définies de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{F}(R, C) = -\alpha_1 \eta \left(\frac{R}{C + \varepsilon} \right) + \alpha_2 \eta \left(\frac{C}{R + \varepsilon} \right) \\ \tilde{G}(R, P) = -\beta_1 \eta \left(\frac{R}{P + \varepsilon} \right) + \beta_2 \eta \left(\frac{P}{R + \varepsilon} \right) \\ \tilde{H}(C, P) = -\gamma_1 \eta \left(\frac{C}{P + \varepsilon} \right) + \gamma_2 \eta \left(\frac{P}{C + \varepsilon} \right). \end{array} \right. \quad (5.2)$$

où $\alpha_i > 0, \beta_i > 0, \gamma_i > 0, i = 1, 2, 0 < \varepsilon \ll 1$ et $\eta(s) = \frac{s^2}{1 + s^2}$.

Les fonctions décrivant le processus d'imitation entre deux comportements distincts dépendent de la proportion d'individus dans chacun des comportements. En particulier, la fonction d'imitation \tilde{H} décrit une imitation qui peut se faire entre les P et C mais également entre les C et P . Selon les valeurs des paramètres γ_1 et γ_2 , elle peut décrire la loi du plus fort. En effet, lorsque la valeur de s est petite, celle de $\eta(s)$ l'est également (voir la figure 5.3). Ainsi, s'il y a peu de contrôlés et beaucoup de paniqués, le ratio $C/(P + e)$ est petit et le ratio $P/(C + e)$ est grand. On en déduit d'après la forme de la courbe η que le terme $\eta(C/(P + e))$ est petit par rapport à $\eta(P/(C + e))$. Cela signifie que si γ_1 et γ_2 sont égaux, peu de personnes en état de panique imiteront les comportements contrôlés alors que beaucoup de personnes en état de contrôle imiteront les paniqués et ceci dans une proportion γ_1 .

Le paramètre ε est un paramètre qui modélise le début du processus d'interaction dû à l'imitation qui ne se produit que pour une certaine valeur des sous-populations R et C .

Par la suite, nous avons a-dimensionné le système qui s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dr}{dt} = \gamma(t)q(1-r) - (B_1 + B_2)r + F(r,c)rc + G(r,p)rp, \\ \frac{dc}{dt} = B_1r + C_1p - C_2c - F(r,c)rc + H(c,p)cp - \varphi(t)c(1-b), \\ \frac{dp}{dt} = B_2r - C_1p + C_2c - G(r,p)rp - H(c,p)cp, \\ \frac{dq}{dt} = -\gamma(t)q(1-r), \quad \frac{db}{dt} = \varphi(t)c(1-q) \end{array} \right. \quad (5.3)$$

avec

- $q(t)$ = densité de personnes ayant un comportement du quotidien avant que la catastrophe commence, donc $q(0) = 1$
- $b(t)$ = densité de personnes qui sont revenues à un comportement du quotidien durant ou après la catastrophe
- $r(t)$ = densité de personnes dans un comportement réflexe
- $c(t)$ = densité de personnes dans un comportement contrôlé
- $p(t)$ = densité de personnes dans un comportement paniqué.

et

$$\left\{ \begin{array}{l} F(r, c) = -\alpha_1\eta \left(\frac{r}{c+\varepsilon} \right) + \alpha_2\eta \left(\frac{c}{r+\varepsilon} \right) \\ G(r, p) = -\beta_1\eta \left(\frac{r}{p+\varepsilon} \right) + \beta_2\eta \left(\frac{p}{r+\varepsilon} \right) \\ H(c, p) = -\gamma_1\eta \left(\frac{c}{p+\varepsilon} \right) + \gamma_2\eta \left(\frac{p}{c+\varepsilon} \right). \end{array} \right. \quad (5.4)$$

La population étant supposée constante, le système se ramène à l'étude d'un système de dimension 4 dont les variables sont (r, c, p, q) . En posant $u = (r, c, p, q)^T$ et en introduisant l'opérateur $\phi(u, t) = (\phi_i(u, t))_{1 \leq i \leq 4}$, le système (5.3) se ré-écrit

$$\frac{du}{dt} = \phi(u, t), \quad t \geq t_0. \quad (5.5)$$

À ce système est ajouté la condition initiale $u_0 = (0, 0, 0, 1)$.

Les paramètres du système (5.3) sont regroupés dans le vecteur $\lambda = (B_1, B_2, C_1, C_2, \alpha_1, \alpha_2, \delta_1, \delta_2, \mu_1, \mu_2)$ dont le domaine est donné par $\Lambda = (\mathbb{R}^{+*})^2 \times (\mathbb{R}^+)^{10}$.

Pour toute valeur du paramètre $\lambda \in \Lambda$, et pour toute condition initiale $u_0 \in (\mathbb{R}^+)^5$, il existe $T > t_0$ tel que le problème (5.3) possède une unique solution locale u définie et continûment dérivable sur $[t_0, T]$ dont les composantes sont positives. De plus, l'ensemble compact $\kappa = \{r, c, p, q, b\} \in (\mathbb{R}^+)^4; r + c + p + q + b \leq 1\}$ est positivement invariant pour le flot induit par le problème (5.5) et les solutions sont globales.

Exemple de fonctions γ et φ prises dans les simulations :

Dans le cas d'une catastrophe soudaine, comme un tsunami local, on a supposé que la population commençait à être informée rapidement c'est-à-dire après 1 minute, et que toute la population concernée était informée dans les 3 minutes suivantes, d'où la forme de la fonction γ présentée à la figure 5.4. Le retour au quotidien correspondant à la fonction φ , ne peut pas être immédiat. Nous avons supposé qu'il se faisait au bout de 5 minutes après le début de la catastrophe. Ce retour est supposé se faire très lentement, ce qui nous a amené à considérer la fonction φ comme à la figure 5.4. La forme des courbes peut être modulée selon le type d'événement catastrophique (selon qu'il soit annoncé ou non).

Remarque 29. *Il a été difficile de calibrer ce modèle car peu de données ont été trouvées dans la littérature. S. Boyd [24] estime que dans la plupart des catastrophes : "15% des individus manifestent des réactions pathologiques patentes, 15% conservent leur sang froid et 70% manifesteraient un comportement apparemment calme mais répondant en fait à un certain degré de sidération émotionnelle et de perte d'initiative qui relève du registre pathologique". Un rapport de l'ingénierie de la sécurité incendie [1] estime que 10 à 15% de personnes ont des comportements anormaux ou présentant des états confusionnels, de 12 à 25% réagissent correctement et 75% des personnes sont pétrifiées, inhibées ou hébétées. Enfin, J.S. Tyhurst [190] fait état, en situation exceptionnelle, de 10 à 25% d'individus qui présentent des comportements inadaptés, 12 à 25% qui réagissent de façon adaptée,*

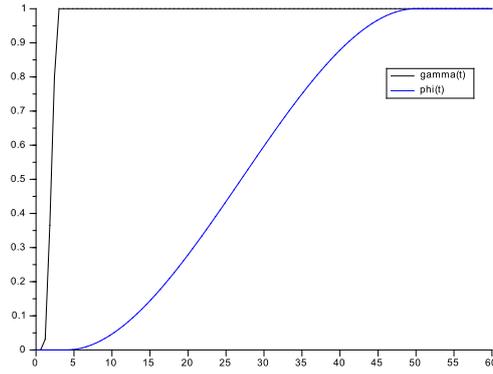


FIGURE 5.4 – Fonctions φ et γ

et 75% qui ont une réaction apparemment normale mais dans la réalité non réfléchie. Ces différentes sources révèlent une diversité des comportements. Nous avons opté pour la fourchette [164, 194]

- $r(t)=50$ à 75% de la population
- $c(t)=12$ à 25% de la population
- $p(t)=12$ à 25% de la population.

Ces pourcentages ont été une des justification pour notre choix de travailler avec le système a-dimensionné. Ces différentes réactions sont de durée variable [206], avec :

- $r(t)$: la durée du comportement réflexe varie de quelques minutes à 1 heure. Le plus souvent ce type de comportement ne dépasse pas 15 minutes. Mais il peut durer plus longtemps notamment lorsqu'il correspond au délai d'évacuation d'une région sinistrée. Dans ce cas on voit alors réapparaître progressivement un retour aux comportements d'entraide et de recherche des proches et des sinistrés [52].
- $p(t)$: la durée du comportement de panique varie de quelques minutes à 1 heure. Le plus souvent ce type de comportement ne dépasse pas 15 minutes. La panique collective se résout généralement spontanément. Cependant, parfois une intervention énergique extérieure permet à la population paniquée $p(t)$ de retrouver un état calme, de prostration, ce qui explique que cette dernière repasse par un comportement d'automate $r(t)$ avant d'adopter un comportement contrôlé $c(t)$.
- $r(t)+p(t)$: la durée du comportement émotionnel non contrôlé ne dure pas plus d'1h30 en général. Dans le cadre de ce modèle, nous partons en effet de l'hypothèse qu'un individu ne peut pas rester 1 heure dans un comportement réflexe et encore 1 heure dans un état de panique.
- $c(t)$: la durée du comportement contrôlé varie de quelques minutes à plusieurs heures, selon la rapidité et l'efficacité des acteurs institutionnels.

Lors des simulations, les paramètres du modèle ont été choisis pour que ces conditions soient vérifiées. Le paramètre C_1 a un rôle particulier dans le système. La linéarisation du système PCR conduit à une valeur propre nulle. Cette stabilité est fortement liée à une bifurcation qui a lieu quand C_1 s'annule. La proposition suivante résume les résultats sur les points d'équilibre et leur nature [32].

Proposition 24. — Si $C_1 > 0$, alors le système (5.3) admet $\mathcal{O} = (0, 0, 0, 0)$ comme unique point d'équilibre.
 — Si $C_1 = 0$ alors le système admet tout point $(0, 0, \bar{p}, 0)$ avec $\bar{p} > 0$ comme point d'équilibre, en plus de \mathcal{O} . Par la suite, cette valeur critique sera appelée persistance de panique.
 — Le point d'équilibre \mathcal{O} est localement stable pour toute valeur de $\lambda \in \Lambda$ mais pas globalement stable.

Le dernier point a été montré en étudiant la fonction de Lyapunov correspondant à l'énergie liée au potentiel démographique de la population affectée par l'événement catastrophique étudié. Ainsi, le système admet deux classes de solutions, selon si la valeur du paramètre d'évolution C_1 du comportement de panique au comportement de contrôle est positive ou nulle. Dans le premier cas, c'est-à-dire $C_1 > 0$, la solution converge vers l'équilibre trivial, ce qui correspond à la situation attendue lorsque tous les individus reprennent un comportement du quotidien. Dans le deuxième cas, lorsque $C_1 = 0$, le système présente une persistance de panique, qui est la situation à éviter, au risque d'aggraver l'impact de l'événement catastrophique. Dans ce dernier cas, nous avons montré que les termes d'imitation quadratique peuvent inhiber ou exacerber la persistance de la panique, selon la direction du processus d'imitation de la panique au contrôle ou du contrôle à la panique, respectivement. Dans [194], nous avons traité l'exemple d'un tremblement de terre au Japon. Puisqu'au Japon, la culture du risque est bien établie, la population est entraînée à réagir rapidement. Ainsi, les processus de causalité de l'état

de réflexe et de l'état de panique à l'état de contrôle sont plus importants par rapport aux autres processus, même pour une zone définie à l'épicentre du tremblement de terre.

La prise en compte du relief géographique de la zone impactée par la catastrophe conduit naturellement à l'étude des réseaux. Des questions spécifiques se posent dans l'étude des systèmes complexes définis par de tels réseaux couplés, parmi lesquels la "synchronisation" ou la relation entre la topologie du réseau et la dynamique du système. Dans l'article de conférence [33], un exemple concernant le risque particulier de tsunami sur le littoral méditerranéen a été étudié. Le découpage géographique a été fait avec Damien Provitolo et Edwige Dubos-Paillard, le scénario choisi étant celui d'un tsunami à Nice. À la figure 5.5 est représenté le découpage géographique de la plage de Nice et la promenade des anglais. Le couplage entre les différents noeuds est donné à la figure 5.6. Mathématiquement, les zones géographiques ont été définies selon la valeur du paramètre de bifurcation C_1 . Une zone de danger est modélisée avec la valeur de paramètre $C_1 = 0$ et une zone de sécurité par $C_1 > 0$.

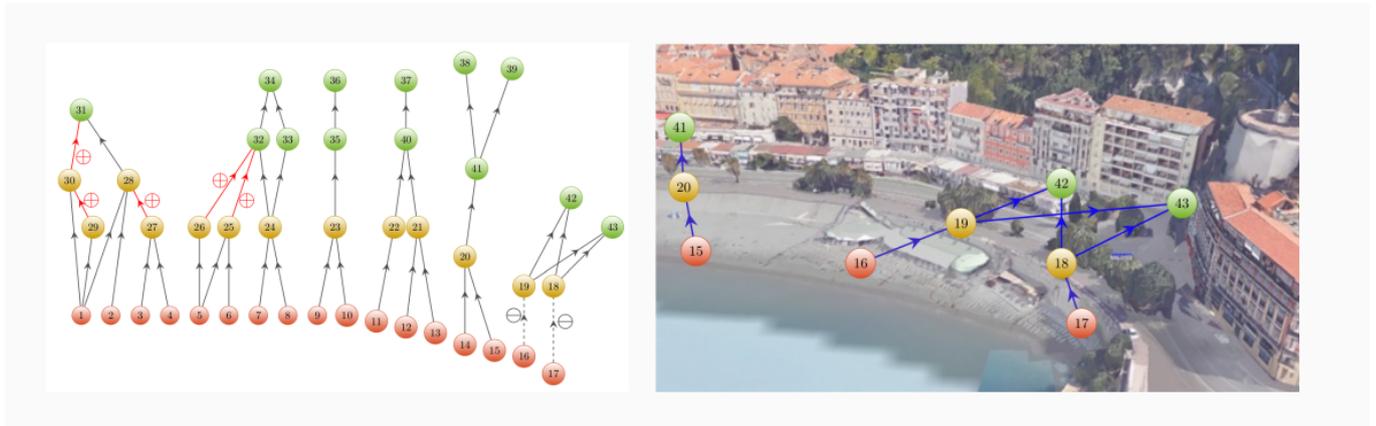


FIGURE 5.5 – Simulation d'un tsunami sur la côte méditerranéenne. En rouge, la zone de danger, en jaune la promenade des anglais, en vert, l'intérieur de la ville qui correspond à une zone de sécurité. Les arêtes entre les noeuds représentent les déplacements possibles des individus.

Nous avons montré dans ce dernier article que l'évacuation des zones à risques correspondant aux plages, vers les zones refuges situées en centre-ville, joue un rôle déterminant. Par exemple, un couloir bouché peut provoquer une persistance de la panique. À l'opposé, un chemin d'évacuation supplémentaire de la plage vers le centre-ville peut aider les individus à reprendre leur comportement du quotidien. Dans [29], ces modèles ont été généralisés à des réseaux quelconques.

5.3 Le modèle Alert-Panic-Control (APC)

Cette partie est la suite du travail présenté à la section 5.2 qui a conduit au projet ANR Com2SiCa (<https://www.com2sica.cnrs.fr/>). Il reprend les articles [121, 201]. L'enjeu du projet était

1. en s'appuyant sur les connaissances des psychologues, avoir une meilleure connaissance de la diversité des comportements, la dynamique temporelle propre à chacun d'entre eux mais aussi les changements d'états comportementaux, c'est-à-dire le fait d'enchaîner plusieurs réactions pour faire face à un évènement catastrophique
2. de développer un modèle mathématique incluant ces connaissances
3. de développer une plate-forme pour l'analyse et la simulation comportementale des populations urbaines en situation de catastrophe.

Le modèle PCR (Panic-Control-Reflex) est basé sur les sciences cognitives et la modélisation mathématique des maladies infectieuses. Il décrit la dynamique des différents comportements lors d'événements catastrophiques. Ce modèle ne se focalise pas uniquement sur la panique, mais présente une analyse et une classification précise des comportements en fonction des différentes régions cérébrales activées et des différentes transitions comportementale. Toutefois, cette approche est basée sur les neurosciences et peut être insuffisante pour décrire les interactions sociales intervenant dans les évolutions comportementales. C'est dans cette optique que des psychologues ont été intégrés au projet. Leur contribution a permis d'intégrer dans la modélisation des populations

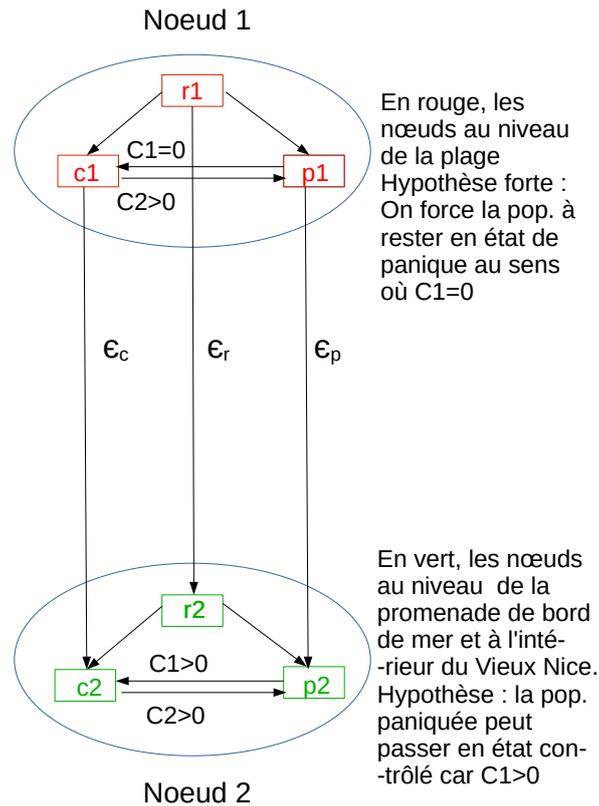


FIGURE 5.6 – Représentation graphique du couplage linéaire. Chaque personne reste dans son état comportemental d'un noeud à un autre. Les forces de couplage ϵ traduisent l'intensité du flux et leurs valeurs dépendent du comportement.

en situation de catastrophe *la cognition et la contagion sociale*¹ [77, 79] qui ont été appréhendées sous l'angle de la charge et la régulation émotionnelle [143]. Cette approche a permis de formaliser le modèle mathématique que l'on notera par la suite APC (Alert-Panic-Control). Celui-ci a été construit et enrichi suite à des

- Analyses de vidéos,
- Focus groupes avec des acteurs institutionnels et opérationnels intervenant sur les scènes de catastrophes (attentats, guerres, catastrophes naturelles, industrielles, etc.)²
- Entretiens immersifs auprès de la population sur des lieux réels, à Nice au mois de septembre 2018 et au Havre au mois de mai 2019 (45 minutes d'entretien individuel, totalisant 60 personnes enquêtées sur les 2 terrains). Ces protocoles ont permis d'immerger les participants dans une ambiance sonore et visuelle (un scénario de tsunami d'origine sismique à Nice, un scénario d'accident technologique au Havre), d'observer, enregistrer et identifier sur les deux terrains d'enquête leurs réactions comportementales, de cartographier les dynamiques de déplacements empruntées par les personnes pour sortir de la situation imaginée ou projetée, de mesurer sur une échelle qualitative la charge émotionnelle de chaque enquêtés [116].

L'ensemble des traitements réalisés sur ces différents corpus a permis de produire des données qualitatives, quantitatives et spatialisées utiles à la modélisation mathématique et notamment sur les types de comportements, les changements d'états comportementaux et les cartographies des trajectoires de déplacement [120, 119]. Ces données ont pu être exploitées pour préciser le modèle APC.

1. La *cognition sociale* désigne l'ensemble des processus cognitifs impliqués dans les interactions sociales. La *contagion sociale* signifie qu'un grand nombre de personnes et pas seulement un individu imitent le comportement dominant par comparaison sociale. Le modèle dominant de comportement va ainsi se propager d'une personne à une autre, un peu comme s'il s'agissait d'un virus.

2. Le Service départemental d'Incendie et de Secours des Alpes-Maritimes, la Préfecture des Alpes-Maritimes, la Direction Départementale des Territoires et de la Mer des Alpes - Maritimes, la Brigade des Sapeurs-Pompiers de Paris, la Police Nationale, la Police Municipale de Nice, l'Agence Régionale de la Santé, la Métropole Nice Côte d'Azur et la ville de Nice pour la Direction des Risques Majeurs, la Communauté Urbaine le Havre Seine Métropole pour la Direction des Risques Majeurs, l'Union Nationale des Centres Communaux d'Action Sociale

5.3.1 Catégories comportementales

Pour qualifier et catégoriser la diversité des comportements humains³ deux variables importantes en psychologie des émotions ont été utilisées : la charge ou l'intensité émotionnelle (niveau de stress, nervosité, peur, etc.) et la régulation émotionnelle (la capacité des personnes à contrôler cette charge).

Ce croisement de variables a permis de qualifier les réponses ou les comportements dans des situations de catastrophe dans un éventail plus large que le seul comportement de panique (Figure 5.7). Ainsi, trois états comportementaux ont été dégagés :

- Les états d'alerte (A) désignent un ensemble de micro-comportements observables d'un point de vue moteur (sursaut, mouvement oculaire rapide, interrogation du regard/visuelle ou verbale des personnes proches). L'état d'alerte correspond à une phase d'assimilation, il marque une rupture avec le comportement habituel : un moment où la personne va rechercher dans un temps très court de l'information sur le scénario qu'elle est en train de vivre. En état d'alerte, la personne est en état d'incertitude, la charge émotionnelle est faible même s'il peut y avoir des signaux corporels marquant cette rupture avec le comportement quotidien, comme par exemple l'augmentation du rythme cardiaque.
- Les états ou comportements de contrôle (C) sont des comportements réfléchis qui désignent un ensemble de réactions dont la charge émotionnelle, plus ou moins forte, est régulée. Les comportements de contrôle sont divers : ils peuvent désigner des comportements pro-sociaux (entraide, protection, soin d'autrui) mais également des comportements anti-sociaux (vols, pillages, voyeurisme etc.). En d'autres termes, la notion de contrôle désigne le fait que la personne est capable de réguler ses émotions, d'agir et adapter son comportement au contexte de crise. Toutefois, cela ne veut pas dire que le comportement assure la sécurité de la personne ou sa survie, ni qu'il est vertueux, social ou exemplaire au regard d'une norme sociale.
- L'ensemble des comportements de panique (P) désigne des comportements non contrôlés où les émotions liées à la peur ont pris le dessus. Un comportement de panique implique une charge émotionnelle forte et une régulation faible, peu efficace pour retrouver un état contrôlé. Différents comportements peuvent signifier un état de panique : fuite panique, stupeur, agitation désordonnée [52].

L'intensité de la charge et de la régulation émotionnelle a donc permis de qualifier ces états, selon l'approche suivante :

- États d'alerte : une charge émotionnelle faible et une régulation émotionnelle faible.
- États de contrôle : une charge émotionnelle faible ou forte et une régulation émotionnelle forte.
- États de panique : une charge émotionnelle forte et une régulation émotionnelle faible.

Ces trois ensembles de comportements Alertés, Paniqués et Contrôlés donnent lieu à différentes intensités de charges émotionnelles et sont indépendantes du type de catastrophe. Il est à noter qu'ils peuvent être différenciés par des mesures physiologiques (voir [3] pour la détection du stress dans le cas d'un travail informatique). Par exemple, la panique provoque une augmentation significative du rythme cardiaque et de la transpiration contrairement aux comportements d'alerte.

3. Plus de 60 comportements humains ont été identifiés[176].

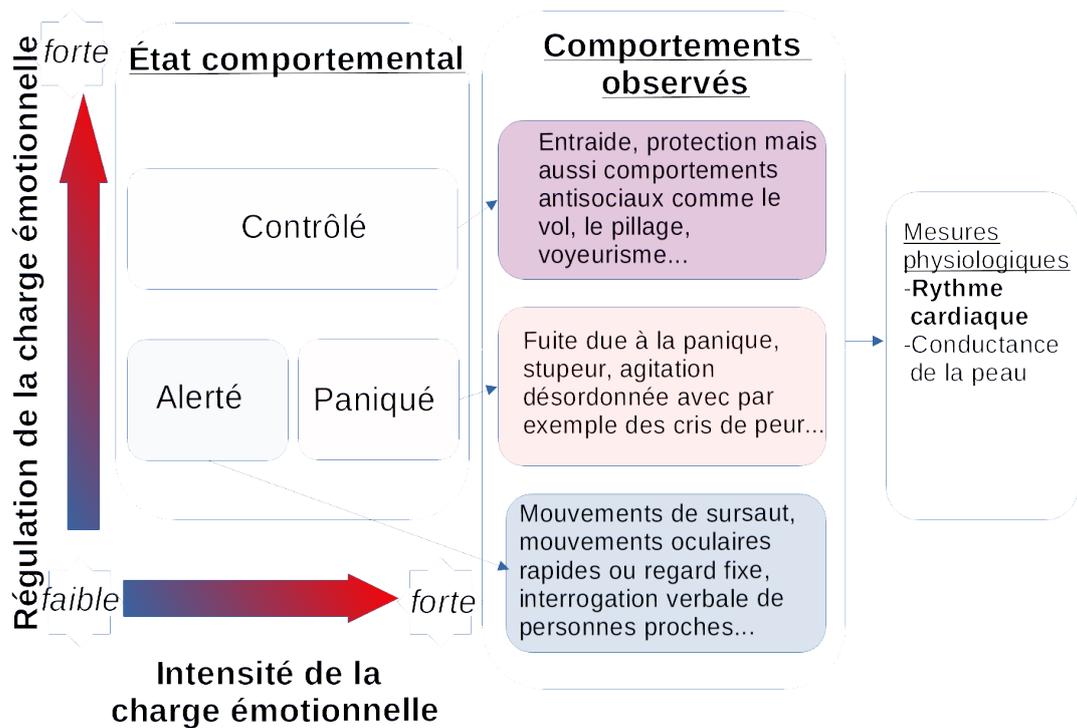


FIGURE 5.7 – Classification des différents comportements durant un événement catastrophique selon la charge émotionnelle et sa régulation (N. Verdière).

