Théorie spectrale

Stéphane Maingot & David Manceau

Table des matières

Introduction

Ce cours s'inscrit comme une suite logique du cours d'analyse fonctionnelle du premier semestre de Master 1. En analyse fonctionnelle, on étudie les propriétés topologiques des espaces de fonctions (et plus généralement des espaces vectoriels de dimension infinie). Dans ce cours, on s'intéresse plus particulièrement aux propriétés des applications linéaires, ou opérateurs, sur les espaces vectoriels de dimension infinie.

Ces propriétés ont des applications concrètes. Les équations aux dérivées partielles, notamment, peuvent s'écrire en terme d'opérateurs sur des espaces de fonctions. Ainsi, certains problèmes issus de la biologie, physique, économie, etc. sont liés à des questions d'inversibilité d'opérateurs. D'un point de vue abstrait, si on désigne par E un espace fonctionnel et T un opérateur sur E, on peut être amené à chercher la solution $u \in E$ du problème

$$\lambda\, u - Tu = f, \tag{P}$$

où $\lambda \in \mathbb{K} := \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $f \in E$. Celui-ci est équivalent à déterminer si l'opérateur $\lambda\, I - T$ est inversible, où I désigne l'opérateur identité sur E.

L'étude de l'inversibilité de l'opérateur $\lambda\, I - T$ est ce qu'on appelle la théorie spectrale. De plus, dans le cas où E est simplement un espace vectoriel de dimension finie, on remarque que, pour $f = 0$, le problème (P) signifie que λ est une valeur propre de T.

Dans ce cours, on généralise en dimension infinie la notion de valeur propre et on en étudie les propriétés dans le cadre des espaces de Banach et de Hilbert. Notons de plus que l'on obtient une généralisation importante du théorème de diagonalisation des matrices hermitiennes au cas d'opérateurs particuliers appelés opérateurs auto-adjoint compacts (chapitre 5). Le cours se termine sur un exemple d'application de ces résultats abstraits au cas d'une équation aux dérivées partielles.

Chapitre 1

Spectre d'un opérateur

Dans ce chapitre, on définit les notions de spectre et de valeurs propres d'applications linéaires sur des espaces vectoriels et on en donne les propriétés élémentaires. Le cadre est celui des espaces de Banach (bien que certains des résultats restent vrai sans supposer l'espace complet).

Ainsi, dans tout le chapitre, on désigne par $(E, ||\cdot||)$ un espace de Banach sur $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si $(F, \|\cdot\|_F)$ est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$, on désigne par $L(E,F)$ l'espace des applications linéaires de E dans F et $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F. Si $F := E$, on note simplement $\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E,E)$ et $L(E) := L(E,E)$. Enfin, s'il y a risque de confusion on notera la norme de E par $\|\cdot\|_E$.

On rappelle qu'une application linéaire T définie de E dans un espace vectoriel F est appelée un **opérateur** (sous-entendu lorsque E est de dimension infinie). De plus, on dit que T est un opérateur **borné** lorsque T est continu, *i.e.* $T \in \mathcal{L}(E,F)$.

Exemple 1.0.1. Soit $E := C([0,1];\mathbb{K})$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{K}$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$. On définit l'**opérateur de Volterra** T sur E par

$$\forall\ f \in E, \quad Tf(x) \ := \ \int_0^x f(t)\ dt, \quad \forall\ x \in [0,1].$$

Pour tout $f \in E$, T vérifie

$$\|Tf\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |Tf(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]} \int_0^x |f(t)|\ dt \leq ||f||_\infty,$$

donc $T \in \mathcal{L}(E)$ et $||T|| \leq 1$. De plus, $||T|| = 1$ puisque, en prenant $f := 1$, on obtient $||f||_\infty = 1$ et $||Tf||_\infty = 1$.

1.1 Inversibilité d'un opérateur

Dans cette section, on regroupe certains résultats sur les opérateurs inversibles. En particulier, on donne (voir Corollaire 1.1.4) une caractérisation de l'inversibilité d'un opérateur qui s'avérera très utile pour la suite.

Définition 1.1.1. On rappelle qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(E)$ est dit **inversible** s'il admet un inverse dans $\mathcal{L}(E)$, *i.e.* il existe $S \in \mathcal{L}(E)$ tel que $ST = TS = I$, où I désigne l'opérateur identité de E. On note $\mathcal{GL}(E)$ l'ensemble des opérateurs $T \in \mathcal{L}(E)$ inversibles.

Remarque 1.1.2. D'après le théorème de Banach (voir aussi la Proposition 1.1.3 ci-dessous), si $T \in \mathcal{L}(E)$ est bijectif alors son inverse T^{-1} est continu donc T est inversible si et seulement s'il existe un opérateur S sur E tel que $ST = TS = I$.

Proposition 1.1.3. *Soient $(X, ||\cdot||_X)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ et $T \in \mathcal{L}(E, X)$ bijective. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $T^{-1} \in \mathcal{L}(X, E)$.
2. *Il existe $C > 0$ telle que, pour tout $x \in E$, $||Tx||_X \geq C\,||x||_E$.*
3. *$