Il est connu qu'au cours d'une catastrophe, les personnes n'adoptent pas le même comportement et que des successions de réactions différentes peuvent être observées. Par exemple, les personnes adoptent un état d'alerte dès que la catastrophe est perçue, puis un comportement de panique ou de contrôle selon leur expérience et leur culture du risque.

Sur la base de la catégorisation proposée par les géographes et les psychologues du projet, les hypothèses thématiques suivantes ont été posées :

- Quelque soit la source d'information (aléas, cris), on passe en état d'alerte.
- L'état d'alerte peut être très rapide, il se situe le plus souvent tout au début de l'événement, cependant selon les caractéristiques de ce dernier, par exemple s'il revêt des répétitions comme dans les situations de séismes, l'état d'alerte peut revenir dans un deuxième temps, notamment après un état de contrôle, mais cela est plus rarement observé.
- C'est seulement en passant par un état de contrôle qu'on pourra retrouver un comportement pseudo-normal du quotidien, comportement qui ne peut pas être retrouvé tant qu'on est dans un état de panique.
- Même pour la panique, le pic émotionnel redescend. La panique peut donc évoluer vers le comportement d'alerte ou le comportement de panique.
- Le retour à un état d'alerte est un processus intrinsèque. Il ne peut pas se faire par imitation, et cela que l'on soit en état de panique ou en état de contrôle.
- Nous considérons les transitions comportementales selon deux processus distincts : l'agrégation d'une part, l'imitation et la propagation d'autre part. Ces processus présentés ci-après nous permettent d'étudier la dynamique comportementale :
 - ✓ les transitions intrinsèques liées aux caractéristiques individuelles (âge, expérience, culture du risque...). Les comportements vont devenir collectifs par agrégation quand il y a une synchronisation de comportements individuels au même moment sans qu'il y ait nécessairement une action de coordination volontaire ou d'interaction du collectif.
 - ✓ les transitions dues à l'imitation et la propagation qui nous permettent de comprendre l'émergence de comportements collectifs liés à l'interaction au sein d'une population ou d'une foule. Seuls les comportements de type alerte ne sont pas imitables car, de part leur nature et leur brièveté, ils ne sont pas imités par les populations en état de panique et de contrôle. Ces processus de propagation et d'imitation permettent d'étudier la diffusion des comportements dans le temps et dans l'espace.
- Malgré les entretiens et les focus group menés auprès d'une diversité d'acteurs, la connaissance des changements de comportements qui seraient liés à la présence de personnes décédées sur une scène de catastrophes est encore incertaine. C'est pourquoi, nous posons comme hypothèse qu'il n'y a pas de boucle de rétroaction de l'impact de la mortalité sur les comportements.

Dans la section suivante, je présente le modèle APC construit à partir de ces différentes hypothèses thématiques.

5.3.2 Présentation du modèle APC (Alert-Panic-Control)

Rappelons que A décrit l'ensemble des personnes en état d'alerte, C en état de contrôle et P en état de panique. De plus, les comportements du quotidien avant la catastrophe sont pris en compte (Q par la suite) ainsi que les retours au quotidien (notés B).

Le diagramme décrivant les interactions entre les différents comportements est donné à la Figure 5.8. Les transitions sont notées :

- B_i , $i = 1, \dots, 4$, et C_i , $i = 1, 2$ pour les transitions naturelles qui sont spécifiques à chaque individu selon son expérience et son passé ;
- \tilde{F} , \tilde{G} et \tilde{H} pour les transitions dues à l'imitation ou à la comparaison sociale.

Les fonctions γ et φ modélisent l'aléa et le retour au quotidien.

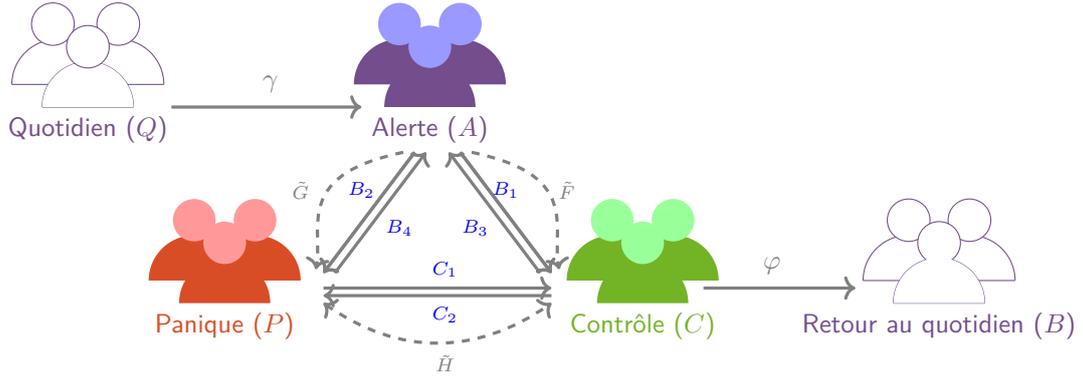


FIGURE 5.8 – Schéma du modèle APC.

De la même façon que pour le modèle PCR, le modèle APC a été ré-écrit en terme de densité (la population est supposée constante) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{da(t)}{dt} = \gamma(t)q(t) - (B_1 + B_2 + D_a)a(t) + B_3c(t) + B_4p(t) - F(a(t), c(t))a(t)c(t) - G(a(t), p(t))a(t)p(t), \\ \frac{dc(t)}{dt} = B_1a(t) + C_1p(t) - (B_3 + C_2 + D_c)c(t) + F(a(t), c(t))a(t)c(t) + H(c(t), p(t))c(t)p(t) - \varphi(t)c(t), \\ \frac{dp(t)}{dt} = B_2a(t) + C_2c(t) - (B_4 + C_1 + D_p)p(t) + G(a(t), p(t))a(t)p(t) - H(c(t), p(t))c(t)p(t), \\ \frac{dq(t)}{dt} = -\gamma(t)q(t), \quad \frac{db(t)}{dt} = \varphi(t)c(t). \end{array} \right. \quad (5.6)$$

Les fonctions d'imitation sont construites de la même façon que pour le modèle PCR, la différence provient des fonctions F et G qui sont unidirectionnelles :

$$\left\{ \begin{array}{l} F(a, c) = \alpha\eta\left(\frac{c}{a+\varepsilon}\right), \quad G(a, p) = \beta\eta\left(\frac{p}{a+\varepsilon}\right) \\ H(c, p) = -\gamma_1\eta\left(\frac{p}{c+\varepsilon}\right) + \gamma_2\eta\left(\frac{c}{p+\varepsilon}\right), \end{array} \right. \quad (5.7)$$

où $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $0 < \varepsilon \ll 1$ et $\eta(s) = \frac{s^2}{1+s^2}$ qui est représenté à la figure 5.3.

5.3.3 Une première calibration à partir des connaissances des thématiciens

Les sciences humaines disposent de très peu de données quantitatives dans ce domaine. Toutefois, il est reconnu que les phénomènes d'imitation sont le plus souvent observés dans les cas de foules denses. Ainsi, pour

TABLE 5.1 – Principales notations pour le système APC en terme de densité.

| Fonctions | Notation |
|--|--------------|
| Comportement du quotidien avant la catastrophe | $q(t)$ |
| Comportement d'Alerte | $a(t)$ |
| Comportement du Contrôle | $c(t)$ |
| Comportement de Panique | $p(t)$ |
| Comportement du quotidien après la catastrophe | $b(t)$ |
| Commencement de la catastrophe | $\gamma(t)$ |
| Retour à un comportement du quotidien | $\varphi(t)$ |
| Imitation entre alerte et contrôle | F |
| Imitation entre alerte et panique | G |
| Imitation entre panique et contrôle | H |

| Paramètres | Notation |
|---------------------------------|-----------------|
| Évolution de alerte à contrôle | B_1 |
| Évolution de alerte à panique | B_2 |
| Évolution de contrôle à alerte | B_3 |
| Évolution de panique à alerte | B_4 |
| Évolution de panique à contrôle | C_1 |
| Évolution de contrôle à panique | C_2 |
| Taux de mortalité | D_R, D_P, D_C |

ce type de population, l'accent doit être mis sur les interactions d'imitation et non sur les transitions intrinsèques. Les coefficients des fonctions d'imitation seront compris entre 0,5 et 1 et dans le cas d'une population clairsemée, ces paramètres seront inférieurs à 0,5. Dans l'hypothèse d'une population à faible culture de risque, les transitions intrinsèques vers la panique sont les plus importantes. On a donc supposé $B_2 > B_1$, c'est-à-dire les transitions intrinsèques de l'alerte à panique sont plus importantes que celles d'alerte à contrôle et $C_2 > C_1$ c'est-à-dire que les transitions intrinsèques de contrôle à panique sont plus importantes que celles de panique à contrôle. Une plage de paramètres peut déjà être définie à partir de ces remarques. Elle est donnée dans la table 5.2.

| population \ culture du risque | faible | forte |
|--------------------------------|---|---|
| | dense | <u>Jeux 1</u> : $B_2 > B_1$, $C_2 > C_1$ $\alpha, \beta, \gamma_{c \rightarrow p}, \gamma_{p \rightarrow c} > 0.5$ |
| éparpillée | <u>Jeux 2</u> : $B_2 > B_1$, $C_2 > C_1$ $\alpha, \beta, \gamma_{c \rightarrow p}, \gamma_{p \rightarrow c} < 0.5$ | <u>Jeux 4</u> : $B_2 < B_1$, $C_2 < C_1$ $\alpha, \beta, \gamma_{c \rightarrow p}, \gamma_{p \rightarrow c} < 0.5$ |

TABLE 5.2 – Différent scénarios selon les valeurs des paramètres

Pour vérifier que le modèle reproduit les observations des géographes et psychologues, pour chaque ensemble de paramètres, nous avons comparé les flux correspondant à l'imitation et aux transitions intrinsèques. Pour cela, les fonctions suivantes ont été comparées : ($t \in [0, T]$) :

$$Im_p(t) = \gamma_1 \xi \left(\frac{p(t)}{c(t) + \epsilon} \right) p(t)c(t) + \beta \xi \left(\frac{p(t)}{a(t) + \epsilon} \right) p(t)a(t), \quad (5.8)$$

$$In_p(t) = B_2 a(t) + C_2 c(t). \quad (5.9)$$

$Im_p(t)$ représente la densité des individus qui à chaque instant t adopte un comportement de panique par imitation, alors que $In_p(t)$ représente la densité de ceux qui adoptent un comportement de panique dû aux transitions intrinsèques. La comparaison de ces deux fonctions permet de vérifier quelle transition entre le processus d'imitation et le processus intrinsèque est la plus importante.

Par analogie, nous notons ($t \in [0, T]$) :

$$Im_c(t) = \alpha \xi \left(\frac{c(t)}{a(t) + \epsilon} \right) c(t)a(t) + \gamma_2 \xi \left(\frac{c(t)}{p(t) + \epsilon} \right) p(t)c(t). \quad (5.10)$$

$$In_c(t) = B_1 a(t) + C_1 p(t) \quad (5.11)$$

Ainsi, $Im_c(t)$ représente la densité des individus qui adoptent un comportement contrôlé par imitation à chaque instant t alors que $In_c(t)$ représente la densité de population qui adopte un comportement contrôlé dû aux transitions intrinsèques.

En choisissant des jeux de paramètres définis par le tableau 5.2, nous avons trouvé que :

- **Scénario 1, Jeux 1 (exemple d'une foule dense avec une faible culture du risque)** : les personnes qui adoptent un comportement de panique l'adoptent par imitation. De plus, certaines valeurs de paramètres permettent de faire converger le système vers un comportement contrôlé.
- **Scénario 2, Jeux 2 (exemple d'une foule éparpillée avec une faible culture du risque)** : les transitions intrinsèques prévalent sur les imitations et le comportement de panique est le plus adopté. En comparant les scénarios 1 et 2, nous avons obtenu plus ou moins les mêmes résultats qualitatifs : une prédominance de la panique. Or ce comportement de panique est la conséquence de deux processus différents : dans le premier cas la prévalence de la panique est due à des processus d'imitation, dans le second cas à des transitions intrinsèques.
- **Scénario 3, Jeux 3 (une population dense avec une forte culture du risque)** : les personnes qui adoptent un comportement contrôlé l'adoptent surtout par un processus d'imitation.
- **Scénario 4, Jeux 4 (une population éparse avec une forte culture du risque)** : les transitions intrinsèques prévalent sur les transitions d'imitation.

Ces résultats sont en accord avec les observations des psychologues : dans le cas d'une population dense, les comportements sont surtout adoptés par imitation.

Une étude des points d'équilibre du système lorsque $\varphi \equiv 0$ a montré le rôle des paramètres sur la dynamique du système. Pour chaque scénario, l'espace des paramètres peut être partitionné en plusieurs régions selon le nombre de points d'équilibre et selon qu'ils conduisent à un état contrôlé ou paniqué. Ce travail théorique explique par exemple les résultats du scénario 1 par rapport aux connaissances des psychologues. Dans le cas d'une foule dense avec une faible culture du risque, il y aura surtout une prédominance de comportements paniqués mais qu'ils ne sont pas automatiques.

5.4 Une calibration à partir de la réalité virtuelle

5.4.1 Introduction

Pour mieux comprendre les différents comportements vécus lors d'un événement catastrophique et les étudier dans des conditions idéales, une expérience de réalité virtuelle a été menée au laboratoire de Psychologie de Nantes en 2020. Cette expérience consistait à immerger le volontaire dans une catastrophe soudaine et imprévue sans signe avant-coureur. Grâce à cette nouvelle approche, des données d'observation ont été obtenues et ont permis d'obtenir un ordre de grandeur des paramètres. Le modèle calibré peut alors être un outil intéressant pour capturer et comprendre des dynamiques comportementales non directement mesurables lors d'un événement catastrophique.

Cependant, trois problèmes se sont posés lors de l'estimation des paramètres :

- La présence de non-linéarités dans le modèle mathématique dues aux processus d'imitation ;
- La difficulté de différencier les états comportementaux même si l'expérience a été menée en laboratoire ;
- Le faible nombre de données.

Ce contexte réaliste mais difficile implique une analyse fine préalable de faisabilité de l'estimation des paramètres, c'est pourquoi, nous avons dû répondre à deux questions principales avant d'estimer les paramètres :

- Est-il possible d'estimer l'ensemble des paramètres du modèle à partir des mesures physiologiques fournies par la réalité virtuelle ?
- Quel est le nombre minimal de mesures nécessaires pour être sûr des résultats de la procédure d'estimation de paramètres ?

Les réponses ont été apportées par trois études théoriques. La première est une analyse de sensibilité, la seconde une étude d'identifiabilité. La troisième a déterminé le nombre minimal de mesures de temps nécessaires pour estimer les paramètres inconnus. Une fois ces trois études menées sur le modèle mathématique, une procédure d'estimation des paramètres a été mise en place. Cette dernière est basée sur la résolution d'un problème des moindres carrés non linéaire résolu avec l'algorithme génétique [92]. Un algorithme global a été préféré à un algorithme local car il n'y avait aucune estimation initiale des valeurs des paramètres.

Les études étant conditionnées par l'expérience de RV elle-même, je vais tout d'abord la présenter et faire le lien avec le modèle mathématique APC puis je présenterai comment des trois analyses nous avons mis en place une procédure d'estimation de paramètres.

5.4.2 L'expérimentation de réalité virtuelle (RV)

L'expérience de RV a été menée par des psychologues du laboratoire LPPL de Nantes (France) dans un environnement clos et contrôlé. Son objectif était de déterminer à partir de mesures physiologiques, les différents états comportementaux et leurs changements survenant lors d'un événement catastrophique en prenant en compte le contexte environnemental tel que le type d'événement, la configuration spatiale et la présence ou l'absence d'avatars.

5.4.2.1 La procédure de RV et l'échantillonnage

Cette expérience de réalité virtuelle consistait à immerger des individus dans la simulation d'un tsunami sur le littoral méditerranéen de Nice (France), un scénario événement qui a depuis été intégré aux outils réglementaires nationaux. Le scénario de la simulation était basé sur des données de recherche (voir [18]). Pour construire le contexte spatial, des informations topographiques ont été recueillies à Nice comme la plage telles que sa largeur, la présence d'escaliers, de galets et garde-corps d'accès etc... (voir [205]). Des personnages virtuels (avatars) ont également été inclus pour observer les réactions comportementales dans le contexte des interactions sociales entre les répondants à l'enquête et les avatars.

Trois scénarios ont été construits à partir de trois conditions expérimentales conçues pour simuler différentes réactions, les comparer et mieux comprendre comment le contexte affecte le comportement. Par exemple, une situation de danger ne génère pas automatiquement un sentiment de menace si la personne est seule. La réaction dépend de l'expérience de la personne et des comportements de ceux autour desquels le comportement peut être imité. Les trois scénarios suivants ont été réalisés :

- Premier scénario (scénario neutre) : dans cette condition expérimentale, la personne est seule sans personne virtuelle.
- Deuxième scénario (scénario organisé) : dans cette condition expérimentale, la personne est en présence de personnes virtuelles au comportement adapté (échapper au tsunami en marchant rapidement dans la bonne direction et sans crier).
- Troisième scénario (scénario non organisé) : dans cette condition expérimentale, la personne est en présence de personnes virtuelles au comportement inadapté (fuite en courant dans tous les sens et en criant).

Dans le deuxième scénario, les réactions physiques des avatars expriment un comportement de contrôle alors que dans le troisième ils expriment la panique.

Quatre-vingt-huit volontaires non rémunérés ont été recrutés dans la presse locale et ont été affectés au hasard à l'une des trois conditions. L'échantillon était composé de 43 femmes et 45 hommes. Leur âge variait de 18 à 56 ans avec une moyenne de 26,76 ans et un écart type de 9,41. Les participants ont été répartis dans les différentes conditions en respectant un équilibre entre hommes et femmes, et une diversité dans les âges. Par conséquent, 29 personnes ont été affectées au premier et au troisième scénario et 30 au deuxième. La répartition des participants selon leur sexe et le scénario est fournie dans le tableau 5.3.

Lors de la simulation, chaque participant était immergé dans un environnement de réalité virtuelle qui fournit un retour visuel et auditif (figure 5.9). Le sujet était directement placé sur la plage au début de la simulation et avait des mouvements libres. Pour capter et maintenir l'attention du participant, la chronologie proposée s'est basée sur la perception d'un tsunami sur la côte méditerranéenne de Nice plutôt que sur la réalité de sa dynamique. Comme décidé, après 60 secondes, le niveau de la mer baissait. Ensuite, la vague se formait à l'horizon et les bruits de l'eau devenaient plus forts. La vague atteignait la plage après 3 minutes. Si les participants restaient immobiles sur la plage, l'application s'arrêtait lorsqu'ils étaient heurtés par la vague. Si les participants avaient un comportement de fuite à l'intérieur de la ville, l'application s'arrêtait lorsqu'ils atteignaient une sortie de ville. Dans tous les autres cas, l'application s'arrêtait 2 minutes après que la vague

| Condition | Sexe | | Total |
|-----------------------|--------|--------|-------|
| | Femmes | Hommes | |
| Premier scénario | 14 | 15 | 29 |
| Scénario organisé | 15 | 15 | 30 |
| Scénario non organisé | 14 | 15 | 29 |
| Total | 43 | 45 | 88 |

TABLE 5.3 – Distribution des enquêtés selon le sexe et le scénario.



FIGURE 5.9 – Photographies de l’expérience virtuelle au laboratoire de Nantes. Chaque participant a été immergé dans un environnement de réalité virtuelle fournissant un retour visuel et auditif.

ait submergé la plage. Les étapes sont résumées à la figure 5.10.

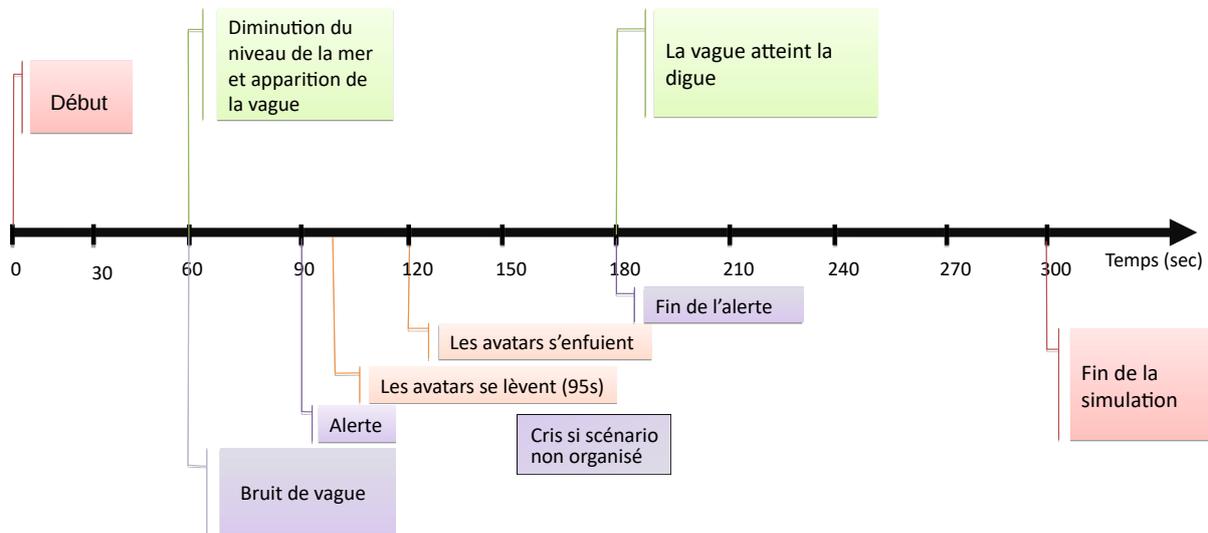


FIGURE 5.10 – Déroulement du scénario d'un tsunami dans le temps : en vert, progression de la vague due au tsunami ; en violet, les sons entendus par les personnes participant à l'expérience de réalité virtuelle ; en orange, l'action des avatars ; en rouge, le début et la fin des actions.

5.4.2.2 Mesures

Des mesures physiologiques ont été enregistrées pour chaque participant afin de déterminer leur charge émotionnelle à chaque instant de la simulation. L'appareil Nexus X MKII était connecté au participant par des électrodes. Il a enregistré pour chacun d'eux un électrocardiogramme (ECG) et une conductance cutanée afin d'identifier d'éventuels signaux de stress face au tsunami. L'ECG est un enregistrement qui fournit différentes variables pertinentes pour la détection d'un état de stress [115]. Il rend compte des polarisations et dépolarisations successives du cœur traduites en pics caractéristiques à ce type d'enregistrement. En particulier, il fournit la fréquence cardiaque (FC) exprimée en battements par minute, calculée à partir de la fréquence d'apparition d'un type de pic pendant une minute d'enregistrement. La conductance cutanée mesure la variation continue des caractéristiques électriques de la peau. Les données sont collectées en appliquant une tension faible, indétectable et constante sur la peau, puis en mesurant la variation de la conductance cutanée.

Dans notre étude, seule la fréquence cardiaque a été retenue en raison de sa fiabilité [17]. Même si l'expérience a été menée en laboratoire, les légers mouvements des participants ont faussé certaines des mesures de conductance.

Avant de démarrer chaque simulation, les expérimentateurs ont réalisé un test pour vérifier le bon fonctionnement des appareils et pour familiariser les participants avec la RV. Ainsi, tous les participants ont vécu la même situation de test, qui était une immersion dans un village viking. Ce test nous a également permis d'enregistrer une ligne de base de la FC au repos spécifique à chaque individu. Tout au long de l'expérience de RV, l'état de stress de chaque participant a été déterminé par rapport à la ligne de base : un état de stress a été identifié dès que la FC du participant dépassait la ligne de base et donc augmentait.

À partir des mesures de FC, deux catégories de personnes ont été distinguées : les personnes calmes et les personnes stressées correspondant respectivement à une FC faible et à une FC élevée. Par conséquent, deux séries de mesures ont été obtenues.

La section suivante montre les liens entre les mesures physiologiques et les variables du modèle mathématique APC.

5.4.3 Le lien entre le modèle mathématique et les données expérimentales

Selon [151] et la section 5.3.1, trois types d'états comportementaux surviennent lors d'un événement catastrophique et dépendent de la charge émotionnelle et de la capacité des individus à la réguler : les états d'alerte,

de contrôle et de panique. Ces trois états ont conduit au modèle mathématique APC. Dans la section suivante, nous déterminons quelles variables ou combinaisons (de variables) du modèle APC peuvent être associées à l'une des mesures expérimentales.

5.4.3.1 Variables observées du modèle mathématique

Basés sur des connaissances en psychologie et en physiologie, les comportements d'alerte et de contrôle correspondent à un état de base dans lequel les personnes ont une fréquence cardiaque basse contrairement au comportement de panique (voir section 5.3.1 et [17]). Nous avons donc considéré que le premier ensemble de mesures correspondait aux comportements du quotidien, d'alerte et de contrôle dans le modèle APC et le second ensemble aux comportements de panique. Les personnes revenant à la vie quotidienne dans le modèle mathématique peuvent être identifiées aux personnes se mettant en sécurité dans le *le vieux Nice* ou terminant la simulation. Leur pourcentage pendant la durée de l'expérimentation correspond à la différence entre le nombre total de répondants faisant le scénario et le nombre encore dans la simulation.

Les données fournies par les psychologues sont rassemblées dans le tableau 5.4 et représentent les pourcentages de répondants à l'enquête présentant un comportement d'alerte-contrôle-quotidien, un comportement de panique et un retour au comportement quotidien dans les trois scénarios (neutre, organisé et non organisé). Une représentation graphique de la distribution de ces états comportementaux au cours du temps est fournie à la figure 5.11 pour le scénario neutre.

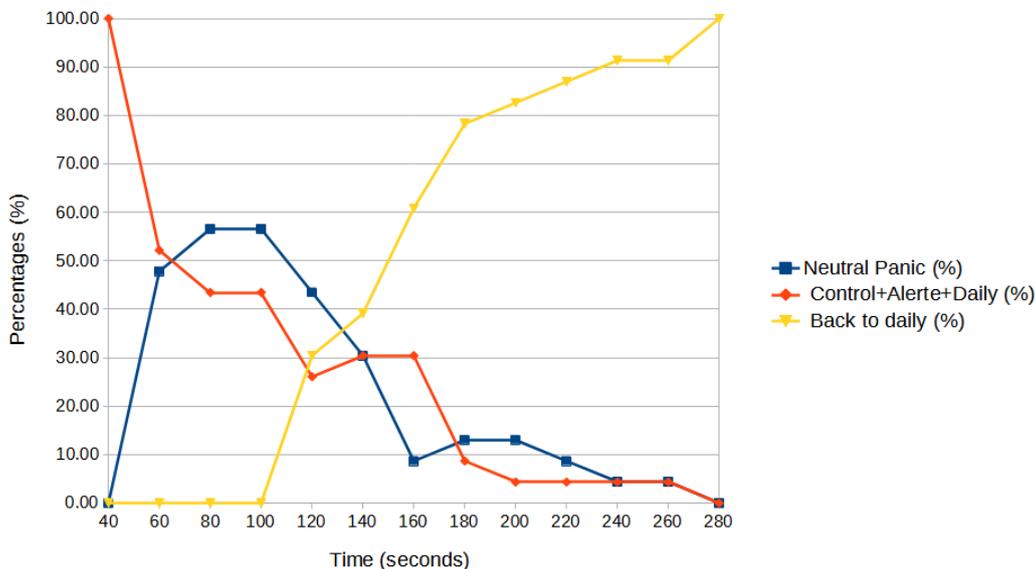


FIGURE 5.11 – Scénario neutre : représentation de la distribution (%) au cours du temps des comportements du quotidien-alerte-contrôle, des comportements de panique, et des comportements de retour au quotidien.

L'étape suivante consistait à convertir les données du tableau 5.4 en densités pour le traitement mathématique. On note S_m la densité de personnes à FC faible correspondant à la première série de mesures, p_m la densité de personnes à FC élevée correspondant à la deuxième série et $b_m := 1 - S_m - p_m$ la densité de personnes ayant terminé le scénario de RV.

Les variables correspondantes du modèle mathématique (5.6) encore appelées sorties du modèle mathématique sont notées $y_1 = q + a + c$, $y_2 = p$ et $y_3 = b$.

5.4.3.2 Modélisation du début et de la fin de la catastrophe

À partir de la figure 5.10 et du Tableau 5.4, une représentation simple des fonctions γ et φ peut être trouvée. Dans chaque scénario, les personnes interrogées sont censées être engagées dans un comportement du quotidien jusqu'à 60 secondes, moment auquel le début de la vague peut être entendue. Ainsi, γ qui modélise la catastrophe est supposée égale à 0 jusqu'à 60 secondes. Puis, à 90 secondes, lorsque la sirène retentit, on suppose que toutes les personnes prennent conscience de l'arrivée imminente du danger. Par conséquent, 100% des répondants à l'enquête ont adopté l'un des trois comportements : comportement d'alerte, de contrôle ou de panique. Entre 60 et 90 secondes, nous supposons que le pourcentage de personnes conscientes de la catastrophe

| | Temps | 40 | 60 | 80 | 100 | 120 | 140 | 160 | 180 | 200 | 220 | 240 | 260 | 280 |
|--------------|---------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|
| Neutre | P (%) | 0.00 | 47.83 | 56.52 | 56.52 | 43.48 | 30.43 | 8.70 | 13.04 | 13.04 | 8.70 | 4.35 | 4.35 | 0.00 |
| | ACQ (%) | 100.00 | 52.17 | 43.48 | 43.48 | 26.09 | 30.43 | 30.43 | 8.70 | 4.35 | 4.35 | 4.35 | 4.35 | 0.00 |
| | RQ (%) | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 30.43 | 39.13 | 60.87 | 78.26 | 82.61 | 86.96 | 91.30 | 91.30 | 100.00 |
| Organisé | P (%) | 0.00 | 44.00 | 52.00 | 56.00 | 52.00 | 36.00 | 12.00 | 8.00 | 8.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| | ACQ (%) | 100.00 | 56.00 | 48.00 | 44.00 | 44.00 | 28.00 | 20.00 | 4.00 | 4.00 | 4.00 | 4.00 | 4.00 | 0.00 |
| | RQ (%) | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 4.00 | 36.00 | 68.00 | 88.00 | 88.00 | 96.00 | 96.00 | 96.00 | 100.00 |
| Non Organisé | P (%) | 0.00 | 53.85 | 61.54 | 50.00 | 65.38 | 30.77 | 11.54 | 7.69 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| | ACQ (%) | 100.00 | 46.15 | 38.46 | 50.00 | 26.92 | 26.92 | 30.77 | 7.69 | 3.85 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| | RQ (%) | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 7.69 | 42.31 | 57.69 | 84.62 | 96.15 | 100.00 | 100.00 | 100.00 | 100.00 |

TABLE 5.4 – Tableau donnant le pourcentage de personnes ayant un comportement Alerté-Contrôlé-Quotidien (ACQ), un comportement de panique (P) et un Retour au comportement Quotidien (RQ) pour les trois scénarios : neutre, organisé et non organisé.

augmente régulièrement. La fonction :

$$\phi(s) = \begin{cases} 0 & \text{if } s < \tau_0 \\ 1 & \text{if } s > \tau_1 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{s-a}{b-a}\pi\right) & \text{if } \tau_0 \leq s \leq \tau_1 \end{cases} \quad (5.12)$$

est reprise avec $\tau_0 = 60$, $\tau_1 = 90$ pour obtenir une approximation de γ (voir figure 5.12).

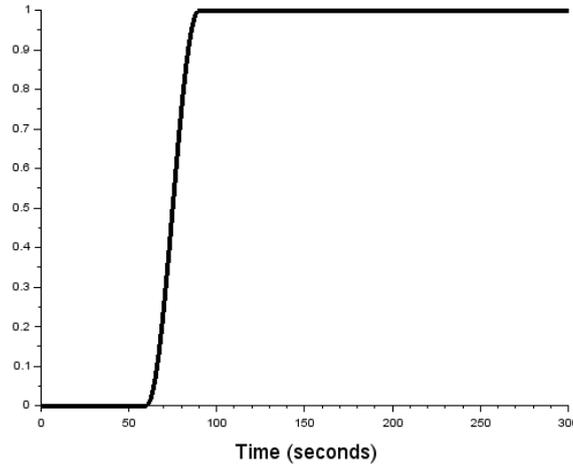


FIGURE 5.12 – Représentation de la fonction γ qui modélise la catastrophe. Pour cela, la fonction (5.12) est reprise avec $\tau_0 = 60$, $\tau_1 = 90$.

De la même manière, la fonction φ décrivant le retour à un comportement quotidien est construite à partir de ϕ avec τ_0 (resp. τ_1) le temps à partir duquel le premier enquêté (resp. le dernier) quitte la simulation. φ doit être calculé pour chaque scénario puisque les personnes n’adoptent pas les mêmes comportements. Par exemple, le scénario organisé se termine à 280 secondes contrairement au scénario non organisé qui se termine à 200 secondes. Cette différence montre que les processus d’imitation étaient différents selon les scénarios.

5.5 Sensibilité des sorties, identifiabilité et nombre minimal de données d’observation

Cette section décrit la stratégie mise en oeuvre pour estimer les paramètres à partir de l’ensemble des mesures fournies dans le tableau 5.4.

5.5.1 Étude de sensibilité

Une étude de sensibilité permet de quantifier l’influence des valeurs de paramètres sur la variabilité de la réponse du modèle. Il est ainsi possible de savoir quels sont les paramètres qui vont contribuer le plus à sa variabilité, les paramètres les moins influents et ceux qui interagissent entre eux.

En étudiant comment la réponse du modèle réagit aux variations de ses paramètres, l’analyse de sensibilité permet de répondre à un certain nombre de questions :

1. Le modèle est-il bien fidèle au phénomène/processus modélisé? En effet, si l’analyse exhibe une forte influence d’un paramètre habituellement connu comme non influent, il sera nécessaire de remettre en cause la qualité du modèle ou (et) la véracité de nos connaissances sur l’impact réel des variables d’entrée.
2. Quelles sont les paramètres qui contribuent le plus à la variabilité de la réponse du modèle? Si cette variabilité est synonyme d’imprécision sur la valeur prédite de la sortie, il sera alors possible d’améliorer la qualité de la réponse du modèle en restreignant le domaine d’appartenance du paramètre par exemple. Toutefois, cela n’est pas toujours possible, notamment lorsque la variabilité d’un paramètre est intrinsèque à la nature du paramètre et non due à un manque d’information ou à des imprécisions de mesures.
3. Quelles sont au contraire les paramètres les moins influents? Il sera possible de les considérer comme des paramètres déterministes, en les fixant par exemple à leur espérance, et obtenir ainsi un modèle plus simple avec moins de paramètres.

4. Quels paramètres ou quels groupes de paramètres interagissent avec quels autres ? L'analyse de sensibilité peut permettre de mieux appréhender et comprendre le phénomène modélisé, en éclairant les relations entre les paramètres.

Pour mener ce type d'étude, il existe deux approches : les méthodes locales et les méthodes globales [179]. Alors que pour l'analyse de sensibilité locale, un seul paramètre varie lorsque les autres paramètres sont fixés, la sensibilité globale vise à étudier la réponse du modèle lorsque tous les paramètres varient.

Les auteurs de [179] distinguent trois classes de techniques d'analyse de sensibilité globale : les méthodes de régression, les méthodes de filtrage et celles basées sur la variance. J'ai opté pour la dernière classe car elle fournit des résultats quantitatifs en considérant tout l'espace des paramètres possibles (voir l'Annexe 2). Ceci est important pour notre modèle car nous aimerions considérer différents scénarios conduisant à des valeurs très différentes des paramètres.

J'ai repris le package *Sensitivity* [98] implémenté dans le logiciel R dédié au calcul statistique.

Les résultats ont montré une très grande sensibilité de a , p et c par rapport aux paramètres intrinsèques comparés aux paramètres d'imitation (partie 2 de l'Annexe 2). Cette étude nous conduit à dissocier l'estimation de ces deux groupes de paramètres et favoriser d'abord l'estimation des paramètres intrinsèques qui pourra être faite à partir du premier scénario. En supposant que le profil des participants est le même dans les trois scénarios, les paramètres d'imitation pourront alors être calculés à partir des scénarios organisé et non organisé (s'ils sont identifiables).

5.5.2 Identifiabilité

Pour tester l'identifiabilité du modèle APC, l'algorithme *IdentifiabilityTree* développé dans [204] et présenté dans le premier chapitre a été utilisé.

Soient les hypothèses suivantes \mathcal{H} :

1. Les fonctions γ et φ sont connues
2. $y_1(t) = q(t) + a(t) + c(t)$, $y_2(t) = p(t)$, $y_3(t) = b(t)$.

Identifiabilité du modèle APC sans imitation

Le premier scénario où il n'y a pas d'imitation implique pour le modèle mathématique que $F = G = H = 0$ (et donc que $\alpha = \beta = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$) et que le vecteur paramètre à identifier est $\tilde{\theta} := (B_1, B_2, B_3, B_4, C_1, C_2)$.

La proposition suivante donne le résultat d'identifiabilité lorsque $\alpha = \beta = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$.

Proposition 25. *S'il n'y a pas d'imitation, sous les hypothèses \mathcal{H} , le modèle (5.6) est identifiable en $\tilde{\theta}$.*

La preuve est basée sur les polynômes ES (5.13) qui seront utilisés dans la partie 5.5.3 lorsqu'on déterminera le nombre minimal de mesures pour estimer les paramètres.

$$\begin{aligned}
P_1 := & (\dot{y}_2 + \dot{y}_2 \gamma) \varphi + (-B_1 C_2 + B_1 C_2^2 / B_2 - B_2 B_3 - B_2 C_2 + B_3 C_2 + C_2^2) \dot{y}_3 \\
& + C_2 \dot{y}_3 \varphi + (B_2 - C_2) \dot{y}_3 \gamma + (B_1 - B_1 C_2 / B_2 + B_2 + B_4 + C_1) \dot{y}_2 \varphi + (B_1 B_4 \\
& + B_1 C_1 - B_1 B_4 C_2 / B_2 - B_1 C_1 C_2 / B_2 + B_2 C_1 - C_1 C_2) y_2 \varphi + (B_4 + C_1) y_2 \gamma \varphi - B_2 y_1 \gamma \varphi = 0, \\
P_2 := & -(\dot{y}_3 \dot{\varphi} + \dot{y}_3 \varphi + \dot{y}_3 \varphi^2) + (B_1 C_2 / B_2 + B_3 + C_2) \dot{y}_3 \varphi - B_1 / B_2 \dot{y}_2 \varphi^2 + (-B_1 B_4 / B_2 - B_1 C_1 / B_2 - C_1) y_2 \varphi^2 = 0.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Identifiabilité des paramètres d'imitation

Maintenant que les paramètres de la partie linéaire sont identifiables, une étude d'identifiabilité peut être réalisée sur l'ensemble des paramètres d'imitation, c'est à dire $\check{\theta} := (\alpha, \beta, \gamma_{c \rightarrow p}, \gamma_{p \rightarrow c})$. Nous avons la proposition suivante :

Proposition 26. *On suppose que les paramètres intrinsèques sont connus. Sous l'hypothèse \mathcal{H} , le modèle (5.6) est identifiable par rapport au $\check{\theta}$.*

Étant donné les non linéarités du modèle, il n'a pas été possible de déterminer les polynômes ES. La preuve a été faite en travaillant directement avec les équations du modèle.

Remarque 30. *On peut montrer en utilisant le principe de la démonstration de la proposition 26 que le modèle (5.6) est identifiable.*

Comme nous le verrons dans la suite, il n'est pas possible d'estimer tous les paramètres à partir du système complet et des données expérimentales. En effet, nous ne disposons que d'un faible nombre de mesures. Pour le justifier, la partie suivante présente un résultat sur le calcul du nombre minimal de données pour avoir l'identifiabilité locale et donc pour pouvoir estimer les paramètres de façon unique.

5.5.3 Nombre minimal de données d'observation

Pour déterminer le nombre minimal de mesures nécessaires pour avoir l'identifiabilité locale, nous avons adapté une méthode présentée dans [141, 220]. Le résultat est basé sur une fonction $\rho = \rho(\Theta, y, \dot{y}, \dots, y^{(k)})$, où k est un entier positif tel que ρ a des dérivées partielles continues par rapport à la variable Θ . L'identifiabilité locale vient alors de l'inversion locale de ρ en utilisant le théorème des fonctions implicites dans un voisinage où la fonction s'annule. [141] a noté que certains polynômes différentiels obtenus par des méthodes d'algèbre différentielle peuvent générer cette fonction ρ . Ce travail est repris et généralisé aux polynômes ES définis en (2.4). Pour simplifier les notations, on suppose qu'il n'y a qu'une seule sortie et donc un seul polynôme ES et on note $\Theta = (\gamma_k(\theta))_{1 \leq k \leq d}$ la suite de coefficients du polynôme ES.

Proposition 27. *Supposons que*

1. *la fonction*

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^d \\ (\Theta, y) &\mapsto (P(\theta, y), P(\theta, y)^{(1)}, \dots, P(\theta, y)^{(d-1)}) \end{aligned} \quad (5.14)$$

est une fonction différentiable en la première variable

2. *$|\frac{\partial \rho}{\partial \Theta}|$ n'est pas identiquement nulle*

3. *la fonction ϕ définie en (2.5) est injective.*

Le modèle est localement identifiable si le nombre minimal de mesures de y est $s_y + d$, où s_y est la plus haute dérivée de y dans P .

Remarque 31. ✓ *$|\frac{\partial \rho}{\partial \Theta}|$ n'est autre que le wronskien $W(m_1, \dots, m_d)$ défini à la proposition 1. La deuxième hypothèse permet d'exprimer Θ en fonction de y et de ses dérivées.*

✓ *L'injectivité de la fonction ϕ permet de retrouver les paramètres θ_i à partir des Θ_j .*

Exemple 5.5.1. *Des polynômes P_1 et P_2 donnés en (5.13), on peut en déduire le nombre minimal d'observations pour avoir l'identifiabilité locale.*

P_1 est composé de 7 coefficients et les indéterminées sont y_1, y_2, y_3 . Son leader étant \dot{y}_2 , $7+2=9$ points sont nécessaires.

Pour le polynômes P_2 , il faut $3+2=5$ mesures.

En conclusion, le nombre minimal de mesures requis pour avoir l'identifiabilité locale est de 9.

Remarque 32. — *À partir du tableau 5.4, il est possible de mettre en place une procédure d'estimation de paramètres pour estimer les paramètres intrinsèques.*

— *Estimer tous les paramètres à partir des scénarios 2 et 3 ne donnera pas de bons résultats. En effet, l'ordre de dérivation des polynômes obtenus à partir du modèle complet sera plus élevé que celui de P_1 et on dispose de moins de points de mesure pour ces deux scénarios.*

En résumé, l'identification des paramètres a été effectuée en trois étapes correspondant aux trois conditions de l'expérience de RV. L'hypothèse principale est que les participants ont le même profil dans les trois scénarios. De chacun d'entre eux, on a estimé un ensemble de paramètres. Ainsi, les paramètres intrinsèques ont d'abord été estimés à partir du scénario neutre dans lequel il n'y a pas de processus d'imitation puis les paramètres décrivant les processus d'imitation de contrôle à partir du scénario organisé et enfin les paramètres décrivant les processus d'imitation de panique à partir du scénario non organisé. La Figure 5.13 résume les étapes de l'identification.

5.5.4 Estimation des paramètres

Soient $t_i, i = 1, \dots, M$ les temps de mesures des données physiologiques, et les vecteurs $S_m = (S_m(t_i))_{1, \dots, M}$, $p_m = (p_m(t_i))_{1, \dots, M}$ et $b_m = (b_m(t_i))_{1, \dots, M}$ regroupant les densités de personnes dans un état contrôlé, paniqué et dans un retour à un état du quotidien à chaque pas de temps. Soient les matrices $y^{mes} = (S_m, p_m, b_m)^T$ et $y(\theta) = (y_1(t_i), y_2(t_i), y_3(t_i))_{i=1, \dots, M}^T$ obtenus à partir des sorties du modèle évaluées à chaque t_i et en le vecteur de paramètre θ . $y^{mes} - y(\theta)$ est une matrice de dimension $M \times 3$ regroupant toutes les différences entre les mesures et les sorties du modèle.

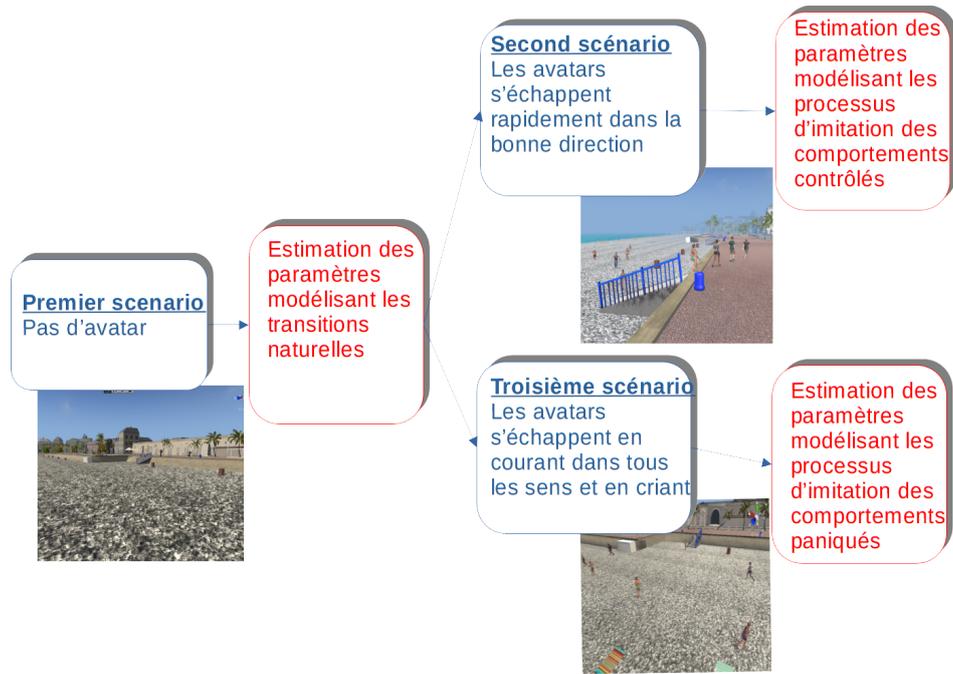


FIGURE 5.13 – Diagramme résumant les étapes pour estimer les paramètres du modèle APC. Les transitions naturelles sont tout d’abord estimées à partir du premier scénario, puis viennent les processus d’imitation à partir des deuxième et troisième scénarios

La fonction coût $J(\theta)$ est alors

$$J(\theta) = \|y^{mes} - y(\theta)\|_2^2 = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^3 (y_{i,j}^{mes} - y(\theta)_{i,j})^2$$

où $y_{i,j}^{mes}$ (resp. $y(\theta)_{i,j}$) est la composante de la i -ème ligne et la j -ème colonne de la matrice y^{mes} (resp $y(\theta)$). La solution de l’algorithme d’optimisation est notée

$$\hat{\theta} = \underset{\theta \in \mathcal{P}}{\operatorname{argmin}} J(\theta) \quad (5.15)$$

Le problème (5.15) a été résolu avec l’algorithme génétique implémentée dans Scilab avec la fonction `optim_ga` [82]. En effet, un algorithme global a été préféré puisque nous ne disposons pas de valeurs initiales pour utiliser un algorithme local. Dans [201], une étude sur l’erreur relative a été faite.

5.5.5 Résultats

Scénario sans avatar

Dans ce scénario, 29 personnes ont été enquêtées mais seulement 23 ont été retenues en raison de la qualité de leurs mesures. Dans le problème d’optimisation (5.15), les variables et leurs contraintes sont $\theta = (B_1, B_2, B_3, B_4, C_1, C_2) \in \mathcal{P}$ où

$$\mathcal{P} = \{\theta \in [0.01, 0.7]^2 \times [0.01, 0.2]^2 \times [0.01, 0.7]^2 / B_2 + C_2 < 1\}.$$

La condition $B_2 + C_2 < 1$ a été ajoutée pour que Runge-Kutta converge. En effet, le modèle étant très sensible aux paramètres intrinsèques, de grandes valeurs rendent Runge-Kutta divergent.

L’algorithme génétique a retourné les valeurs suivantes pour les paramètres intrinsèques : $B_1 = 0.1915$, $B_2 = 0.4374$, $B_3 = 0.1009$, $B_4 = 0.1741$, $C_1 = 0.1448$, $C_2 = 0.4676$.

La figure de gauche 5.14 représente les trajectoires des données réelles S_m, p_m, b_m et les trajectoires des sorties calculées avec les paramètres estimés. La figure de droite représente les simulations de a, p, c, b, q .

Remarque 33. Nous pouvons noter que la population a une faible culture du risque. Les inégalités $B_2 > B_1$ et $C_2 > C_1$ impliquent que les individus ont tendance à adopter un comportement paniqué de leur propre initiative.

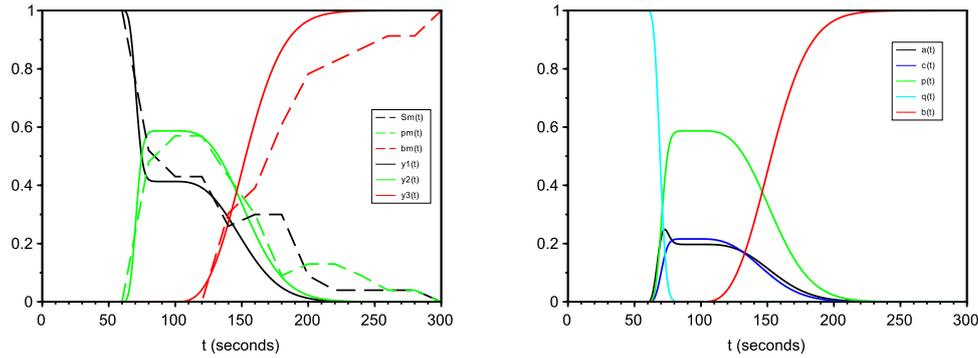


FIGURE 5.14 – Figure de gauche : Représentation des données réelles S_m , p_m , b_m et des trajectoires de sorties : densités de comportements contrôlés (y_1), paniqués (y_2) et de retour au quotidien après la catastrophe (y_3). Figure de droite : Simulations de a , p , c , b , q avec les paramètres obtenus à partir de l’algorithme génétique.

Scénario organisé

Dans le deuxième scénario, 25 personnes ont été sélectionnées parmi 29. Les valeurs des paramètres intrinsèques trouvées dans le premier scénario ont été utilisées. Dans ce scénario, puisqu’il n’y a pas d’avatars en état de panique, nous avons supposé que $\beta = \gamma_{c \rightarrow p} = 0$. Le problème d’optimisation est résolu avec $\theta = (\alpha, \gamma_{p \rightarrow c})$ et $\mathcal{P} = [0, 9]^2$. Les résultats obtenus avec l’algorithme génétique sont $\hat{\theta} = (\alpha, \gamma_{p \rightarrow c}) = (0.8338, 0)$. La figure 5.15 donne la représentation des données réelles avec les trajectoires de sortie évaluées en $\hat{\theta}$ puis les simulations des variables d’état du modèle mathématique.

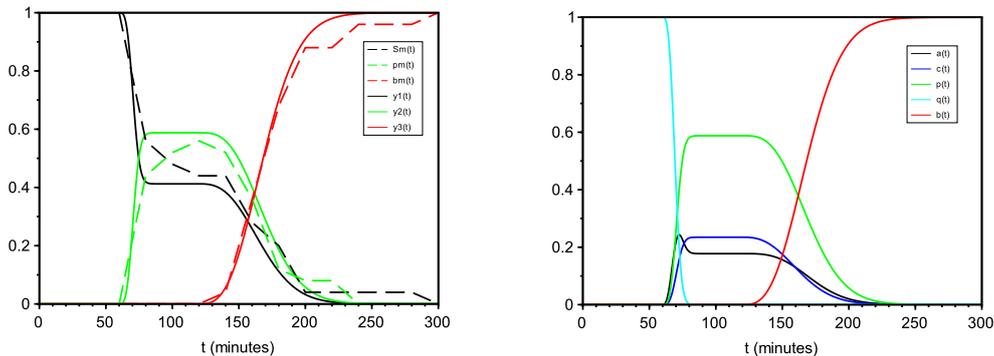


FIGURE 5.15 – Scénario organisé. Figure de gauche : Représentation des données réelles S_m , p_m , b_m et des trajectoires de sorties : densités de comportements contrôlés (y_1), paniqués (y_2) et de retour au quotidien après la catastrophe (y_3). Figure de droite : Simulations de a , p , c , b , q avec les paramètres obtenus à partir de l’algorithme génétique.

Scénario non-organisé

Pour le troisième scénario, 26 personnes ont été retenues. Comme dans le scénario précédent, les valeurs des paramètres intrinsèques trouvées dans le premier cas ont été utilisées et comme il n’y avait pas d’avatars en état de contrôle, nous avons supposé que $\alpha = \gamma_{p \rightarrow c} = 0$. Dans le problème d’optimisation (5.15), $\theta = (\beta, \gamma_{c \rightarrow p})$ et $\mathcal{P} = \{p \in [0, 1]^2 / \beta + \gamma_{c \rightarrow p} < 0.8\}$. Nous avons contraint les valeurs des paramètres pour limiter les valeurs de p . Le résultat obtenu avec l’algorithme génétique est $\hat{\theta} = (0.6599, 0.0273)$.

Dans les trois cas, la dynamique des différents comportements a été retrouvée.

5.6 Un modèle mathématique, pour quoi faire ?

L’exploitation du modèle mathématique nous a permis

- de définir de façon plus précise les comportements, leurs enchaînements et les déplacements associés des individus à partir des entretiens immersifs (voir Figure 5.7) ;

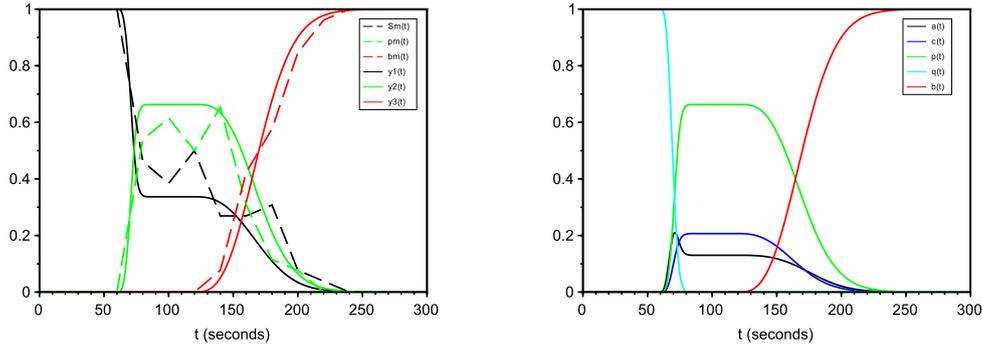


FIGURE 5.16 – Scénario non organisé. Figure de gauche : Représentation des données réelles S_m , p_m , b_m et des trajectoires de sorties : densités de comportements contrôlés (y_1), paniqués (y_2) et de retour au quotidien après la catastrophe (y_3). Figure de droite : Simulations de a , p , c , b , q avec les paramètres obtenus à partir de l’algorithme génétique.

- de donner un ordre de grandeur des paramètres du modèle à partir de la réalité virtuelle dont le scénario était basé sur des situations simulées [201] ;
- de définir et étudier des moyens pour limiter les comportements de panique [142] ;
- d’adopter une approche réseau complexe pour modéliser l’influence de l’espace dans les transitions d’un comportement à un autre dans le cas d’un tsunami à Nice [120, 119] ;
- d’étudier l’importance de la capacité des zones de refuge sur les comportements de la population [120].

Dans la suite, je présente deux exemples : un exemple montrant que le travail de calibration permet une meilleure compréhension des dynamiques non observables [201]. Le deuxième concerne un modèle contrôlé visant à trouver la meilleure stratégie pour limiter les comportements de panique [142].

Une meilleure compréhension des dynamiques non observables

À partir du modèle mathématique et des résultats sur les paramètres obtenus à la section 5.5.5, une étude plus fine des processus de transition dans les changements de comportement a été faite lors de l’expérimentation de réalité virtuelle.

En reprenant les fonctions Im_p , In_p , Im_c et In_c définies en (5.8) et (5.10), nous avons obtenu les figures 5.17 pour le scénario organisé et 5.18 pour le scénario non organisé. La première constatation est que les processus intrinsèques dominent les processus d’imitation dans les deux scénarios. Ensuite, les processus d’imitation sont plus importants dans le scénario non organisé ce qui tend à montrer que le comportement de panique est plus fréquemment imité.

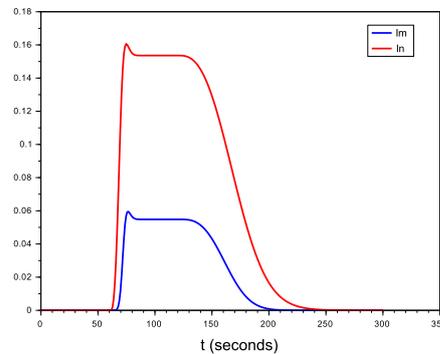
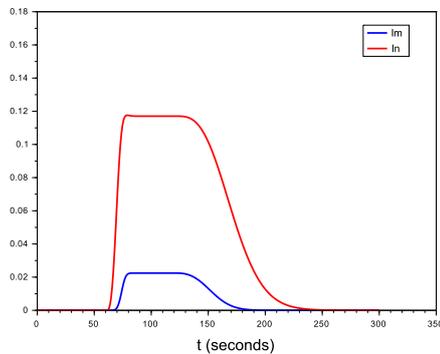


FIGURE 5.17 – Flux dus aux processus intrinsèque et aux processus d’imitation vers le contrôle dans le scénario organisé par rapport au temps. FIGURE 5.18 – Flux dus aux processus intrinsèque et aux processus d’imitation vers la panique dans le scénario non-organisé par rapport au temps.

FIGURE 5.19 – Flux dus aux processus intrinsèques et aux processus d’imitation.

Un premier modèle contrôlé : comprendre comment limiter les comportements de panique

En mathématiques, une fonction de contrôle est une fonction qui va agir sur le système pour modifier son comportement dynamique. Dans notre exemple, les fonctions de contrôle doivent agir sur la panique en limitant ou en diminuant le nombre de paniqués dans la foule et en réduisant le nombre de décès. Dans notre exemple, une fonction de contrôle doit correspondre à un effet provenant d'une action menée par les opérationnels et les institutionnels, que ce soit avant (p.e. la prévention) ou pendant l'événement (p.e. la gestion de catastrophe). Ainsi, les variables de contrôle sont liées à :

- La présence d'opérationnels sur le lieu de la catastrophe
- La formation/l'expérience des populations avant une catastrophe
- Les consignes transmises pendant l'événement à la population. Ces consignes favorisent les comportements contrôlés comme l'évacuation, le confinement ou d'autres comportements contrôlés.

On va supposer par la suite que toute l'organisation des actions opérationnelles, des services, fonctionne bien, même si ce n'est pas toujours le cas. Trois types de contrôle ont été envisagés :

1. u_1 : ce contrôle prend en compte l'effet de la formation et de l'expérience de la population. Ils sont acquis avant la catastrophe. Cet effet peut varier au cours du temps. Il agit sur la transition intrinsèque entre le comportement en alerte et le comportement contrôlé, soit sur le paramètre B_1 . On aura donc $B_1 + u_1$ au lieu de B_1 dans le système (5.6). Comme $B_1 + u_1$ est un taux de transition, il est compris entre 0 et 1.
2. u_2 : il représente les actions des opérationnels qui sont présents et qui interviennent sur le terrain dès le début de l'événement. Ils ont un effet apaisant tout au long de l'événement et on le suppose constant. u_2 est une constante qui agit sur deux transitions de comportements :
 - le passage de comportement d'Alerte à Contrôle
 - le passage de comportement de Panique à Contrôle

On suppose que cette constante agit de la même façon (c'est à dire avec la même valeur lors de la simulation) sur les deux transitions. u_2 agit sur la fonction d'imitation F et en particulier sur le paramètre α pour forcer le passage de A à C . On aura donc $\alpha + u_2$ dans le système contrôlé.

u_2 agit également sur la fonction d'imitation H et en particulier sur le paramètre γ_2 pour forcer le passage de P à C . On aura donc $\gamma_2 + u_2$ dans le système contrôlé.

3. u_3 : ce contrôle traduit l'effet de l'information institutionnelle transmise pendant l'événement, comme la transmission d'un message ou le déclenchement d'une sirène. Cette fonction est une fonction adaptative qui dépend du temps. En particulier, c'est une fonction constante par morceaux. Par exemple, à la figure 5.20, on a supposé qu'une sirène a été déclenchée au temps t_1 et a été suivie par un message des opérationnels au temps t_2 . Chaque saut correspond donc à une information supplémentaire apportée à la population et on suppose que les effets s'accumulent.

Les personnes n'agiront pas de la même façon à l'information transmise pendant l'événement u_3 selon leur expérience. Par exemple, les personnes ayant suivi une formation sur la façon de réagir à l'arrivée d'un tsunami, adopteront des réactions adaptées lorsqu'elles entendront le bruit spécifique de la sirène pour ce type d'événement. Ainsi, le contrôle u_3 agit sur la transition intrinsèque entre Alerte-Contrôle et on aura $B_1 + u_1 + \rho u_3 \in [0, 1]$ où $\rho \in [0, 1]$. Ensuite, u_3 favorise l'imitation dans le sens Alerte-Contrôle (donc agit sur α) et Paniqué-Contrôlé (agit sur γ_2).

Les fonctions de contrôles sont prises constantes par morceau, voir par exemple une représentation de u_3 à la figure 5.20. Le système contrôlé s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{da(t)}{dt} = \gamma(t)q - (B_1 + u_1 + \rho u_3 + B_2 + D_a)a(t) + B_3c(t) + B_4p(t) - \bar{F}(a(t), c(t), u_2, u_3)a(t)c(t) - G(a(t), p(t))a(t)p(t), \\ \frac{dc(t)}{dt} = (B_1 + \rho u_3)a(t) + C_1p(t) - (B_3 + C_2 + D_c)c(t) + \bar{F}(a(t), c(t), u_2, u_3)a(t)c(t) \\ \quad + \bar{H}(c(t), p(t), u_2, u_3)c(t)p(t) - \varphi(t)c(t), \\ \frac{dp(t)}{dt} = B_2a(t) + C_2c(t) - (B_4 + C_1 + D_p)p(t) + G(a(t), p(t))a(t)p(t) - \bar{H}(c(t), p(t), u_2, u_3)c(t)p(t), \\ \frac{dq(t)}{dt} = -\gamma(t)q(t), \quad \frac{db(t)}{dt} = \varphi(t)c(t) \end{array} \right. \quad (5.16)$$

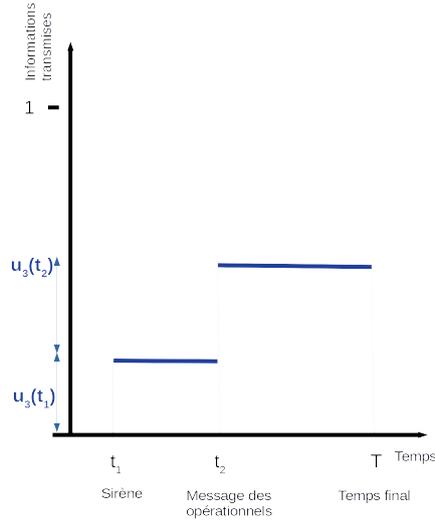


FIGURE 5.20 – Exemple de représentation de la fonction de contrôle u_3 .

avec les fonctions d'imitation :

$$\begin{cases} \bar{F}(a, c) = \frac{\alpha + u_2 + u_3}{N} \eta\left(\frac{c}{a + \varepsilon}\right) \\ \bar{H}(c, p) = -\frac{\gamma_1}{N} \eta\left(\frac{p}{c + \varepsilon}\right) + \frac{\gamma_2 + u_2 + u_3}{N} \eta\left(\frac{c}{p + \varepsilon}\right), \end{cases} \quad (5.17)$$

L'existence et l'unicité de la solution du système contrôlé est classique pour tout contrôle

$$u \in \mathcal{U}_T = \{(u_1, u_2, u_3) \mid u_i \text{ fonction constante par morceaux, } a_i \leq u_i(t) \leq b_i, i = 1, 2, 3, \forall t \in [0, T]\},$$

a_i, b_i étant des constantes comprises entre 0 et 1, et tout vecteur de paramètres $\theta \in \Theta := (\mathbb{R}_+^*)^6 \times (\mathbb{R}_+)^7$, ceci quelque soit la condition initiale positive ou nulle.

Considérons la fonction objectif suivante :

$$J(u_1, u_2, u_3) = \int_0^T (C_p p(t) + C_d d(t) + A_1 u_1^2(t) + A_2 u_2^2(t) + A_3 u_3^2(t)) dt. \quad (5.18)$$

Les deux premiers termes représentent le bénéfice des comportements de panique et de décès. Les constantes A_1, A_2 et A_3 sont positives et correspondent aux poids qui permettent de réguler les coûts du contrôle pour la formation, les actions des secouristes et les informations externes, respectivement. Notre objectif est donc de minimiser cette fonction coût pour trouver le ou les contrôles minimisant le phénomène de panique.

Le principe de Pontryagin [188] permet de conclure à l'existence d'un contrôle optimal $u^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*) \in \mathcal{U}_T$ répondant à la question c'est à dire tel que

$$\min_{(u_1, u_2, u_3) \in \mathcal{U}_T} J(u_1, u_2, u_3) = J(u_1^*, u_2^*, u_3^*). \quad (5.19)$$

Nous avons cherché à répondre à la question suivante :

Pour un scénario donné, quelle est la meilleure stratégie pour réduire la panique et limiter le nombre de victimes ?

À chaque contrôle u_1, u_2 et u_3 correspond un coût noté A_1, A_2 , et A_3 , respectivement. Pour chaque scénario, une stratégie correspond à une combinaison de ces coûts (ex : $A_1 = 0.01, A_2 = 0.01, A_3 = 1$). Pour modéliser les différentes stratégies, le système binaire suivant est adopté : $A_i = 0.01$ si la stratégie vise surtout à augmenter les efforts du contrôle u_i , et $A_i = 1$ si la stratégie vise à diminuer les efforts du contrôle u_i ($i = 1, 2, 3$).

On rappelle que u_1 est le contrôle associé à la formation de la population, u_2 celui associé aux actions des opérationnels sur les lieux du sinistre, et u_3 le contrôle associé à la communication. Ainsi, une stratégie de gestion correspondra au triplet suivant ($A_1 = 1, A_2 = 0.01, A_3 = 1$), une stratégie de prévention basée sur

l'éducation de la population correspondra au triplet ($A_1 = 0.01$, $A_2 = 1$, $A_3 = 1$) et une stratégie de prévention basée sur la communication correspondra au triplet ($A_1 = 1$, $A_2 = 1$, $A_3 = 0.01$). Nous avons testé les stratégies définies dans le tableau 5.5.

| Stratégies | A_1 | A_2 | A_3 |
|------------|-----------|-----------|-----------|
| 1 | 10^{-2} | 10^{-2} | 10^{-2} |
| 2 | 10^{-2} | 10^{-2} | 1 |
| 3 | 10^{-2} | 1 | 10^{-2} |
| 4 | 10^{-2} | 1 | 1 |
| 5 | 1 | 10^{-2} | 10^{-2} |
| 6 | 1 | 10^{-2} | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 10^{-2} |
| 8 | 1 | 1 | 1 |

TABLE 5.5 – Les différentes stratégies imaginées

La stratégie 1 est une stratégie de référence qui permet d'observer les contrôles lorsqu'ils ont le même coût. Elle ne sera donc pas considérée pour déterminer la meilleure stratégie.

Afin de déterminer quelle est la meilleure stratégie qui réduit la panique, nous examinons celle dont les contrôles nous donnent le moins de personnes en état de panique et telle que la valeur de la fonction objectif est la plus petite. Nous notons :

$$I_{\Delta p} = \int_0^T (p(t) - p_c(t)) dt \quad (5.20)$$

où p_c et p correspondent aux densités d'individus dans un état de panique avec et sans contrôle. $I_{\Delta p}$ va permettre de juger l'efficacité des contrôles : plus la valeur de $I_{\Delta p}$ est grande, plus les contrôles réduisent la panique.

De la même manière, la quantité qui fournit une mesure similaire de l'efficacité des contrôles par rapport aux décès est définie par :

$$I_{\Delta d} = \int_0^T (d(t) - d_c(t)) dt \quad (5.21)$$

Par conséquent, pour chaque scénario, la meilleure stratégie pour réduire la panique correspondra à la stratégie ayant l'indice $I_{\Delta p}$ le plus élevé et la valeur la plus faible de la fonction de coût J définie en (5.18).

De la même façon, la meilleure stratégie pour réduire les décès correspondra à la stratégie pour laquelle l'indice $I_{\Delta d}$ sera le plus élevé et la fonction coût J la plus basse.

Dans toutes nos simulations, nous avons considéré $C_p = C_d = 1$.

Scénario 1 : foule dense avec une faible culture du risque

Les paramètres sont : $B_1 = 0.05$, $B_2 = 0.051$, $B_3 = B_4 = 10^{-3}$, $C_1 = 0.05$, $C_2 = 0.01$, $D_r = D_c = 10^{-4}$, $D_p = 1.5 \times 10^{-5}$, $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0.7$, $\rho = 0.5^4$.

Dans la figure 5.21, afin d'avoir tous les indices d'un même graphique, nous avons dû multiplier $I_{\Delta d}$ par cent.

En testant toutes les stratégies du tableau 5.5, nous constatons que la meilleure stratégie pour réduire la panique et la mort (voir Fig. 5.21) correspond à la stratégie 2 : $A_1 = 10^{-2}$, $A_2 = 10^{-2}$, $A_3 = 1$. Cependant, si l'on préfère une stratégie dont les efforts ne portent que sur un seul contrôle (stratégies 4, 6 et 7), il serait intéressant de choisir la stratégie 6.

Scénario 2 : foule éparpillée avec un faible risque de la culture

On rappelle que les paramètres sont : $B_1 = 0.1$, $B_2 = 0.11$, $B_3 = 10^{-3}$, $B_4 = 0.001$, $C_1 = 0.1$, $C_2 = 0.2$, $D_r = D_c = 10^{-4}$, $D_p = 1.5 \times 10^{-5}$, $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0.2$, $\rho = 0.5$.

Les simulations numériques de la série de stratégies du tableau 5.5 et leurs résultats représentés sur la figure 5.25 montrent que la meilleure stratégie pour réduire la panique et les décès lors de la catastrophe serait la 2 :

4. L'échelle de temps n'est pas la même qu'à la section 5.4.2 ce qui explique la différence de valeur des paramètres.

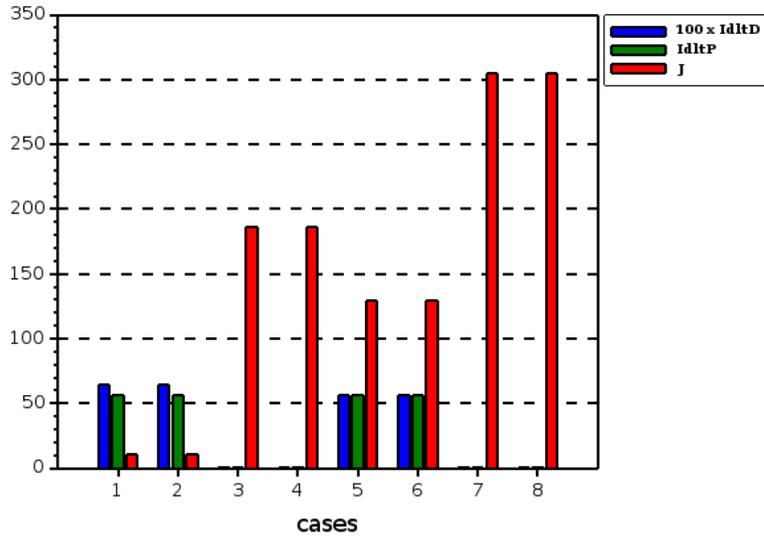


FIGURE 5.21 – $100 \times I_{\Delta d}$ (blue), $I_{\Delta p}$ (green) et J (red) pour les 8 stratégies de contrôle dans le cas d'une foule dense avec une faible culture du risque.

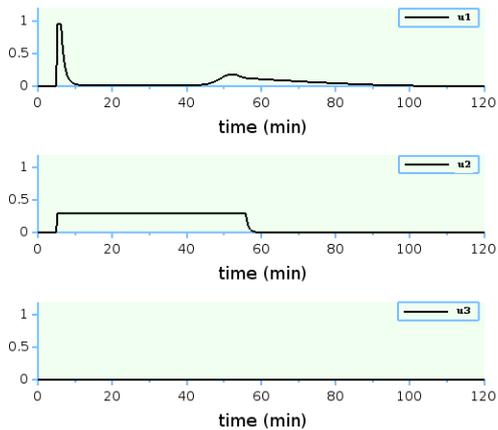


FIGURE 5.22 – Contrôles optimaux.

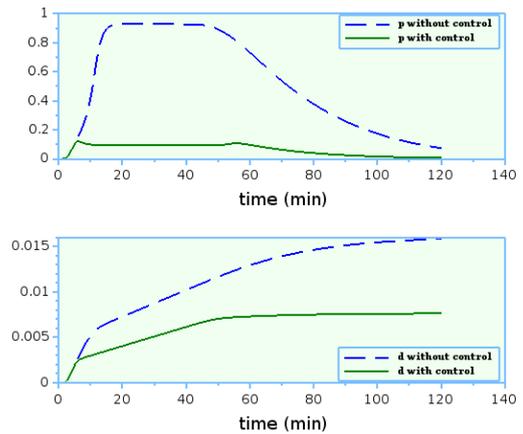


FIGURE 5.23 – Courbe des densités du nombre de paniqués et du nombre de morts.

FIGURE 5.24 – Solutions pour la meilleure stratégie dans le cas d'une foule dense avec une faible culture du risque : ($A_1 = 10^{-2}$, $A_2 = 10^{-2}$, $A_3 = 1$). (a) Gauche : Contrôles optimaux u_1 , u_2 et u_3 . (b) Droite : En haut : Densité de comportements paniqués avec (trait plein) et sans contrôle (trait en pointillé). En bas : Densité de morts avec (trait plein) et sans contrôle (trait en pointillé).

($A_1 = 10^{-2}$, $A_2 = 10^{-2}$, $A_3 = 1$). Il s'agit d'une stratégie mixte alliant prise en charge et prévention basée sur la formation de la population. La meilleure stratégie impliquant un seul contrôle est la stratégie 6.

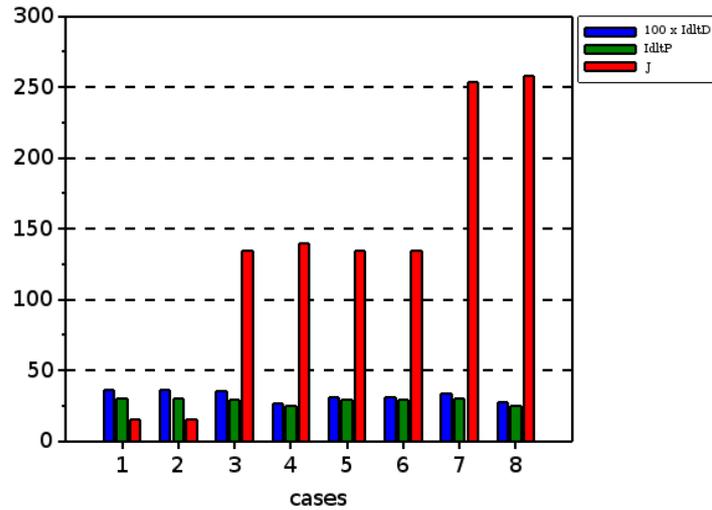


FIGURE 5.25 – $100 \times I_{\Delta d}$ (blue), $I_{\Delta p}$ (green) et J (red) pour les 8 stratégies de contrôle dans le cas d'une population éparpillée avec un faible risque de culture.

À la figure 5.28 sont représentés les contrôles optimaux et l'évolution en temps des densités de paniqués et de morts, avec ou sans contrôle.

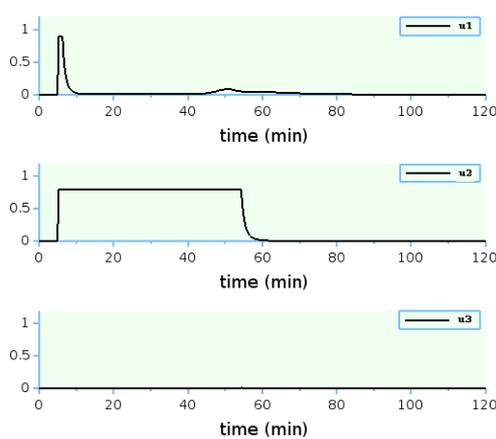


FIGURE 5.26 – Contrôles optimaux.

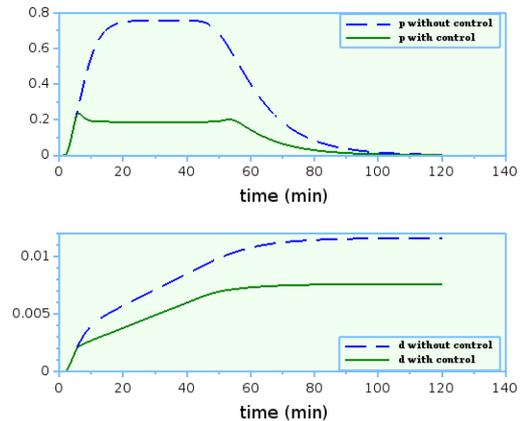


FIGURE 5.27 – Courbe des densités du nombre de paniqués et du nombre de morts.

FIGURE 5.28 – Solutions pour la meilleure stratégie dans le cas d'une foule éparpillée avec une faible culture du risque ($A_1 = 10^{-2}$, $A_2 = 10^{-2}$, $A_3 = 1$). À gauche sont représentés les contrôles optimaux u_1 , u_2 et u_3 . En haut à droite est représenté la densité de comportements paniqués avec (trait plein) et sans contrôle (trait en pointillé); en bas, la densité de morts avec (trait plein) et sans contrôle (trait en pointillé).

Ainsi, dans le cadre de la théorie (statistique) de la décision, il serait possible d'ouvrir la voie à un outil logiciel d'aide à la décision générant des scénarios probabilistes à partir d'un espace (éventuellement continu) d'actions possibles, du type de population et de fonctions mérites multi-objectifs. De cette manière, des combinaisons optimales d'efforts déployés en matière d'éducation, d'intervention et d'information pourraient être identifiées.

Chapitre 6

Perspectives

6.1 Suite du modèle APC

Le projet Com2SiCa a produit beaucoup de données et ouvert de nouvelles perspectives. Ainsi, j'envisage à court et moyen terme plusieurs suites.

Exploitation des autres données issues des enquêtes de terrain

Toutes les données expérimentales n'ont pas encore été exploitées comme celles issues des enquêtes de terrain. Durant l'enquête menée au Havre, les participants étaient immergés dans une ambiance sonore qui était découpée en séquences (bruits courants dans la ville, explosion, cris). À partir de mesures physiologiques obtenues avec des montres connectées et un questionnaire pointu, D. Provitolo a défini à chaque séquence de l'enregistrement sonore l'état émotionnel de chaque participant et la trajectoire qu'il aurait pris. Je souhaiterais reprendre ces données pour affiner la connaissance des paramètres du modèle spatial et a-spatial.

D'autres modèles contrôlés envisagés

- Le modèle APC : Ce premier travail sur le contrôle prend en compte la formation de la population, l'effet de la présence des forces de l'ordre et la communication lors de l'événement. Toutefois, le deuxième contrôle ne nous satisfaisait pas. En effet, une intervention rapide avec le bon nombre de secouristes au bon endroit permet soit d'éviter un mouvement de panique soit, si ces mouvements se déclenchent, de les réguler, de les contrôler et d'éviter ainsi qu'ils se prolongent de façon excessive. Cette réflexion a conduit à modéliser les forces de l'ordre comme une nouvelle population. Nous avons ainsi initié avec les géographes l'étude des impacts de deux variables de contrôle sur les tendances comportementales : i) la présence de secouristes (et non simplement leur effet) ; ii) l'effet de l'information transmise au cours de l'événement (sirène, téléphone portable). Il serait également intéressant de comparer ce modèle contrôlé avec un modèle hybride construit à partir du modèle APC et d'un modèle à base d'agents [129]. Ce type de modélisation constitue une approche intermédiaire entre les modèles continus et les modèles à base d'agents de systèmes d'individus en interaction. Tout en gardant le modèle APC pour modéliser une population concernée par un événement catastrophique, les opérationnels seraient considérés en tant qu'individus ou agents suivant un ensemble de règles inhérent et pouvant communiquer entre eux. Ce type de modélisation est bien adapté dans le cas où il y a un petit nombre d'agents.
- Le modèle APC et les réseaux : Actuellement, l'environnement spatial est modélisé par un réseau, les noeuds représentant un lieu doté de propriétés regroupant un ensemble d'individus soumis au panel de comportements du modèle APC, les arêtes symbolisant les axes de communication et les interactions entre noeuds. Une méthodologie mixant la théorie des équations différentielles non linéaires et la théorie des réseaux complexes nous a permis de commencer à étudier l'impact de la topologie des réseaux et de leur connectivité sur la dynamique de propagation des différents comportements. Les résultats sont actuellement basés sur des simulations. Une méthode de contrôle comme proposée dans [216] permettrait d'obtenir des résultats théoriques et de mieux comprendre, par exemple, la meilleure localisation des secouristes pour réguler les effets de panique.

Un modèle à différentes échelles

Une autre perspective à ce projet est de développer un modèle microscopique hybride reprenant le modèle APC et les modèles de force sociale. Dans ces derniers, chaque individu se déplace selon l'action de plusieurs forces externes et internes s'exerçant sur le piéton. Les forces externes proviennent des interactions physiques

dues à l'environnement tandis que les forces internes proviennent de l'objectif que s'est fixé le piéton. Les forces internes sont la réponse à une configuration ou à un état spécifique de l'environnement. Il est possible également de représenter la tendance à se tenir à l'écart du danger ou de considérer l'effet attractif d'une scène. L'accélération instantanée optimale de chaque individu est ainsi déterminée à partir des forces agissant sur le piéton, de son environnement et des obstacles. Dans le modèle proposé par [47], on retrouve deux processus que nous avons décrits dans le projet :

- le comportement provenant du stress interne pris en compte en liant le niveau de stress à la vitesse de l'individu
- le processus de contagion ou d'imitation.

Notre expertise dans la compréhension et la modélisation des comportements humains et leurs transitions doit permettre d'enrichir ce type de modèle.

Pour les opérationnels, il est important de planifier et concevoir le mouvement collectif d'un grand nombre de personnes dans de nombreuses situations à risque telles que l'évacuation de bâtiments, de stades... Bien que les premières études scientifiques sur l'évacuation des piétons aient été menées dans les années 30, ce sujet reste d'actualité notamment dû à une connaissance partielle des comportements complexes des êtres humains lors d'un tel événement. Or, lors de ce projet, les différents comportements adoptés par les individus en situation de catastrophe ainsi que leurs transitions comme l'imitation ont été analysés et décrits. De même, les liens entre états comportementaux (alerte, contrôle et panique) ont été associés à des types de comportements physiques. Il serait désormais pertinent d'intégrer ces connaissances dans des modèles microscopiques qui pourraient proposer ainsi des simulations plus réalistes. Pour cela, j'envisage le développement d'un système multi-agent (SMA) qui permet de modéliser les effets d'interactions entre les individus. Chaque individu ou agent peut rassembler différents niveaux de fonctionnement (raisonnement, comportement réactif et proactif) et différents niveaux d'interaction (coordination) en les exploitant de manière autonome. Ces modèles permettent donc de considérer les interactions locales et physiques et la possibilité d'incorporer la prise de décision individuelle et les processus d'apprentissage. Ainsi, toutes les connaissances acquises au cours de ce projet peuvent être reprises pour enrichir le SMA. Le SMA permettrait d'explorer par les simulations le fonctionnement de l'ensemble en adoptant une approche ascendante, "bottom-up" pour faire émerger des propriétés plus complexes.

6.2 Suite sur l'identifiabilité et la diagnosticabilité

Au cours de mon travail de calibration à partir de données réelles, notamment avec le modèle APC, j'ai été confrontée à un problème d'estimation des paramètres même si le modèle était identifiable. Différentes définitions d'identifiabilité des paramètres existent dans la littérature et peuvent être classés en trois classes : i) l'identifiabilité a priori, ii) l'identifiabilité a posteriori, iii) l'identifiabilité pratique.

L'identifiabilité théorique ou structurelle des paramètres du modèle que j'ai étudié examine la question de l'existence et de l'unicité d'une solution au problème d'estimation des paramètres, dans un cadre idéalisé où

- le système et le modèle ont une structure identique (pas d'erreur de caractérisation) ;
- les données sont non bruitées ;
- les signaux d'entrée et les temps de mesure peuvent être choisis à volonté.

Cependant, ce n'est qu'une condition nécessaire qui ne garantit pas l'estimation réussie des paramètres à partir de données réelles.

L'identifiabilité a posteriori considère les hypothèses suivantes :

- le système et le modèle ont une structure identique ;
- les données sont sans bruit.

L'identifiabilité a posteriori est un cas particulier de la distinguabilité de la sortie pour une collection finie d'observations sans bruit et un signal d'entrée [65, 66].

Enfin, l'identifiabilité pratique s'appuie sur la seule hypothèse que le système et le modèle ont une structure identique [67, 192]. Dans ce cas, cette notion tient compte du bruit et est généralement associée à un critère d'optimisation. Pour cette raison, cette classe d'identifiabilité est souvent liée à la théorie de l'optimisation en mathématiques.

Le problème d'estimation rencontré dans le cadre de mon travail est un problème d'identifiabilité a posteriori et peut se voir sur une étude de sensibilité des sorties du modèle par rapport aux paramètres. Par exemple, en utilisant les indices de Sobol, les sorties du modèle APC sont très peu sensibles à certains paramètres. Des travaux ont été menés pour étudier les liens entre l'identifiabilité et la sensibilité du modèle mais tous les liens n'ont pas encore été établis (voir [66]).

En ce qui concerne la diagnosticabilité, les signatures que nous avons proposées ont ouvert la voie à de nouvelles méthodes prometteuses. Toutefois, il reste encore une question fondamentale pour la diagnosticabilité

fonctionnelle : comment distinguer les trajectoires en fonction des fautes qui agissent sur le système et sur quel critère ? J'envisage pour cela deux suites possibles :

- étendre les définitions de signatures/diagnosticabilité au cadre ensembliste ;
- travailler sur les polynômes entrées-sorties et sur leurs propriétés.

6.3 À plus long terme

En 2020, nous avons développé avec G. Cantin un modèle mathématique structuré en âge décrivant la dynamique des écosystèmes forestiers et prenant en compte le phénomène de la transpiration forestière [31]. Ce dernier est un élément important du cycle hydrologique car il exerce une influence sur la dynamique forestière (voir par exemple [128]). Or, deux éléments au moins sont susceptibles de perturber ce phénomène de transpiration forestière. Tout d'abord, le dérèglement climatique induit des augmentations ou des diminutions localisées des quantités de précipitations, ainsi qu'une augmentation moyenne de la température, elle-même susceptible d'accroître la fréquence ou l'intensité des événements de sécheresse. D'autre part, l'activité humaine et les actions de déforestation, en diminuant les surfaces de forêt, perturbent la contribution forestière au cycle hydrologique. Nous avons également développé dans [31] un réseau complexe afin d'appréhender la structure hétérogène de certaines étendues forestières, tout en intégrant les phénomènes d'interaction entre îlots forestiers par échange de la ressource en eau. Dans ces modèles de réseaux, nous avons considéré un graphe dont les sommets modélisent les îlots forestiers, et dont les arêtes correspondent aux interactions entre les différents îlots. Chaque sommet du graphe est alors couplé avec un système d'équations reproduisant la dynamique des îlots. L'ensemble qui résulte de cette modélisation décrit donc la dynamique spatio-temporelle complexe d'une zone forestière hétérogène et notamment l'état d'équilibre et de coexistence des diverses catégories d'arbres (cet état d'équilibre faisant l'objet d'une attention particulière puisqu'il correspond à l'état que l'on souhaite préserver ou restaurer), mais aussi celui de disparition de l'écosystème. Cette démarche de modélisation permet ainsi de reproduire les conditions favorables à l'équilibre de l'écosystème. Dans une seconde étape, nous avons intégré sous la forme de perturbations les multiples événements susceptibles de menacer cet équilibre. En particulier, nous avons considéré les actions humaines de déforestation et les changements climatiques, dont les variations de température ou de précipitations pour étudier la robustesse des équilibres de l'écosystème forestier. Pour poursuivre ce projet de modélisation, nous sommes en contact avec des géographes et des écologistes pour récupérer des données de la forêt Amazonienne, région du monde qui voit depuis plusieurs années une augmentation de la fréquence et de l'ampleur des événements extrêmes. Ils disposent de données qualitatives (études des extrêmes climatiques tels que définis en climatologie, leurs réponses environnementales et leurs perceptions, en examinant les similitudes et les contrastes fournis par chacun de ces prismes) et quantitatives (évaporation, densité d'arbres au km^2). Afin d'étudier l'interconnexion entre climat et écosystèmes, d'évaluer les risques et la vulnérabilité liés à l'augmentation des extrêmes, nous avons proposé de concevoir avec eux un modèle mathématique et de le calibrer. Ce modèle s'appuierait sur le modèle que nous avons développé et intégrerait les interactions entre l'écosystème forestier tropical et la dynamique climatique à partir des données forestières du réseau Tropical Managed Forest Observatory (TmFO) entre autre. Il simulerait les réponses éco-dynamiques des forêts aux extrêmes climatiques. Comme dans le projet Com2SiCa, nous leur avons proposé de créer avec eux un outil de support pour la gestion forestière et la prise de décision.

Annexes

Annexe 1 – L’algorithme IdentifiabilityTree

La fonction *IdentifiabilityTree* prend en entrée le système

$$S = \{\phi(\Theta) = \phi(\tilde{\Theta}), C(\Theta), C(\tilde{\Theta})\}$$

et retourne l’arbre d’identifiabilité (Voir la définition 5).

Pour éviter les calculs inutiles, la remarque B est utilisée dans la fonction auxiliaire *CompletionWithComputedBranches*. Quand cette fonction permet de compléter un préfixe l en une branche de l’arbre d’identifiabilité, l’ensemble \mathcal{T}' retourné par cette fonction contient toutes les branches de l’arbre d’identifiabilité admettant l comme préfixe.

```
Function CompletionWithComputedBranches ( $l, \mathcal{T}$ );
.   /* Inputs : .A set  $\mathcal{T}$  of branches of the identifiability tree
.           .A list  $l$  of parameters taken among  $\{\theta_1, \dots, \theta_m\}$  */
.   /* Outputs : .A boolean HasBeenCompleted equal to True if the sets of parameters of  $l$  and of
.           one prefix of at least one element of  $\mathcal{T}$  are equal; False otherwise.
.           . The set  $\mathcal{T}'$  containing  $\mathcal{T}$  and all the branches of the form  $l$  cat  $s$  where  $s$  is
.           the suffix of a branch of  $\mathcal{T}$  admitting as prefix a permutation of  $l$ . */
.   HasBeenCompleted := False;
.    $\mathcal{T}'$  :=  $\mathcal{T}$ ;
.   For  $l' \in \mathcal{T}$  do
.   .   If a permutation of a prefix of  $l'$  is equal to  $l$  then
.   . .    $l'' := l$  cat  $l'[Length(l) + 1, \dots, m]$ ;
.   . .    $\mathcal{T}' := \mathcal{T}' \cup \{l''\}$ ;
.   . .   HasBeenCompleted := True;
.   .   End If
.   End For
.   Return [ HasBeenCompleted ;  $\mathcal{T}'$  ];
End Function;
```

Le corollaire 1 est utilisé dans la fonction suivante pour compléter un préfixe l avec des paramètres identifiables relativement à l . Pour chaque paramètre non identifiable relativement à l , si il existe, l est complété par ce paramètre non identifiable. Un appel récursif de la fonction *CompletionWithComputedBranches* est alors fait pour compléter ce nouveau préfixe.

Remarque : La fonction *CompletionWithComputedBranches* est appelée dès qu’un préfixe est construit. Il ne fait pas appel au test semi-algébrique consistant à vérifier si un ensemble est vide.

```

Function ConstructTheBranches ( $S, \{\theta_1, \dots, \theta_m\}, 0., \mathcal{T}$ );
.  /* Inputs : .the system  $S$ 
.
.      .the set  $\{\theta_1, \dots, \theta_m\}$  of parameters of system  $S$ 
.
.      .a tuple  $l$  of  $\{\theta_1, \dots, \theta_m\}$ 
.
.      .a set of branches  $\mathcal{T}$  of the identifiability tree
.
.      Output : The set  $\mathcal{T}$  of all the branches of the identifiability tree already computed and
.
.      the one(s) admitting  $l$  as prefix
.
.  SPP :=  $\{\theta_1, \dots, \theta_m\} \setminus \text{Set}(l)$ ;
.  /*SPP is the set of possible parameters to complete the prefix  $l$  */
.  hbc := False;
.  /*hbc is set to True when  $l$  is completed by function CompletionWithComputedBranches */
.  If SPP  $\neq \emptyset$  then
.  .  For  $\theta \in \text{SPP}$  do
.  . .  If hbc = False and SetOfRealSolutions ( $S \cup \{v * (\theta - \theta') = 0\}$ ) =  $\emptyset$  then
.  . . .  /* The parameter  $\theta$  is identifiable relatively to  $l$  (See Corollary 1) */
.  . . . .   $l := l \text{ cat } [\theta]$ ;
.  . . . .   $[hbc, \mathcal{T}] := \text{CompletionWithComputedBranches}(l, \mathcal{T})$ ;
.  . . . .  /* If Remark B can be applied,  $l$  is completed with the branches of  $\mathcal{T}$  already computed */
.  . . . .  SPP := SPP  $\setminus \{\theta\}$ ;
.  . . . .   $S := S \cup \{\theta = \theta'\}$ ;
.  . . .  End if
.  .  End for
.  End If
.  .  /* SPP contains now only non identifiable parameters relatively to  $l$ . */
.  If SPP =  $\emptyset$  then
.  .   $\mathcal{T} = \mathcal{T} \cup \{l\}$ 
.  .  /* In this case,  $l$  is a branch of the identifiability tree */
.  .  else
.  . .  For  $\theta \in \text{SPP}$  do
.  . . .  /* Adjoining to  $\mathcal{T}$  the set of branches admitting  $l \text{ cat } [\emptyset]$  as prefix*/
.  . . . .  SPP := SPP  $\setminus \{\theta\}$ ;
.  . . . .   $[hbc, \mathcal{T}] := \text{CompletionWithComputedBranches}(l \text{ cat } [\emptyset], \mathcal{T})$ ;
.  . . . .  If hbc = False then
.  . . . . .  /*  $l \text{ cat } [\emptyset]$  can not be completed with the branches of  $\mathcal{T}$  already computed*/
.  . . . . .   $\mathcal{T} := \mathcal{T} \cup \text{ConstructTheBranches}(S \cup \{\theta = \theta'\}, \{\theta_1, \dots, \theta_m\}, l \text{ cat } [\emptyset], \mathcal{T})$ ;
.  . . . . .  End if
.  . . .  End for
.  .  End for
.  End If
.  Return  $\mathcal{T}$ ;
End Function;

```

Cette dernière fonction retourne l'arbre d'identifiabilité du système S et de l'ensemble de paramètres $\{\theta_1, \dots, \theta_m\}$.

```

Function IdentifiabilityTree ( $S, \{\theta_1, \dots, \theta_m\}$ );
. /* Inputs : The system  $S$  and the set of all the parameters  $\{\theta_1, \dots, \theta_m\}$  */
. /* Output : The set of branches of the identifiability tree */
.  $l := []$ ;
.  $\mathcal{T} := \{[]\}$ ;
. Return ConstructTheBranches ( $S, \{\theta_1, \dots, \theta_m\}, l, \mathcal{T}$ );
End Function;

```


Annexe 2 - Outils basiques de l'analyse par intervalle

L'analyse par intervalles introduite par [144] fournit des outils de calcul d'ensembles décrits par l'union de boîtes ne se chevauchant pas. Elle est utilisée dans de nombreux domaines comme en contrôle robuste de système [112, 171, 55], en estimation [162, 170] ou en informatique [111, 135]. Cette section rappelle les concepts et les définitions de l'analyse par intervalle.

1 Définitions basiques

Un intervalle réel $[u] = [\underline{u}, \bar{u}]$ est un sous-ensemble fermé et connexe de \mathbb{R} où \underline{u} (resp. \bar{u}) est la borne inférieure (resp. supérieure) de $[u]$. L'ensemble des intervalle de \mathbb{R} est noté \mathbb{IR} .

Pour caractériser un intervalle, on peut utiliser

- son *centre* ou *milieu* : $m([u]) = \frac{\bar{u} + \underline{u}}{2}$,
- sa *longueur* ou son *diamètre* : $w([u]) = \bar{u} - \underline{u}$,
- sa *plus grande valeur absolue* (resp. plus petite valeur) : $|[u]| = \max\{|u|, u \in [u]\} = \max\{|\underline{u}|, |\bar{u}|\}$ (resp. $< [u] > = \min\{|u|, u \in [u]\} = \min\{0, |\underline{u}|, |\bar{u}|\}$).

Les intervalles étant des ensembles, les notions d'égalité ($=$), d'appartenance (\in), d'inclusion stricte (\subset) et large (\subseteq), ainsi que d'intersection (\cap) sont parfaitement définies. Cependant, la réunion de deux intervalles n'étant pas en général un intervalle, l'union de deux intervalles (\cup) est défini comme le plus petit intervalle contenant l'union de ces deux intervalles, c'est à dire :

$$[u] \cup [v] = [\min(\underline{u}, \underline{v}), \max(\bar{u}, \bar{v})].$$

Notons que deux intervalles $[u]$ et $[v]$ sont égaux si et seulement si $\underline{u} = \underline{v}$ et $\bar{u} = \bar{v}$.

2 Vecteurs et matrices d'intervalles

Un vecteur d'intervalles (ou boîte) est un vecteur dont les composantes sont des intervalles. Ce vecteur peut-être vu comme un produit cartésien d'intervalles : $[u] = [u_1] \times [u_2] \times \dots \times [u_n]$ et l'ensemble des vecteurs d'intervalles de dimension n . L'ensemble des vecteurs d'intervalles de dimension n est noté \mathbb{IR}^n .

Pour caractériser ce type de vecteur, on peut utiliser

- son *centre* ou *milieu* qui est le vecteur composé des milieux de ses composantes d'intervalle,
- sa *longueur* ou son *diamètre* qui est le maximum des longueurs de ses composantes intervalles.

Par exemple $w([-2, 2] \times [1, 3]) = 4$.

- sa *plus grande valeur absolue* $|(\cdot)|$ (resp. plus petite valeur) qui est le vecteur composé des plus grandes valeurs absolues des ses composantes intervalles (resp. plus petites).

De plus, pour un vecteur intervalle $[u]$ de composantes $[u_i]$, le réel $\|[u]\|$ est défini par $\|[u]\| = \max_i(|[u_i]|)$. L'ensemble des matrices d'intervalles réels de dimension $n \times m$ est noté $\mathbb{IR}^{n \times m}$ et

$$[A] = \begin{pmatrix} [a]_{11} & \dots & [a]_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [a]_{n1} & \dots & [a]_{nm} \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

est un élément de cet ensemble.

Une matrice intervalle carrée $[A]$ est régulière si $0 \notin \det([A])$.

Dans le cadre ensembliste, la matrice inverse $[A]^{-1}$ de $[A]$ est la plus petite matrice intervalle renfermant

l'ensemble des matrices inverses $\{A^{-1}/A \in [A]\}$. Soit la matrice $[I_\epsilon]$ ayant sur sa diagonale $[1 - \epsilon, 1 + \epsilon]$ et $[0 - \epsilon, 0 + \epsilon]$ ailleurs. Alors il existe $\epsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $[A]^{-1}[A] \subset [I_\epsilon]$.

Enfin, une matrice intervalle $[A]$ est dite définie positive si chaque $A \in [A]$ est définie positive au sens classique.

Une matrice symétrique d'intervalles est définie positive si et seulement si elle est régulière et contient au moins une matrice définie positive [174].

3 Pavage et sous-pavage

Avant de décrire les notions de pavés et sous-pavés, la notion de bissection est rappelée.

Définition 25. La bissection d'une boîte $[x]$ est une opération qui partitionne la boîte en deux autres boîtes $L(u)$ et $R(u)$ telles que

$$\begin{aligned} L[u] &= [\underline{u}_1, \bar{u}_1] \times \dots \times \left[\underline{u}_j, \frac{\underline{u}_j + \bar{u}_j}{2} \right] \times \dots \times [\underline{u}_n, \bar{u}_n], \\ R[u] &= [\underline{u}_1, \bar{u}_1] \times \dots \times \left[\frac{\underline{u}_j + \bar{u}_j}{2}, \bar{u}_j \right] \times \dots \times [\underline{u}_n, \bar{u}_n], \end{aligned} \quad (6.2)$$

où la j ème composante de $[u]$ est partitionnée.

Par exemple la bissection de la première composante de $[u] = [-2, 2] \times [1, 3]$ donne deux boîtes $L[u] = [-2, 0] \times [1, 3]$ et $R[u] = [0, 2] \times [1, 3]$.

Un sous-pavé IU de la boîte $[u] \subset \mathbb{R}^n$ est l'union de sous-boîtes de $[u]$ ne se superposant pas et obtenues par une suite finie de bisections de $[u]$.

D'après [104], un sous-pavé peut être représenté par un arbre binaire.

Quand un sous-pavé IU de la boîte $[u]$ couvre $[u]$ alors c'est un pavé de $[u]$. Dans l'exemple ci-dessus $L[u]$ et $R[u]$ sont des pavés de $[u]$.

4 Opérations arithmétiques

Les opérations mathématiques permettant de manipuler des variables d'intervalle (intervalles, boîtes ou matrices) sont présentées dans cette sous-section. Plus de détails peuvent être trouvés dans [86, 55, 50].

Les opérations classiques $\{+, -, \times, /\}$ sur les nombres réels ont été étendues aux intervalles :

$$[u] \diamond [v] = \{u \diamond v \mid u \in [u], v \in [v]\},$$

avec $\diamond \in \{+, -, \times, /\}$.

Soient $[u]$ et $[v]$ deux intervalles de \mathbb{IR} , alors le résultat de $[u] \diamond [v]$ est donné par

$$\left\{ \begin{array}{l} [u] + [v] = [\underline{u} + \underline{v}, \bar{u} + \bar{v}], \\ [u] - [v] = [\underline{u} - \bar{v}, \bar{u} - \underline{v}], \\ [u] \times [v] = [\min(\underline{u}\underline{v}, \underline{u}\bar{v}, \bar{u}\underline{v}, \bar{u}\bar{v}), \max(\underline{u}\underline{v}, \underline{u}\bar{v}, \bar{u}\underline{v}, \bar{u}\bar{v})], \\ 1/[v] = \begin{cases} [-\infty, \infty] & \text{si } 0 \in [v], \\ [1/\bar{v}, 1/\underline{v}] & \text{sinon} \end{cases} \\ [u]/[v] = [u] \times 1/[v]. \end{array} \right. \quad (6.3)$$

Par exemple, avec les intervalles $[u] = [1, 3]$ et $[v] = [-1, 2]$, nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} [u] - [v] = [1, 3] - [-1, 2] = [-1, 4], \\ [u] \times [v] = [1, 3] \times [-1, 2] = [-3, 6], \\ [u]/[v] = [1, 3]/1/[-1, 2] = [-\infty, +\infty], \text{ car } 0 \in [v]. \end{array} \right. \quad (6.4)$$

Les fonctions réelles monotones f peuvent être souvent étendues au contexte intervalle en utilisant l'expression

$$f([u]) = \left[\inf_{u \in [u]} (f(u)), \sup_{u \in [u]} (f(u)) \right]. \quad (6.5)$$

Par exemple, appliqué aux fonctions exp et carré, on obtient

— pour l'exponentielle : $\exp([u]) = [\exp(\underline{u}), \exp(\bar{u})]$, d'où $\exp([0, 1]) = [1, e]$.

— pour la fonction carré :

$$[u]^2 = \begin{cases} [0, \max(\underline{u}^2, \bar{u}^2)] & \text{si } 0 \in [u] \\ [\min(\underline{u}^2, \bar{u}^2), \max(\underline{u}^2, \bar{u}^2)] & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } [-2, 2]^2 = [0, 4]. \quad (6.6)$$

Attention, $[-2, 2] \times [-2, 2] = [-4, 4] \neq [0, 4]$.

Les fonctions non monotones nécessitent une analyse plus spécifique.

5 Les fonctions d'inclusion

Définition 26. La fonction intervalle $[f]$ de \mathbb{IR}^n à \mathbb{IR}^m est une fonction d'inclusion pour f si

$$\forall [x] \in \mathbb{IR}^n, f([x]) \subseteq [f]([x]).$$

L'un des objectifs de l'analyse par intervalle est de fournir pour une grande classe de fonctions une fonction d'inclusion $[f]$ telle que pour un intervalle $[x]$, l'image $[f]([x])$ ne soit pas trop grande et soit calculée assez rapidement.

Définition 27. Une fonction d'inclusion $[f]$ de f est convergente si pour toute suite de boîtes $[x](k)$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} w([x](k)) = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} w([f]([x](k))) = 0,$$

ce qui implique

$$\forall [x] \in \mathbb{IR}^n, [f]([x]) = f([x]).$$

Définition 28. La fonction d'inclusion $[f]$ de f est minimale si pour tout $[x]$, $[f]([x])$ est la plus petite boîte contenant $f([x])$. Dans ce cas, $[f]$ est noté $[f]^*$ et nous avons

$$\forall [x] \in \mathbb{IR}^n, [f]^*([x]) = f([x]).$$

Définition 29. Une fonction $[f]$ d'inclusion est monotone si

$$[x] \subset [y] \Rightarrow [f]([x]) \subset [f]([y]),$$

avec $[x]$ et $[y]$ deux boîtes de \mathbb{IR}^n .

Étant donné une fonction f de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} , il existe différentes méthodes pour trouver une fonction d'inclusion convergente. La méthode la plus simple et la plus directe consiste à remplacer tout nombre réel par un intervalle contenant ce nombre et les fonctions élémentaires réelles par leurs extensions aux intervalles. Cette méthode fournit la fonction d'inclusion naturelle.

Théorème 5. Ce théorème est repris de [104].

Soit une fonction f de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} telle que $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = y$ est exprimée comme la composée finie des opérateurs $+$, $-$, \times , $/$ et des fonctions élémentaires telles que \sin , \cos , \exp , \dots

Une fonction d'inclusion monotone $[f]$ de f , vérifiant pour tout vecteur d'intervalles réels $[x] = x$ l'égalité $[f](x) = f(x)$, est obtenue en remplaçant chaque variable x_i par une variable intervalle $[x_i]$ et chaque opérateur ou fonction par son équivalent intervalle. Si f n'implique que des opérateurs continus et des fonctions élémentaires continues alors $[f]$ est convergente. Si de plus, chacune des composantes de x apparaît au plus une fois dans l'expression formelle de f alors $[f]$ est minimale.

Exemple 5.1. Soit la fonction $f : x \mapsto x^2 + 2x + 2$. Cette fonction peut se réécrire de la façon suivante :

$$\begin{cases} f_1(x) &= x(x+1) + 2, \\ f_2(x) &= x \times x + 2 + 2 \times x + 2 \\ f_3(x) &= x^2 + 2 \times x + 2, \\ f_4(x) &= (x+1)^2 + 1. \end{cases} \quad (6.7)$$

Pour $[x] = [-2, 1]$, nous avons

$$\begin{cases} [f_1]([x]) &= [x]([x]+2) + 2 = [-4, 5], \\ [f_2]([x]) &= [x] \times [x] + 2 \times [x] + 2 = [4, 8], \\ [f_3]([x]) &= [x]^2 + 2 \times [x] + 2 = [-2, 8], \\ [f_4]([x]) &= ([x]+1)^2 + 1 = [1, 5]. \end{cases} \quad (6.8)$$

$[f_4]$ donne le plus petit intervalle solution et on peut prouver qu'il est minimal.

On peut remarquer que

- l'évaluation de la fonction f dépend du nombre d'occurrences de chaque variable d'intervalle dans l'expression de la fonction f
- il faut réduire l'apparition multiple de $[x]$
- si chaque variable n'apparaît qu'une seule fois dans la fonction f , la fonction d'inclusion naturelle est minimale.

Malheureusement, il n'y a pas de méthode qui puisse être utilisée systématiquement pour trouver la fonction d'inclusion minimale. La fonction d'inclusion naturelle reste le moyen le plus simple d'évaluer une fonction d'intervalle.

Une approche pour réduire le pessimisme consiste à considérer les fonctions d'inclusion centrées basées sur le développement en série de Taylor en terme d'intervalles [152, 169]. Le critère de convergence des fonctions d'inclusion a été étudié par Moore [144]. Dans son travail, l'ordre de convergence d'une fonction d'inclusion est défini comme le plus grand entier α qui satisfait :

$$\exists \beta \in \mathbb{R}^+ / w([f]([x])) - w(f([x])) \leq \beta w([x])^\alpha.$$

L'ordre de convergence d'une fonction d'inclusion minimale est infini. Il a été montré que la fonction d'inclusion centrée est plus intéressante que la fonction d'inclusion naturelle lorsque la largeur des intervalles est petite. Mais pour des intervalles de taille plus importants, il est préférable d'utiliser la fonction d'inclusion naturelle.

6 Image réciproque d'ensembles via l'analyse par intervalle

Considérons le problème consistant à déterminer un ensemble solution \mathbb{S} appartenant a priori à un ensemble de recherche défini par :

$$\mathbb{S} = \{\lambda \in \mathbb{U} \mid f(\lambda) \in [\beta]\} = f^{-1}([\beta]) \cap \Delta, \quad (6.9)$$

où $[\beta]$ est a priori connu et f est une fonction linéaire pas nécessairement inversible selon la définition classique. (6.9) consiste à calculer l'image réciproque de f . Ce problème est connu comme un problème d'inversion pouvant être résolu par l'algorithme récursif SIVIA (Set Inversion Via Interval Analysis) [105]. Résoudre les systèmes (2.56) et (2.58) revient à trouver $[\theta]$ tel que $0 \in [A][\theta] - [b]$.

L'algorithme explore un domaine initial admissible pour les paramètres en le décomposant de manière récursive en sous-boîtes qualifiées de faisables ou non faisables, ceci sans perdre aucune solution.

Cet algorithme permet d'obtenir une enveloppe garantie contenant l'ensemble solution et telle que

$$\underline{\mathbb{S}} \subseteq \mathbb{S} \subseteq \overline{\mathbb{S}}. \quad (6.10)$$

L'enveloppe intérieure $\underline{\mathbb{S}}$ est composée de boîtes faisables c'est à dire que $f([\lambda]) \subseteq [\beta]$. Une boîte non faisable $[\lambda]$ vérifiera $f([\lambda]) \cap [\beta] = \emptyset$. Dans les autres cas, la boîte sera dite indéterminée. Cette dernière est alors divisée et testée de nouveau jusqu'à atteindre un seuil de précision déterminé au départ $\varepsilon > 0$. Ce critère assure que SIVIA se terminera après un nombre fini d'itérations.

L'algorithme SIVIA basé sur un test d'inclusion permet d'obtenir deux sous-pavés avec une précision ε . La relation entre les deux sous-pavés peut être caractérisée par :

$$\Delta \mathbb{S} = \overline{\mathbb{S}} \setminus \underline{\mathbb{S}}, \quad (6.11)$$

où $\Delta \mathbb{S}$ est appelé la zone d'incertitude du test et pour lequel aucune décision ne peut être prise durant le test.

Les propriétés de ces ensembles solution sont :

- si $\overline{\mathbb{S}} = \emptyset$, le problème (6.9) n'a pas de solution,
- si $\underline{\mathbb{S}} \neq \emptyset$, il existe au moins solution pour (6.9).

Annexe 3 - Analyse de sensibilité par les indices de Sobol

1 Rappels sur les indices de Sobol

L'analyse de sensibilité globale permet d'analyser l'impact de la variabilité des facteurs d'entrée du modèle. Par exemple, à la figure 6.1, on souhaite savoir quel est le paramètre le plus influent entre le paramètre B_1 et le paramètre α . Est-ce que 70% de la variation de C est causée uniquement par la variation de B_1 ou par 20% de la variation de α ou 10% d'interaction des 2 paramètres (pour l'analyse de sensibilité globale). Ces pourcentages peuvent s'interpréter directement par des mesures de sensibilité. En déterminant les paramètres responsables

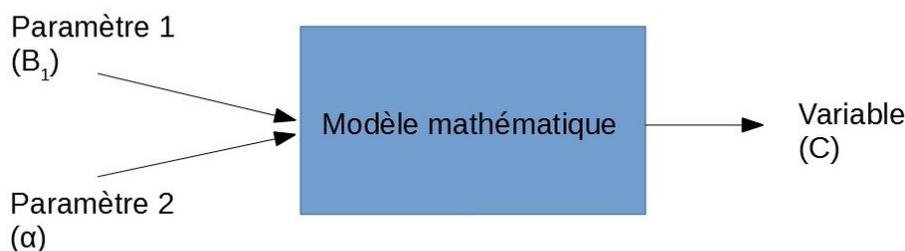


FIGURE 6.1 – Quel paramètre est le plus influent sur la variable Y ?

de cette variabilité, l'analyse de sensibilité permet de prendre les mesures nécessaires pour diminuer la variance de la sortie si celle-ci est synonyme d'imprécision, ou encore d'alléger le modèle en fixant les paramètres dont la variabilité n'influe pas sur la variable de sortie. On peut résumer l'étude de sensibilité comme suit. C'est une

- Étude qui quantifie l'influence des différents paramètres sur la réponse du modèle mathématique
- Étude qui permet de déduire quels sont les paramètres qui contribuent le plus à la variabilité de la réponse du modèle, les paramètres les moins influents et ceux qui interagissent avec les autres.

Comme nous allons le voir dans la suite, l'Analyse de Sensibilité Globale (ASG) est basée sur un calcul de variance [65, 179]. Concrètement, l'indice calculé évalue si la trajectoire générée par le modèle lorsqu'on varie un des paramètres va dévier de beaucoup de la trajectoire initiale.

1.1 Théorie

Exemple 1.1. Reprenons l'exemple des paramètres $\theta_1 = B_1$ et $\theta_2 = \alpha$ où mathématiquement, θ_1 et θ_2 sont des variables aléatoires. Tous les autres paramètres sont fixés. On souhaite savoir ce qu'il se passe lorsqu'on fixe un des paramètres. Supposons que le paramètre $\theta_1 := B_1$ soit fixé à $\theta_1^* = 0.5$ et prenons un échantillon de valeurs de α . En faisant des simulations avec cet échantillon, nous obtenons des trajectoires et en particulier des trajectoires de C (voir figure 6.2). Pour savoir si ces trajectoires sont "éloignées", on calcule la variance qui est notée $V_{\theta \sim 1}(C|\theta_1)$ où $\theta \sim 1$ est l'ensemble de tous les paramètres sauf le premier, $\theta_1 = B_1$. Dans notre cas, cet ensemble se réduit à α . La notation $C|\theta_1$ signifie que l'on calcule la trajectoire en ayant fixé le paramètre $\theta_1 = B_1$. Ainsi, pour B_1 fixé, on a une idée de la dispersion des trajectoires lorsqu'on varie tous les autres paramètres. Toutefois, cette dispersion dépend de la valeur de B_1 choisie au départ. On va donc reprendre le calcul de la variance pour différentes valeurs de B_1 et on va calculer la moyenne E_{θ_1} des variances calculées

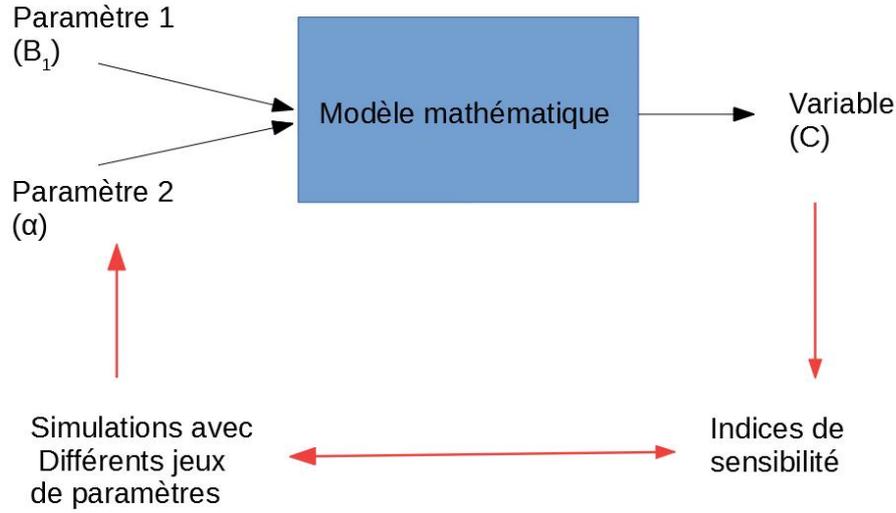


FIGURE 6.2 – Principe pour calculer l'indices de Sobol $S_{1,2}$.

avec les différentes valeurs de B_1 . En fait, on calcule une distance moyenne en ayant fait varier le paramètre B_1 . Mathématiquement, cette moyenne sera notée $E_{\theta_1}(V_{\theta \sim 1}(C|\theta_1))$. Ainsi, si la valeur de cette moyenne est grande, le paramètre aura peu d'influence et réciproquement.

Cette relation n'est pas utilisée directement pour définir les indices de sensibilité. D'après le théorème de la variance totale, on a :

$$V(\theta) = E_{\theta_1}(V_{\theta \sim 1}(C|\theta_1)) + V_{\theta_1}(E_{\theta \sim 1}(C|\theta_1)).$$

Ainsi, une faible valeur de $E_{\theta_1}(V_{\theta \sim 1}(C|\theta_1))$ ou une grande valeur de $V_{\theta_1}(E_{\theta \sim 1}(C|\theta_1))$ implique que θ_1 est un paramètre influent. La variance conditionnelle $V_{\theta_1}(E_{\theta \sim 1}(C|\theta_1))$ est appelée l'effet du premier ordre de θ_1 sur C .

La méthode présentée ici consiste à décomposer la variance de la sortie du modèle Y en une décomposition ANOVA (Analysis of Variance). L'équation décrivant la décomposition fonctionnelle de la variance totale $V(t)$ de la réponse du modèle, s'écrit

$$V(t) = \sum_{i=1}^{n_p} V_i(t) + \sum_{1 \leq i < j \leq n_p} V_{i,j}(t) + \dots + V_{1,\dots,n_p}(t)$$

avec

$$\begin{aligned} V_i(t) &= \text{Var}[Y_i(t, \theta_i)] = V_{\theta_i}(E_{\theta \sim i}(Y|\theta_i)), \\ V_{i,j}(t) &= \text{Var}[Y_{i,j}(t, \theta_i, \theta_j)] = \text{Var}_{\theta_i, \theta_j}[E_{\theta \sim i,j}[Y(t, \theta) | \theta_i, \theta_j]] - V_i(t) - V_j(t), \\ &\vdots \\ V_{1,\dots,n_p}(t) &= V(t) - \sum_{i=1}^{n_p} V_i(t) - \sum_{1 \leq i < j \leq n_p} V_{i,j}(t) - \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{n_p-1} \leq n_p} V_{i_1,\dots,i_{n_p-1}}(t). \end{aligned} \tag{6.12}$$

où θ est un vecteur de paramètres représentés par des variables aléatoires indépendantes et uniformément distribuées dans $[0; 1]^{n_p}$, n_p désigne le nombre de paramètres étudiés dans l'analyse.

Le principe général pour calculer les indices consiste à simuler un grand nombre de fois les sorties en faisant varier 1 ou des paramètres.

En résumé, on a :

Définition 30. Soit Y une sortie du modèle de carré intégrable et θ_i les paramètres du modèle.

— L'indice de Sobol ou indice du premier ordre associé à un paramètre θ_i , noté S_i est défini par :

$$S_i(t) = \frac{V_{\theta_i}(E_{\theta \sim i}(Y|\theta_i))(t)}{V(Y)(t)}.$$

$V(Y)$ désigne la variance totale. Le terme $V_{\theta_i}(E_{\theta \sim i}(Y|\theta_i))$ est un réel quantifiant la dispersion de Y (qui est la sortie du modèle) lorsque θ_i est le seul paramètre à varier. Plus cette variance est élevée et plus le paramètre θ_i est influent sur la sortie Y , c'est-à-dire que celle-ci est d'autant plus sensible à θ_i .

— L'indice du second ordre associé aux paramètres θ_i, θ_j , noté $S_{i,j}$ est défini par :

$$S_{i,j}(t) = \frac{V_{\theta_i, \theta_j}(E_{\theta \sim i,j}(Y(t, \theta) | \theta_i, \theta_j)) - V_i(t) - V_j(t)}{V(t)}.$$

Il mesure la sensibilité de la variance de la sortie Y à l'interaction des paramètres θ_i et θ_j , c'est à dire la sensibilité de Y aux variations conjuguées des paramètres θ_i et θ_j qui n'est pas prise en compte dans $S_i(t)$ et $S_j(t)$.

— De manière équivalente, on peut établir les définitions des fonctions de sensibilité d'ordre supérieur à deux.

Par exemple, pour 3 paramètres, on a

- fonctions de sensibilité d'ordre 1 : $S_1(t), S_2(t), S_3(t)$;
- fonctions de sensibilité d'ordre 2 : $S_{1,2}(t), S_{1,3}(t) ; S_{2,3}(t)$
- fonctions de sensibilité d'ordre 3 : $S_{1,2,3}(t)$.

Remarquons que

1. les indices sont toujours positifs
2. plus la fonction de sensibilité est proche de 1 pour tout instant de mesure $t_k \in \{t_1, \dots, t_N\}$, plus le paramètre est influent (la somme des indices de sensibilité vaut 1).
3. La somme de toutes les fonctions de sensibilité est égale à 1.

Par exemple, pour 3 paramètres, on a

$$S_1(t) + S_2(t) + S_3(t) + S_{1,2}(t) + S_{1,3}(t) + S_{2,3}(t) + S_{1,2,3}(t) = 1.$$

4. S'il y a p paramètres, le nombre de fonctions de sensibilité à calculer, de l'ordre 1 à l'ordre n_p , est de $2^{n_p} - 1$. Ce nombre peut parfois exploser en fonction du nombre de paramètres à étudier. On peut alors calculer les indices (fonctions) de sensibilité totaux, qui expriment la sensibilité totale de la sortie vis-à-vis d'un paramètre, c'est-à-dire la sensibilité sous toutes ses formes en regroupant la sensibilité au paramètre seul (mesure de sa contribution individuelle) et la sensibilité aux interactions avec les autres paramètres (mesure de sa contribution collective) (Voir [179]). Par exemple, l'indice total de Sobol en θ_1 va prendre en compte tous les jeux de paramètres contenant θ_1 (voir figure 6.3)

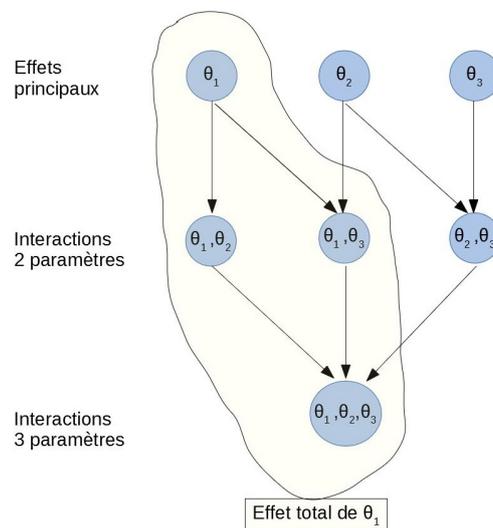


FIGURE 6.3 – Effet total du paramètre θ_1 lorsqu'on a 3 paramètres au départ.

Définition 31. La fonction de sensibilité totale $S_{\theta_i}(t)$ de la sortie par rapport à un paramètre θ_i est définie comme la somme de toutes les fonctions de sensibilité relatives au paramètre θ_i :

$$S_{T_i}(t) = \sum_{k \# i} S_k(t) = 1 - S_{\sim i}(t) = 1 - \frac{V_{\theta \sim i}(E_{\theta_i}(Y | \theta \sim i))}{Var(Y)}$$

où $\#i$ représente tous les ensembles d'indices contenant l'indice i et $S_{\sim i}$ la somme des fonctions de sensibilité de la sortie relatives à tous les paramètres, sauf θ_i .

Par exemple, pour 3 paramètres, sachant que la somme de toutes les fonctions de sensibilité est égale à 1, on a :

- $S_{T_1}(t) = S_1(t) + S_{1,2}(t) + S_{1,3}(t) + S_{1,2,3}(t) = 1 - S_2(t) - S_3(t) - S_{2,3}(t)$;
- $S_{T_2}(t) = S_2(t) + S_{1,2}(t) + S_{2,3}(t) + S_{1,2,3}(t)$;
- $S_{T_3}(t) = S_1(t) + S_{1,3}(t) + S_{2,3}(t) + S_{1,2,3}(t)$.

Pour ce modèle à 3 paramètres, la première formulation de S_{T_1} nécessite deux fonctions de sensibilité d'ordre 2 et une fonction de sensibilité d'ordre 3 alors que la deuxième formulation suppose la connaissance de deux fonctions d'ordre 1 et une fonction d'ordre 2.

Remarque 34. Les espérances (moyennes) et les variances sont par définition des intégrales dans et sont calculés numériquement en utilisant les estimateurs de Monte Carlo.

1.2 Principe des calculs

Supposons que l'on souhaite calculer l'intégrale

$$I = \int_D f(x) dx$$

où D est un espace de plus ou moins grande dimension (dans notre cas, c'est l'espace des paramètres) et f est une fonction intégrable. Soit x_1, \dots, x_N la réalisation d'un N -échantillon d'une variable aléatoire uniforme sur D (échantillonnage aléatoire). Une approximation de I par la méthode de Monte Carlo est

$$\hat{I}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i).$$

La convergence (presque sûre) de I_N vers I découle de la loi forte des grands nombres. L'espérance de toute fonction d'une variable aléatoire de densité quelconque peut être approchée par

$$\hat{E}(f(X)) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)$$

où $(x_i)_{i=1, \dots, N}$ est un N -échantillon de réalisations de la variable aléatoire X .

Exemple 1.2. Regardons l'estimation des indices de sensibilité par la méthode de Monte Carlo dans le cas de l'exemple 1.1. Considérons un N_{sim} échantillon $\tilde{\theta}_{N_{sim}} = (\theta_{j1}, \theta_{j2})_{j=1, \dots, N_{sim}}$ de réalisations des paramètres (θ_1, θ_2) . On rappelle que $\theta_1 = B_1$ et $\theta_2 = \alpha$ et qu'on cherche les indices de Sobol en les instants $(t_k)_{k=1, \dots, N}$. L'espérance de Y , $E(Y) = \hat{y}_0$ et sa variance $V(Y)$ sont estimées par

$$\hat{y}_0(t_k) = \frac{1}{N_{sim}} \sum_{j=1}^{N_{sim}} Y(t_k, (\theta_{j1}, \theta_{j2})) \quad \text{et} \quad \hat{V}(Y) = \frac{1}{N_{sim}} \sum_{j=1}^{N_{sim}} Y(t_k, (\theta_{j1}, \theta_{j2}))^2 - \hat{y}_0^2.$$

L'estimation des indices de sensibilité nécessite l'estimation d'espérances de variance conditionnelle. Sobol a proposé une technique d'estimation. En simplifiant temporairement les notations, on a

$$V_1 = V(E(Y | \theta_1)) = \underbrace{E(E(Y | \theta_1)^2)}_{U_1} - E(E(Y | \theta_1))^2 = U_1 - E(Y)^2.$$

Sobol propose d'estimer U_1 , c'est à dire l'espérance du carré de l'espérance de Y conditionnellement à θ_1 comme une espérance classique mais en tenant compte du conditionnement à θ_1 en faisant varier entre les deux appels à Y tous les paramètres sauf le paramètre θ_1 . Cela nécessite deux échantillons de réalisations pour les paramètres. Soient $\tilde{\theta}_{N_{sim}}^{(1)} = (\theta_{k1}^{(1)}, \theta_{k2}^{(1)})_{k=1, \dots, N_{sim}}$ et $\tilde{\theta}_{N_{sim}}^{(2)} = (\theta_{k1}^{(2)}, \theta_{k2}^{(2)})_{k=1, \dots, N_{sim}}$ ces échantillons. Alors, une estimée de U_1 est :

$$\hat{U}_1 = \frac{1}{N_{sim}} \sum_{k=1}^{N_{sim}} Y(\theta_{k1}^{(1)}, \theta_{k2}^{(1)}) \times Y(\theta_{k1}^{(1)}, \theta_{k2}^{(2)}).$$

L'indice de sensibilité de premier ordre est alors estimé par

$$\hat{S}_1 = \frac{\hat{V}_1}{\hat{V}(Y)} = \frac{\hat{U}_1 - \hat{y}_0^2}{\hat{V}(Y)}.$$

Pour la variance totale, notons $V_{\sim 1} = V_{\theta_{\sim 1}}(E_{\theta_1}(Y | \theta \sim 1))$. $V_{\sim 1}$ est la variance de l'espérance de Y conditionnellement à tous les paramètres sauf θ_1 . $V_{\sim 1}$ est alors estimé comme V_1 sauf qu'au lieu de faire varier tous les paramètres sauf θ_1 , nous ne faisons varier que θ_1 . Comme précédemment

$$V_{\sim 1} = E(E(Y | \theta_{\sim 1})^2) - E(E(Y | \theta_{\sim 1}))^2 = U_{\sim 1} - E(Y)^2$$

et

$$U_{\sim 1} = \frac{1}{N_{sim}} \sum_{k=1}^{N_{sim}} Y(\theta_{k1}^{(1)}, \theta_{k2}^{(1)}) \times Y(\theta_{k1}^{(2)}, \theta_{k2}^{(1)}).$$

On obtient

$$\hat{S}_{T_i} = 1 - \frac{\hat{U}_{\sim i} - \hat{y}_0^2}{\hat{V}(Y)}.$$

Remarque 35. L'analyse de sensibilité peut-être faite avec le package *ODEsensitivity* (Theers et al., 2016) implémenté dans le logiciel R. La notice se trouve à l'adresse : <https://d-nb.info/1160443556/34>

2 Résultats

J'ai supposé que les paramètres intrinsèques pouvaient varier entre 0.01 et 0.5 sauf B_3 et B_4 qui varient entre 0.01 et 0.1. En effet, d'après les psychologues, le pourcentage d'individus en comportements de panique ou de contrôle adoptant un comportement d'alerte est faible comparé aux autres transitions naturelles. Les paramètres d'imitation varient eux entre 0.01 et 0.9. J'ai également supposé que la fonction de retour φ est identiquement nulle pour représenter la tendance des indices de Sobol. De plus, les indices de Sobol n'ayant pas le même ordre de grandeur pour les paramètres intrinsèques et les paramètres d'imitation, ils ont été tracés sur des graphes distincts. Les figures 6.7, 6.11 représentent les indices de Sobol du premier ordre et total respectivement par rapport aux paramètres intrinsèques. Les figures 6.15, 6.19 représentent les indices de Sobol du premier ordre et total respectivement par rapport aux paramètres d'imitation.

On peut remarquer que les sorties du modèle sont très sensibles aux paramètres intrinsèques par rapport aux paramètres d'imitation. Certains valeurs des indices de Sobol concernant les paramètres d'imitation laissent à penser qu'ils ne sont pas identifiables. En effet, on peut obtenir un modèle identifiable en réduisant l'intervalle d'appartenance des paramètres. Cela ne veut pas dire que le processus d'imitation ne joue aucun rôle dans la dynamique des comportements. Il faut en fait pouvoir affiner la connaissance de la valeur des paramètres intrinsèques, pour pouvoir estimer les paramètres d'imitation.

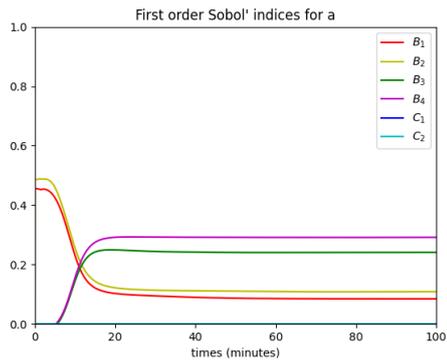


FIGURE 6.4 – Indice de Sobol du premier ordre associé aux paramètres intrinsèques par rapport à la sortie a

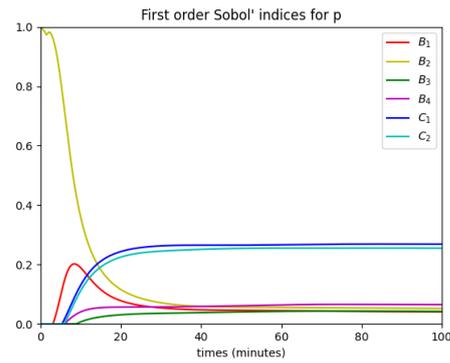


FIGURE 6.5 – Indice de Sobol du premier ordre associé aux paramètres intrinsèques par rapport à la sortie p

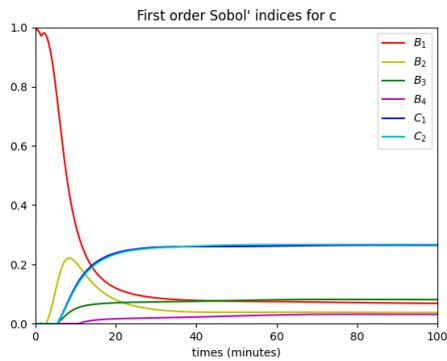


FIGURE 6.6 – Indice de Sobol du premier ordre associé aux paramètres intrinsèques par rapport à la sortie c

FIGURE 6.7 – Indices de Sobol du premier ordre associés aux paramètres intrinsèques par rapport aux sorties a , p et c .

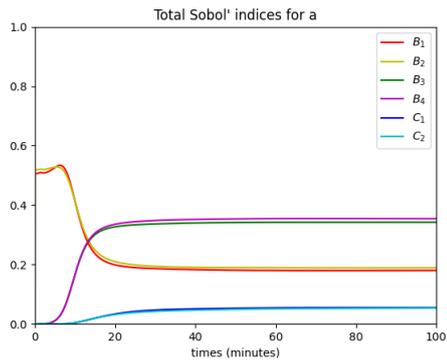


FIGURE 6.8 – Indice total de Sobol' associé aux paramètres intrinsèques par rapport à la sortie a

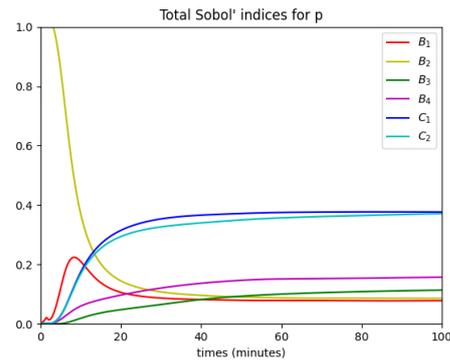


FIGURE 6.9 – Indice total de Sobol' associé aux paramètres intrinsèques par rapport à la sortie p

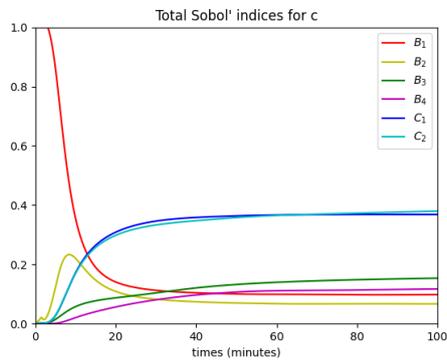


FIGURE 6.10 – Indice total de Sobol' associé aux paramètres intrinsèques par rapport à la sortie c

FIGURE 6.11 – Indice total de Sobol' associé aux paramètres intrinsèques par rapport aux sorties a , p et c .

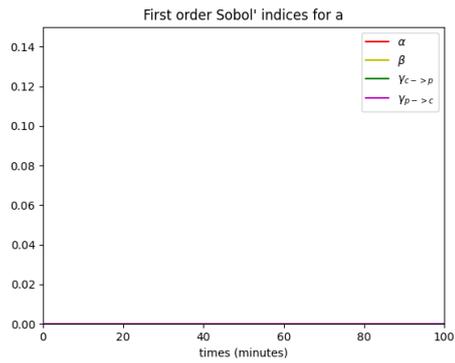


FIGURE 6.12 – Indice de Sobol du premier ordre associé aux paramètres d'imitation par rapport à la sortie a



FIGURE 6.13 – Indice de Sobol du premier ordre associé aux paramètres d'imitation par rapport à la sortie p

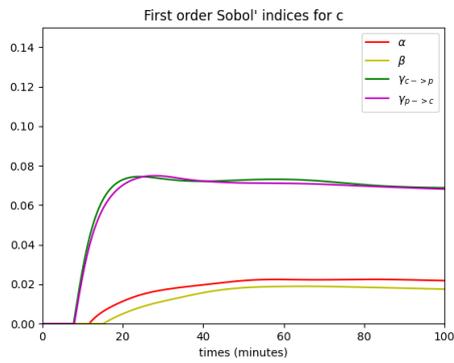


FIGURE 6.14 – Indice de Sobol du premier ordre associé aux paramètres d'imitation par rapport à la sortie c

FIGURE 6.15 – Indices de Sobol du premier ordre associés aux paramètres d'imitation par rapport aux sorties a , p et c .



FIGURE 6.16 – Indice total de Sobol associé aux paramètres d'imitation par rapport à la sortie a



FIGURE 6.17 – Indice total de Sobol associé aux paramètres d'imitation par rapport à la sortie p

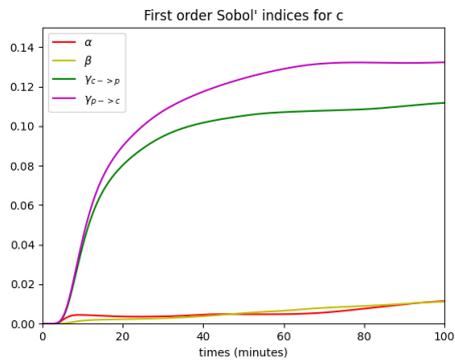


FIGURE 6.18 – Indice total de Sobol associé aux paramètres d'imitation par rapport à la sortie c

FIGURE 6.19 – Indice total de Sobol associé aux paramètres d'imitation par rapport aux sorties a , p et c .

Bibliographie

- [1] Pn isi, rapport sécurité des personnes, comportement humain / annexe 3, comportement humain face aux incendies et autres situations de danger. Technical report, Projet National Ingénierie de la Sécurité Incendie, 64 p., 2012.
- [2] O. Adrot and S. Ploix. Fault detection based on set-membership inversion. In Proceedings of SAFEPROCESS'06, pages 619–624, Beijing, China, 2006.
- [3] F. Akbar, G. Mark, I. Pavlidis, and R. Gutierrez-Osuna. An empirical study comparing unobtrusive physiological sensors for stress detection in computer work. Sensors, 19(17), 2019.
- [4] T. Alamo, J. M. Bravo, and E. F. Camacho. Guaranteed state estimation by zonotopes. Automatica, 41(6) :1035–1043, 2005.
- [5] M. Andrieu and A. El Badi. On an inverse source problem for the heat equation. application to a pollution detection problem. Inverse Prob. Sci. Eng., 23 :389–412, 2015.
- [6] M. Anguelova, J. Karlsson, and M. Jirstrand. Minimal output sets for identifiability. Mathematical Biosciences, 239(1) :139–153, 2012.
- [7] R.C. Aster, B. Borchers, and C.H. Thurber. Parameter estimation and inverse problems. Academic Press, 2005.
- [8] S. Audoly, G. Bellu, L. D’Angio, M. P. Saccomani, and C. Cobelli. Global identifiability of nonlinear models of biological systems. IEEE Trans. Biomed. Eng., 48 :55–65, 2001.
- [9] S Bandini, S Manzoni, and G Vizzari. Multi-Agent Systems - Crowd behavior modeling : from cellular automata to multi-agent systems. Taylor & Francis Group, 2009.
- [10] S.S. Basu, R. Pollack, and M.-F. Roy. Algorithms in Real Algebraic Geometry (Algorithms and Computation in Mathematics). Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, 2006.
- [11] N Bellomo and C. Dogbe. On the modeling of traffic and crowds : A survey of models, speculations, and perspectives. SIAM review, 53(3) :409–463, 2011.
- [12] G. Bellu, M. Saccomani, M. Pia, S. Audoly, and L. D’Angiò. DAISY : A new software tool to test global identifiability of biological and physiological systems. Computer Methods and Programs in Biomedicine, 28 (1) :52–61, 2007.
- [13] I. Belykh, V. Belykh, and M. Hasler. Generalized connection graph method for synchronization in asymmetrical networks. Phys. D, 224(1-2) :42–51, 2006.
- [14] I. Belykh, V. Belykh, and M. Hasler. Synchronization in asymmetrically coupled networks with node balance. Chaos, 16(1) :015102, 9, 2006.
- [15] I. Belykh, M. Hasler, M. Lauret, and H. Nijmeijer. Synchronization and graph topology. Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 15(11) :3423–3433, 2005.
- [16] V. Belykh, I. Belykh, and M. Hasler. Connection graph stability method for synchronized coupled chaotic systems. Phys. D, 195(1-2) :159–187, 2004.
- [17] S. Boonnithi and S. Phongsuphap. Comparison of heart rate variability measures for mental stress detection. In Proceedings of the 2011 Computing in Cardiology, Hangzhou, China, volume 38, 18–21 September, 2011.
- [18] L. Boschetti, M. Ioualalen, D. Provitolo, E. Tric, S. Grilli, F. Nemati, and C. Larroque. The mediterranean french coastal exposed to tsunami risk : from hazard to territorial vulnerability studies. In AAG 2019, Washington DC, United States, Apr 2019.
- [19] L. Boschetti, D. Provitolo, and E. Tric. A method to analyze territory resilience to natural hazards, the example of the french riviera against tsunami. In EGU General Assembly Conference Abstracts, volume 19, page 12935, Apr 2017.
- [20] F. Boulier. Study and implementation of some algorithms in differential algebra. Theses, Université des Sciences et Technologie de Lille - Lille I, June 1994.

- [21] F. Boulier, A. Korporal, F. Lemaire, W. Perruquetti, A. Poteaux, and R. Ushirobira. An algorithm for converting nonlinear differential equations to integral equations with an application to parameter estimation from noisy data. In *Proc. Computer Algebra in Scientific Computing 2014*, pages 28–43, Warsaw, Poland, LNCS, 8660, 2014.
- [22] F. Boulier, D. Lazard, F. Ollivier, and M. Petitot. Computing representation for radicals of finitely generated differential ideals. Technical report, Université Lille I, LIFL, 59655, Villeneuve d’Ascq, 1997.
- [23] N. Bourbaki. *Elements of Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [24] S.T. Boyd. RÃactions psychologiques des victimes de catastrophes. *South african Medicine Jal.*, 60 :744–748, 1981.
- [25] I. Braems, L. Jaulin, M. Kieffer, and E. Walter. Guaranteed numerical alternatives to structural identifiability testing. In *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3122–3127, Orlando, USA, 2001.
- [26] C. W. Brown. QEPCAD B : A program for computing with semi-algebraic sets using CADs. *SIGSAM BULLETIN*, 37 :97–108, 2003.
- [27] R. Brun, M. KÃijhni, H. Siegrist, W. Gujer, and P. Reichert. Practical identifiability of ASM2d parameters-systematic selection and tuning of parameter subsets. *Water Research*, 36(16) :4113–4127, 2002.
- [28] C. Buzzi, J. Llibre, and J. Medrado. Hopf and zero-hopf bifurcations in the hindmarsh-rose system. *Nonlinear Dynamics*, 83(3) :1549–1556, 2016.
- [29] G. Cantin. Nonidentical coupled networks with a geographical model for human behaviors during catastrophic events. *Internat. J. Bifur. Chaos*, 27(14, 1750213), 2017.
- [30] G. Cantin, A. A. Alaoui, and N. Verdière. Large time dynamics in complex networks of reaction-diffusion systems. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 84, October 2019.
- [31] G. Cantin and N. Verdière. Networks of forest ecosystems : Mathematical modeling of their biotic pump mechanism and resilience to certain patch deforestation. *Ecological Complexity*, 43, 2020.
- [32] G. Cantin, N. Verdière, V. Lanza, MA Aziz-Alaoui, R. Charrier, C. Bertelle, D. Provitolo, and E. Dubos-Paillard. Mathematical modeling of human behaviors during catastrophic events : stability and bifurcations. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 26(10) :1630025, 2016.
- [33] G. Cantin, N. Verdière, V. Lanza, M.A. Aziz-Alaoui, D. Provitolo, Edwige Dubos-Paillard, Rodolphe Charrier, and Cyrille Bertelle. Control of panic in a non-identical coupled network with a geographical model. In *PhysCon 2017, Proceedings in the IPACS library*, Firenze (Italy), 2017.
- [34] Gilles Chabert and Luc Jaulin. Contractor programming. *Artificial Intelligence*, 173(11) :1079–1100, 2009.
- [35] C. Chalons, P. Goatin, and N. Seguin. General constrained conservation laws. application to pedestrian flow modeling. *Networks & Heterogeneous Media*, 8(2) :433, 2013.
- [36] M.J. Chapman, K.R. Godfrey, M.J. Chappell, and N.D. Evans. Structural identifiability of nonlinear systems using linear/nonlinear splitting. *International Journal of Control*, 76 :209–216, 2003.
- [37] M.J. Chappell and K.R. Godfrey. Structural identifiability of the parameters of a nonlinear batch reactor model. *Mathematical Biosciences*, 108 :245–251, 1992.
- [38] M.J. Chappell and R. Gunn. A procedure for generating locally identifiable reparametrisations of unidentifiable non-linear systems by the similarity transformation approach. *Mathematical biosciences*, 148 :21–41, 03 1998.
- [39] C. Chen, J. H. Davenport, J. P. May, M. Moreno Maza, B. Xia, and R. Xiao. Triangular decomposition of semi-algebraic systems. *Journal of Symbolic Computation*, 49 :3–26, 2013.
- [40] L. Chiscii, A. Garulli, and G. Zappa. Recursive state bounding by parallelotopes. *Automatica*, 32(7) :1049–1055, 1996.
- [41] R. Choquet and D.J. Cole. A hybrid symbolic-numerical method for determining model structure. *Mathematical Biosciences*, 236(2) :117–125, 2012.
- [42] L. O. Chua, C. W. Wu, A. Huang, and G. Zhong. A universal circuit for studying and generating chaos. I. Routes to chaos. *IEEE Trans. Circuits Systems I Fund. Theory Appl.*, 40(10) :732–744, 1993.
- [43] L. O. Chua, C. W. Wu, A. Huang, and G. Zhong. A universal circuit for studying and generating chaos. II. Strange attractors. *IEEE Trans. Circuits Systems I Fund. Theory Appl.*, 40(10) :745–761, 1993.
- [44] A. Cintrón-Arias, H. Banks, A. Capaldi, and A. Lloyd. A sensitivity matrix based methodology for inverse problem formulation. *J. Inverse Ill-posed Problems*, 17 :1–20, 08 2009.
- [45] D. Cole, B. Morgan, E. Catchpole, and B. Hubbar. Parameter redundancy in markâŔrecovery models. *Biometrical Journal*, 54(2) :117–125, 2012.

- [46] M.O. Cordier, P. Dague, F. Levy, J. Montmain, M. Staroswiecki, and L. Travé Massuyès. Conflicts versus analytical redundancy relations. A comparative analysis of the model based diagnosis approach from the artificial intelligence and automatic control perspectives. *IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics, Part B*, 34(5) :2163–2177, 2004.
- [47] F.E. Cornes, G.A. Frank, and C.O. Dorso. Fear propagation and the evacuation dynamics. *Simulation Modelling Practice and Theory*, 95 :112 – 133, 2019.
- [48] A. Coronel, L. Friz, I. Hess, and M. Zegarra. On the existence and uniqueness of an inverse problem in epidemiology. *Applicable Analysis*, 2019.
- [49] N. Corson and M. Aziz-Alaoui. Asymptotic dynamics of hindmarsh-rose neuronal system. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systemes, Series B : Applications and Algorithms*, 16 :p-535, 2009.
- [50] N. Corson, V. Lanza, and N. Verdière. Hopf bifurcations in a chain of coupled hindmarsh-rose systems. *Acta Biotheoretica*, 65(4), 2016.
- [51] D. Cox, J. Little, and D. O’Shea. *Ideals, Varieties and Algorithms. An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*. Springer Verlag, 1996.
- [52] L. Crocq. *Paniques Collectives (Les)*. Odile Jacob, 2013.
- [53] J. C. Cruz-Victoria, R. Martinez-Guerra, and J. J. Rincon-Pasaye. On linear systems diagnosis using differential and algebraic methods. *Journal of the Franklin Institute*, 345 :102–118, 2008.
- [54] M. Daigle, A. Bregon, G. Biswas, X. Koutsoukos, and B. Pulido. Improving Multiple Fault Diagnosability using Possible Conflicts. *IFAC Proceedings*, 45 (20) :144–149, 2012.
- [55] M. Dao. *Caractérisation d’ensembles par des méthodes intervalles. Applications en automatique*. PhD thesis, Université d’Angers, 2006.
- [56] M. Darbas, J. Heleine, and S. Lohrengel. Sensitivity analysis for 3d maxwell’s equations and its use in the resolution of an inverse medium problem at fixed frequency. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2019.
- [57] W. Dayi, F. Fangzhou, L. Wenbo, T. Yuanyuan, L. Chengrui, and L. Wenjing. A review of the diagnosability of control systems with applications to spacecraft. *Annual Reviews in Control*, 49 :212–229, 2020.
- [58] J. De Kleer and B.C Williams. Diagnosing multiple faults. *Artificial intelligence*, 32(1) :97–130, 1987.
- [59] Enno de Lange. Neuron models of the generic bifurcation type : network analysis. *Thesis, EPFL*, 2006.
- [60] L. Denis-Vidal and G. Joly-Blanchard. Equivalence an identifiability analysis of uncontrolled nonlinear dynamical systems. *Automatica*, 40 :287–292, 2004.
- [61] L. Denis-Vidal, G. Joly-Blanchard, and C. Noiret. Some effective approaches to check identifiability of uncontrolled nonlinear systems. *Mathematics and Computers in Simulation*, 57 :35–44, 2001.
- [62] L. Denis-Vidal, G. Joly-Blanchard, C. Noiret, and M. Petitot. An algorithm to test identifiability of nonlinear systems. In *Proceedings of 5th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*, volume 7, pages 174–178, St Petersburg, Russia, 2001.
- [63] L. Denis-Vidal, G. Joly-Blanchard, and N. Verdière. Identifiability and estimation of nonlinear models : A distribution framework. *Proc. ECC 2007, Kos, Grèce*, 2007.
- [64] M. Diop and M. Fliess. Nonlinear observability, identifiability and persistent trajectories. In *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 714–719, Brighton, UK, 1991.
- [65] S. Dobre, T. Bastogne, M. Barberi-Heyob, F. Guillemain, and Alain Richard. Conception assistée par une analyse de sensibilité globale d’une plate-forme dédiée à la recherche en thérapie photodynamique. *Journal de la Société Française de Statistique*, 152(1), 2011.
- [66] Simona Dobre, Thierry Bastogne, Christophe Profeta, Muriel Barberi-Heyob, and Alain Richard. Limits of variance-based sensitivity analysis for non-identifiability testing in high dimensional dynamic models. *Automatica*, 48(11) :2740–2749, 2012.
- [67] D. Dochain, P. A. Vanrolleghem, and M Van Daele. Structural identifiability of biokinetic models of activated sludge respiration. *Water Research*, 29 :2571–2578, 1995.
- [68] J. Drury, C. Cocking, and S. Reicher. Everyone for themselves? a comparative study of crowd solidarity among emergency survivors. *British Journal of Social Psychology*, 48(3) :487–506, 2009.
- [69] E. Dubos-Paillard, D. Provitolo, and A. Connault. How people react to a major disaster? In *IDRIM 2019*, 2019.
- [70] J.P. Dupuy. *La panique, Les Empêcheurs de penser en ronde*. Paris, 1991.
- [71] H. Egger, H. W. Engl, and M. V. Klibanov. Global uniqueness and holder stability for recovering a nonlinear source term in a parabolic equation. *Inverse Problems*, 21 :271–290, 2005.

- [72] M.C. Eisenberg and M.A.L. Hayashi. Determining identifiable parameter combinations using subset profiling. *Mathematical Biosciences*, 256 :116–126, 2014.
- [73] M.S. El Din. Raglib : A library for real solving polynomial systems of equations and inequalities. 2007.
- [74] N.D. Evans, M.J. Chapman, M.J. Chappell, and K.R. Godfrey. Identifiability of uncontrolled nonlinear rational systems. *Automatica*, 38 :1799–1805, 2002.
- [75] N.D. Evans and M.J. Chappell. Extensions to a procedure for generating locally identifiable reparameterisations of unidentifiable systems. *Math. Biosci*, 168 :137–159, 2000.
- [76] J.C. Faugère. A new efficient algorithm for computing gröbner bases without reduction to zero (f5). In *Proceedings of the 2002 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, ISSAC '02*, page 75–83, New York, NY, USA, 2002. Association for Computing Machinery.
- [77] L. Festinger. A theory of social comparison processes. *Human relations*, 7(2) :117–140, 1954.
- [78] H. W. Fischer. *Response to disaster : Fact versus fiction & its perpetuation : The sociology of disaster*. University press of America, 1998.
- [79] S. T. Fiske and S. E. Taylor. *Social cognition : From brains to culture*. Sage, 2013.
- [80] M. Fliess and T. Glad. An algebraic approach to linear and nonlinear control. In *Essays on control : perspectives in the theory and it application*, volume 7, pages 223–267, Cambridge, MA, Birkhauser, 1993.
- [81] M. Fliess, M. Mboup, H. Mounier, and H Sira-Ramirez. Questioning some paradigms of signal processing via concret examples. In *Proc. Summer School : Fast Estimation Method, Automatic Control and Signal Processing*, Paris, 2005.
- [82] M. Gen and R. Cheng. *Genetic Algorithms and Engineering Optimization*. John Wiley & Sons, Inc. : Hoboken, NJ, USA, 1999.
- [83] N. George and L. Gamond. Premières impressions. *L'essentiel Cerveau et Psycho : Les émotions au pouvoir*, 7, 2011.
- [84] J. Gertler. Analytical redundancy methods in fault detection and isolation. In *Proceedings IFAC Symp. Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes, SAFEPROCESS*, volume 1, pages 9–22, Baden-Baden, Germany, 1991.
- [85] T. A. Glass and M. Schoch-Spana. Bioterrorism and the people : how to vaccinate a city against panic. *Clinical Infectious Diseases*, 34(2) :217–223, 2002.
- [86] JM. González-Miranda. Complex bifurcation structures in the hindmarsh-rose neuron model. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 17(09) :3071–3083, 2007.
- [87] H. Haken. *Brain Dynamics, An Introduction to Models and Simulations*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.
- [88] A. Hamdi and I. Mahfoudhi. Inverse source problem based on two dimensionless dispersion-current functions in 2d evolution transport equations. *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 24 :663–685, 2016.
- [89] S. Harris and J. Ross. *Beginning algorithms*. Wiley Indianapolis, IN, 2005.
- [90] B. Hassard and YH. Wan. Bifurcation formulae derived from center manifold theory. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 63(1) :297–312, 1978.
- [91] E. Hatfield, J.T. Cacioppo, and R.L. Rapson. *Emotional Contagion*. Cambridge, Cambridge University Press, 1994.
- [92] R.L. Haupt and S.E. Haupt. *Practical Genetic Algorithms*. 2nd ed. ; John Wiley & Sons, Inc. : Hoboken, NJ, USA, 2003.
- [93] D. Helbing, I. Farkas, and T. Vicsek. Simulating dynamical features of escape panic. *Nature*, 407(6803) :487–490, 2000.
- [94] D. Helbing and P. Mukerji. Crowd disasters as systemic failures : analysis of the love parade disaster. *EPJ Data Science*, 1(1) :1–40, 2012.
- [95] J.L. Hindmarsh and R.M. Rose. A model of the nerve impulse using two first-order differential equations. *Nature*, 296(5853) :162–164, 1982.
- [96] J.L. Hindmarsh and R.M. Rose. A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations. *Proceedings of the Royal Society of London B : Biological Sciences*, 221(1222) :87–102, 1984.
- [97] S. Ibrir and S. Diop. A numerical procedure for filtering and efficient high-order signal differentiation. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, 14 (2) :201–208, 2004.
- [98] Be. Iooss, A. Janon, G. Pujol, B. Broto, K. Boumhaout, S. Da Veiga, T. Delage, J. Fruth, L. Gilquin, J. Guillaume, et al. Sensitivity : global sensitivity analysis of model outputs. *R package version*, 1(0), 2020.

- [99] D. Janzén, M. Jirstrand, M. Chappell, and N. Evans. Three novel approaches to structural identifiability analysis in mixed-effects models. Computer Methods and Programs in Biomedicine, 171 :141–152, 2019.
- [100] C. Jauberthie, L. Travé-Massuyès, and N. Verdière. Set-membership identifiability of nonlinear models and related parameter estimation properties. Journal of Applied Mathematics and Computer Science (AMCS), 26, 2016.
- [101] C. Jauberthie, N. Verdière, and L. Travé-Massuyès. Set-membership identifiability : definitions and analysis. In Proceedings of the 18th IFAC World Congress, pages 12024–12029, Milan, Italie, 2011.
- [102] C. Jauberthie, N. Verdière, and L. Travé-Massuyès. Fault detection and identification relying on set-membership identifiability. Annual Reviews in Control, 37 :129–136, 2013.
- [103] C. Jauberthie, N. Verdière, and L. Travé-Massuyès. Fault detection and identification relying on set-membership identifiability. Annual Reviews in Control, 37 :129–136, 2013.
- [104] L. Jaulin, M. Kieffer, O. Didrit, and E. Walter. Applied Interval Analysis, with examples in parameter and state estimation, Robust control and robotics. Springer, Londres, 2001.
- [105] L. Jaulin and E. Walter. Set inversion via interval analysis for nonlinear bounded-error estimation. Automatica, 29 :1053–1064, 1993.
- [106] J. P. Keating. The myth of panic. Fire Journal, 76(3) :57–61, 1982.
- [107] M. Kieffer, L. Jaulin, and E. Walter. Guaranteed recursive nonlinear state bounding using interval analysis. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, 6 :191–218, 2002.
- [108] M. Kieffer and E. Walter. Guaranteed estimation of the parameters of nonlinear continuous-time models : Contributions of interval analysis. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, 25(3) :191–207, 2011.
- [109] R. Kılıç. A practical guide for studying Chua’s circuits, volume 71 of World Scientific Series on Nonlinear Science. Series A : Monographs and Treatises. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2010.
- [110] S. Kiranyaz, T. Ince, and M. Gabbouj. Optimization Techniques : An Overview. Springer Berlin Heidelberg, 2014.
- [111] V. Kreinovich, L. Longpre, S. Starks, G. Xiang, J. Beck, R. Kandathi, A. Nayak, S. Ferson, and J. Hajacos. Interval versions of statistical techniques with applications to environmental analysis, bioinformatics, and privacy in statistical databases. Journal of Computational and Applied Mathematics, 199 :418–423, February 2007.
- [112] V. Kreinovich and H.T. Nguyen. Interval-valued fuzzy control in space exploration. Bulletin for Studies and Exchanges on Fuzziness and its Applications, 71 :55–64, July 2011.
- [113] M. Krysander, J. Aslung, and E. Frisk. A Structural Algorithm for Finding Testable Sub-models and Multiple Fault Isolability Analysis. In 21st International Workshop on Principles of Diagnosis (DX-10), Portland, Oregon, USA, 2010.
- [114] A. B. Kurzhanski and I. Valyi. Ellipsoidal calculus for estimation and control. Nelson Thornes, 1997.
- [115] S. Laborde, E. Mosley, and J. Thayer. Heart rate variability and cardiac vagal tone in psychophysiological research—recommendations for experiment planning, data analysis, and data reporting. Front. Psychol., 8, 2017.
- [116] M. Lago, A. Tricot, D. Provitolo, A. Boudoukha, N. Verdière, V. Lanza, R. Charrier, S. Haule, P. Mallet, C. Bertelle, E. Dubos-Paillard, S. Perez, O. Navarro, P. Ranarimahefa, A. Lindenmann, A. Berred, and M. Aziz-Alaoui. Comprendre, simuler et analyser les comportements humains en situation de catastrophe : enjeux et résultats d’une démarche d’enquête innovante. to appear in Cybergeog : European Journal of Geography, 2021.
- [117] S. Lagrange, N. Delanoue, and L. Jaulin. Injectivity analysis using interval analysis : Application to structural identifiability. Automatica, 44, 11 :2959–2962, 2008.
- [118] M. Lanier, T. F. Waddell, M. Elson, J. D. Tamul, D. J. abd Ivory, and A. Przybylski. Virtual reality check : Statistical power, reported results, and the validity of research on the psychology of virtual reality and immersive environments. Computers in Human Behavior, 100 :70–78, 2019.
- [119] V. Lanza, R. Charrier, N. Verdière, E. Dubos-Paillard, O. Navarro, D. Provitolo, C. Bertelle, G. Cantin, and M.A. et Aziz-Alaoui. Mathematical and geographical approach in the modeling of a network of human behavioral systems. In Proceedings of XTerM 2019 - Systèmes complexes, intelligence territoriale et mobilité, juin 2019.
- [120] V. Lanza, E. Dubos-Paillard, R. Charrier, N. Verdière, D. Provitolo, O. Navarro, C. Bertelle, G. Cantin, A. Berred, and M. Aziz-Alaoui. Spatio-temporal dynamics of human behaviors during disasters : A mathematical and geographical approach. In Complex Systems, Smart Territories and Mobility, pages 201–218. Springer, 2021.

- [121] V. Lanza, D. Provitolo, N. Verdière, C. Bertelle, E. Dubos-Paillard, O. Navarro, R. Charrier, I. Mikiela, M. Aziz-Alaoui, A. Boudoukha, A. Tricot, A. Schleyer-Lindenmann, A. Berred, S. Haule, and E. Tric. Modeling and analyse of the impact of risk culture on human behaviour during a catastrophic event. soumis.
- [122] J. Lassoued, M. Mahjoub, and N. Zemzemi. Stability results for the parameter identification inverse problem in cardiac electrophysiology. Inverse Problems, 32 :115002, 2016.
- [123] A. Levant. Robust exact differentiation via sliding mode technique. Automatica, 34 :379–384, 1998.
- [124] A. Levant. Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. International Journal of Control, 76 :924–941, 2003.
- [125] L. Ljung and T. Glad. On global identifiability for arbitrary model parametrizations. Automatica, 30 :265–276, 1994.
- [126] J.M. Loeb and G.M. Cahen. More about process identification. Automatica, pages 359–447, 1965.
- [127] A. M. Lutambi, M. A. Penny, T. Smith, and N. Chitnis. Mathematical modelling of mosquito dispersal in a heterogeneous environment. Mathematical biosciences, 241, 2013.
- [128] A.M. Makarieva and V. G. Gorshkov. Biotic pump of atmospheric moisture as driver of the hydrological cycle on land. Hydrology and Earth System Sciences Discussions, European Geosciences Union, 3 (4), 2006.
- [129] Sergei V. P. Mark A. L., Philip K. M. Dispersal, Individual Movement and Spatial Ecology. A mathematical perspective. Lecture Notes in Mathematics 2071, Mathematical Biosciences Subseries, Springer, 2013.
- [130] F. Martinez-Gil, M. Lozano, I. Garca-Fernandez, and F. Fernandez. Modeling, evaluation and scale on artificial pedestrians : A literature review. ACM Computing Surveys, 50, 09 2017.
- [131] T. Matsumoto. A chaotic attractor from Chua’s circuit. IEEE Trans. Circuits and Systems, 31(12) :1055–1058, 1984.
- [132] B. Maury and S. Faure. Crowds in Equations : An Introduction to the Microscopic Modeling of Crowds. World Scientific, 2018.
- [133] A. R. Mawson. Understanding mass panic and other collective responses to threat and disaster. Psychiatry : Interpersonal and biological processes, 68(2) :95–113, 2005.
- [134] K. McLean, S. Wu, and K. McAuley. Mean-squared-error methods for selecting optimal parameter subsets for estimation. Industrial & Engineering Chemistry Research, 51 (17) :6105–6115, 2012.
- [135] G. Melquiond. Proving bounds on real-valued functions with computations. Journal of Automated Reasoning, 5195 :2–17, 2008.
- [136] N. Meshkat, C. Anderson, and J.J. DiStefano. Finding identifiable parameter combinations in nonlinear ODE models and the rational reparameterization of their input-output equations. Mathematical Biosciences, 233(1) :19–31, 2011.
- [137] N. Meshkat, C. Anderson, and J.J. DiStefano III. Alternative to ritt’s pseudodivision for finding the input-output equations in algebraic structural identifiability analysis. Math Biosci., 39(1) :117–23, 03 2012.
- [138] N. Meshkat, M. Eisenberg, and J.J. DiStefano. An algorithm for finding globally identifiable parameter combinations of nonlinear ODE models using Groebner Bases. Mathematical Biosciences, 222(2) :61–72, 2009.
- [139] N. Meshkat, C. Kuo, and J.J. DiStefano. On finding and using identifiable parameter combinations in nonlinear dynamic systems biology models and combos : A novel web implementation. In PloS one, 2014.
- [140] N. Meshkat and S. Sullivant. Identifiable reparametrizations of linear compartment models. Journal of Symbolic Computation, 63 :46–67, 2014.
- [141] H. Miao, X. Xia, A. S. Perelson, and H. Wu. On identifiability of nonlinear ode models and applications in viral dynamics. SIAM Review, 53(1) :3–39, 2011.
- [142] I. Mikiela, V. Lanza, and N. Verdière. Optimal control in a mathematical model of human behavior during a catastrophe. In Proceedings of ECC 2020, Saint Petersburg, Russia, May 2020.
- [143] M. Mikolajczak and M. Desseilles. Traité de régulation des émotions. De Boeck Supérieur, 2012.
- [144] R.E. Moore. Interval Analysis. Prentice Hall, New Jersey, 1966.
- [145] D. Moulay, M.A. Aziz-Alaoui, and M. Cadivel. The chikungunya disease : Modeling, vector and transmission global dynamics. Mathematical Biosciences, 229(1) :50–63, 2011.
- [146] D. Moulay, M.A. Aziz-Alaoui, and H.D. Kwon. Optimal control of chikungunya disease : Larvae reduction, treatment and prevention. Mathematical Biosciences and Engineering, 9 :369–392, 2012.

- [147] D. Moulay and Y. Pigné. A metapopulation model for chikungunya including populations mobility on a large-scale network. Journal of theoretical biology, 318 :129–139, 2013.
- [148] J. R. Munkres. Topology a first courses. Prentice Hall, New Jersey, 1975.
- [149] J. D. Murray. Mathematical Biology I : An Introduction. Springer, 2002.
- [150] S. Nakagiri. Review of japanese work of the last ten years on identifiability in distributed parameter systems. Inverse Problems, 9 :143, 1993.
- [151] O. Navarro, N. Krien, D. Rommel, A. Deledalle, C. Lemée, M. Coquet, D. Mercier, and G. Fleury-Bahi. Coping strategies regarding coastal flooding risk in a context of climate change in a french caribbean island. Environ. Behav., 53 :636–660, 2020.
- [152] A Neumaier. Taylor forms - use and limits. Reliable Computing, pages 9–43, 2003.
- [153] R. Noto, P. Huguenard, and A. Larcan. Médecine de catastrophe. Masson, 1994.
- [154] S Orange and N. Verdière. Nonlinear synchronization on connected undirected networks. Nonlinear Dynamics, 76 :47–55, 2014.
- [155] D Parrochia. La forme des crises. Seyssel, éditions du Champ Vallon, 2008.
- [156] L. M. Pecora and T. L. Carroll. Master Stability Functions for Synchronized Coupled Systems. Phys. Rev. Lett., 80(10) :2109–2112, March 1998.
- [157] A. Perasso, B. Laroche, Y. Chitour, and S. Touzeau. Identifiability analysis of an epidemiological model in a structured population. Journal of Mathematical Analysis and applications, 374 :154–165, 2011.
- [158] A. Perasso and U. Razafison. Identifiability problem for recovering the mortality rate in an age-structured population dynamics model. Inverse Probl. Sci. Eng., 24 :711–728, 2016.
- [159] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths. Synchronization : A universal concept in nonlinear sciences, volume 12. Cambridge Univ Pr, 2003.
- [160] A. Pironet, P.C. Dauby, J.G. Chase, P.D. Docherty, J.A. Revie, and T. Desai. Structural identifiability analysis of a cardiovascular system model. Medical Engineering & Physics, 38(5) :433–441, 2016.
- [161] H. Pohjanpalo. System identifiability based on the power series expansion of the solution. Mathematical Biosciences, 41 :21–33, 1978.
- [162] P. Poinet and N. Ramdani. Robust estimation of parallel robot with interval analysis. In Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control (CDC), Maui, Hawaii (USA), 2003.
- [163] D Provitolo. Un exemple d’effets de dominos : la panique dans les catastrophes urbaines. Cybergeog : European Journal of Geography, 2005.
- [164] D. Provitolo, E. Dubos-Paillard, N. Verdière, V. Lanza, R. Charrier, C. Bertelle, and M. Aziz-Alaoui. Les comportements humains en situation de catastrophe : de l’observation à la modélisation conceptuelle et mathématique. Cybergeog : European Journal of Geography, 735, 2015.
- [165] E. L. Quarantelli. Panic behavior in fire situations : Findings and a model from the english language research literature. Disaster Research Center, 1979.
- [166] Enrico L Quarantelli. Conventional beliefs and counterintuitive realities. Social Research : An International Quarterly, 75(3) :873–904, 2008.
- [167] A. Quarteroni, R. Sacco, and F. Saleri. Numerical Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2007.
- [168] J. L. Rabinowitsch. Zum Hilbertschen Nullstellensatz. Math. Ann., 102(1) :520, 1930.
- [169] T. Raïssi, N. Ramdani, and Y. Candau. Set-membership state and parameter estimation for systems described by nonlinear differential equations. Automatica, 40(10) :1771–1777, 2004.
- [170] N. Ramdani and P Poinet. Robust dynamic experimental identification of robots with set membership uncertainty. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 10(2) :253–256, April 2005.
- [171] A. Rauh, J. Minisini, and E. P. Hofer. Verification techniques for sensitivity analysis and design of controllers for nonlinear dynamic systems with uncertainties. Internationa Journal of Applied Mathematics and Computer Science, 19(3) :425–439, September 2009.
- [172] L. Ravanbod, C Jauberthie, N Verdière, and L. Travé-Massuyès. Improvements in enclosing uncertain derivatives and controlling ill-conditioned problems. application to interval-based fault detection and isolation. Journal of Process Control, pages 139–151, 2017.
- [173] L. Ravanbod, N. Verdière, and C. Jauberthie. Determination of set-membership identifiability sets. Mathematics in Computer Science, 8(3-4) :391–406, 2014.
- [174] J. Rohn. Positive definiteness and stability of interval matrices. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 15(1) :175–184, 1994.

- [175] M.G. Rosenblum, A.S. Pikovsky, and J. Kurths. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators. Phys. Rev. Lett., 78(22) :4193–4196, 1997.
- [176] J. A. Russell. A circumplex model of affect. Journal of personality and social psychology, 39(6) :1161, 1980.
- [177] M.P. Saccomani, S. Audoly, G. Bellu, and L. D’Angiò. Examples of testing global identifiability of biological and biomedical models with the DAISY software. Computers in Biology and Medicine, 40 (4) :402–407, 2010.
- [178] M.P. Saccomani, S. Audoly, and L. D’Angiò. Parameter identifiability of nonlinear systems : the role of initial conditions. Automatica, 39 :619–632, 2004.
- [179] A. Saltelli, M. Ratto, T. Andres, F. Campolongo, J. Cariboni, D. Gatelli, M. Saisana, and S. Tarantola. Global sensitivity analysis : The primer. Wiley, 2008.
- [180] R Seliger and P.M. Frank. Fault diagnosis by disturbance decoupled non-linear observers. In Proceedings of the 30th IEEE conference on decision and control, pages 2248–2253, Brighton, 1991.
- [181] H. Sira-Ramírez, C. García Rodríguez, J. Cortes Romero, and A. Luviano Juárez. Algebraic Identification and Estimation Methods. Feedback Control Systems, Wiley, 2014.
- [182] J. C. Sprott. Chaotic dynamics on large networks. Chaos, 18(2) :023135, 9, 2008.
- [183] M. Staroswiecki and G. Comtet-Varga. Analytical redundancy relations for fault detection and isolation in algebraic dynamic systems. Automatica, 37 :687–699, 2001.
- [184] J. D. Stigter and J. Molenaar. A fast algorithm to assess local structural identifiability. Automatica J. IFAC, 58 :118–124, 2015.
- [185] M. Storace, D. Linaro, and E. de Lange. The hindmarsh–rose neuron model : bifurcation analysis and piecewise-linear approximations. Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 18(3) :033128, 2008.
- [186] W. Tong and L. Cheng. Simulation of pedestrian flow based on multi-agent. Procedia-Social and Behavioral Sciences, 96 :17–24, 2013.
- [187] L. Travé Massuyès, T. Escobet, and X. Olive. Diagnosability analysis based on component-supported analytical redundancy relations. IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics, Part A, 36(6) :1146–1160, 2006.
- [188] E. Trélat. Optimal control and applications to aerospace : some results and challenges. Journal of Optimization Theory and Applications, 154(3) :713–758, 2012.
- [189] N. Tuncer, H. Gulbudak, V. Cannataro, and M. Martcheva. Structural and practical identifiability issues of immuno-epidemiological vector-host models with application to rift valley fever. Bull. Math. Biol., 78 :1796–1827, 2016.
- [190] J.S. Tyhurst. Psychological and social aspects of community disasters. Canada M.A.J., 76 :385–392, 1957.
- [191] G. Uhlmann. Electrical impedance tomography and calderón’s problem. Inverse Problems, 25 :123011, 2009.
- [192] P. A. Vanrolleghem, M Van Daele, and D. Dochain. Practical identifiability of a biokinetic model of activated sludge respiration. Water Research, 29 :2571–2578, 1995.
- [193] N. Verdière, G. Cantin, D. Provitolo, V. Lanza, E. Dubos-Paillard, R. Charrier, M. Aziz-Alaoui, and C. Bertelle. Understanding and simulation of human behaviors in areas affected by disasters : From the observation to the conception of a mathematical model. Global Journal of Human Social Science, 15 :7–15, 2015.
- [194] N. Verdière, G. Cantin, D. Provitolo, V. Lanza, E. Dubos-Paillard, R. Charrier, M. A. Aziz-Alaoui, and C. Bertelle. Understanding and simulation of human behaviors in areas affected by disasters : from the observation to the conception of a mathematical model. Global J. Hum. Soc. Sci., 15, 2015.
- [195] N. Verdière, L. Denis-Vidal, and G. Joly-Blanchard. A new method for estimating derivatives based on a distribution approach. Numerical Algorithm, 61, 2012.
- [196] N. Verdière, L. Denis-Vidal, G. Joly-Blanchard, and D. Domurado. Identifiability and estimation of pharmacokinetic parameters of ligands of macrophage mannose receptor. International Journal of Applied Maths and Computer Science, 15, 2005.
- [197] N. Verdière and C Jauberthie. Parameter estimation procedure based on input-output integro-differential polynomials. application to the hindmarsh-rose model. In Proceedings of ECC 2020, Saint Petersburg, Russia, 2020.
- [198] N. Verdière, C. Jauberthie, and L. Travé-Massuyés. Functional diagnosability and detectability of nonlinear models based on analytical redundancy relations. Journal of Process Control, 35 :1–10, 2015.

- [199] N. Verdière, V. Lanza, R. Charrier, D. Provitolo, E. Dubos-Paillard, C. Bertelle, and M. Aziz-Alaoui. Mathematical modeling of human behaviors during catastrophic events. In International Conference on Complex Systems and Applications Le Havre, 23 au 26 juin 2014., pages 67–74, 2014.
- [200] N. Verdière, D. Manceau, S. Zhu, and L. Denis-Vidal. Inverse problem for a coupled reaction-diffusion and ode system. Applied Mathematics and Computation, 375, 2020.
- [201] N. Verdière, O. Navarro, A. Naud, A. Berred, and D. Provitolo. Towards parameter identification of a behavioral model from a virtual reality experiment. Mathematics, 9(24), 3175, 2021.
- [202] N. Verdière and S. Orange. Diagnosability in the case of multi-faults in nonlinear models. Journal of Process Control, 69, 2018.
- [203] N. Verdière, Z. Zhu, and L. Denis-Vidal. A distribution input-output polynomial approach for estimating parameters in nonlinear models. application to a chikungunya model. Journal of Computational and Applied Mathematics, 331, 2018.
- [204] N. Verdière and S. Orange. A systematic approach for doing an a priori identifiability study of dynamical nonlinear models. Mathematical Biosciences, 308 :105–113, 2019.
- [205] E. Verhulst, P. Richard, D. Provitolo, and O. Navarro. Virtual tsunami : navigation technique and user behavior analysis during emergency. In 1st International Conference for Multi-Area Simulation - ICMASim, Angers, 8-10 octobre 2019.
- [206] E. Vermeiren. Psychologie des foules : éléments de compréhension et de prévention en situation de catastrophe collective. Urgence, 2007.
- [207] O. J. Walch and M. C. Eisenberg. Parameter identifiability and identifiable combinations in generalized hodgkin–huxley models. Neurocomputing, 199 :137–143, 2016.
- [208] E. Walter. Identifiability of state space models. Springer, Berlin, 1994.
- [209] E. Walter and Y. Lecourtier. Global approaches to identifiability testing for linear and nonlinear state space models. Mathematics and Computers in Simulation, 24 :472–482, 1982.
- [210] E. Walter and L. Pronzato. Identification of Parametric Models from Experimental Data. Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [211] E. Walter and L. Pronzato. Identification of Parametric Models from experimental Data. Springer-Verlag, London, 1997.
- [212] H. Wang, Q. Wang, Q. Lu, and Y. Zheng. Equilibrium analysis and phase synchronization of two coupled hr neurons with gap junction. Cognitive Neurodynamics, 7(2) :121–131, 2013.
- [213] S.R. Weijers and P.A. Vanrolleghem. A procedure for selecting best identifiable parameters in calibrating activated sludge model no. 1 to full-scale plant data. Water Science and Technology, 36(5) :69–79, 1997. WATERMATEX '97 Systems Analysis and Computing in Water Quality Management : Towards A New Agenda.
- [214] C. W. Wu. Synchronization in coupled chaotic circuits and systems, volume 41 of World Scientific Series on Nonlinear Science. Series A : Monographs and Treatises. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 2002.
- [215] C.W. Wu. Synchronization in networks of nonlinear dynamical systems coupled via a directed graph. Nonlinearity, 18 :1057, 2005.
- [216] C.W. Wu. Control of networks of coupled dynamical systems. In Kocarev, L. (Ed.), Consensus and synchronization in complex networks, Springer, 2013.
- [217] C.W. Wu and L.O. Chua. Synchronization in an array of linearly coupled dynamical systems. IEEE Trans. Circuits Systems I Fund. Theory Appl., 42(8) :430–447, 1995.
- [218] B. Xia. DISCOVERER : a tool for solving semi-algebraic systems. ACM Communications in Computer Algebra, 41(3) :102–103, September 2007.
- [219] Q. Xia. The geodesic problem in quasimetric spaces. J. Geom. Anal., 19(2) :452–479, 2009.
- [220] X. Xia and C.H. Moog. Identifiability of nonlinear systems with application to hiv/aids models. In IEEE Trans. Autom. Control, volume 48, pages 330–336, 2003.
- [221] H. Xiang and B. Liu. Solving the inverse problem of an sis epidemic reaction-diffusion model by optimal control methods. Computer & Mathematics with Applications, 70(5), 2015.
- [222] A. Yagi. Abstract parabolic evolution equations and their applications. Springer, 2010.
- [223] Weiliang Z., Hideki N., and Peng C. A modified social force model for pedestrian behavior simulation at signalized crosswalks. Procedia - Social and Behavioral Sciences, 138 :521 – 530, 2014. The 9th International Conference on Traffic and Transportation Studies (ICTTS 2014).

- [224] J. Zhang, X. Xia, and C.H. Moog. Parameter identifiability of nonlinear systems with time-delay. IEEE Transactions on Automatic Control, 51, 2006.
- [225] Q. Zhang, M. Basseville, and A. Benveniste. Fault detection and isolation in nonlinear dynamic systems : a combined input-output and local approach. Automatica, 34(11) :1359–1373, 1998.
- [226] J. Zhou, J. Lu, and J. Lü. Pinning adaptive synchronization of a general complex dynamical network. Automatica J. IFAC, 44(4) :996–1003, 2008.
- [227] S. Zhu, L. Denis-Vidal, and N. Verdière. Identifiability study in a model describing the propagation of the chikungunya to the human population. In Proc. MOSIM'2014, Nancy, France, 5-7 November (2014).
- [228] S. Zhu, N. Verdière, L. Denis-Vidal, and D. Kateb. Identifiability analysis and parameter estimation of an epidemiologic model in a spatially continuous domain. Ecological Complexity, 34, 2018.
- [229] S. Zhu, N. Verdière, D. Manceau, L. Denis-Vidal, and D. Kateb. Modeling spatial spread of an epidemiologic model in a spatially continuous domain. In 4thICCDs'2016, Agadir, Morocco, 26-28 October 2016.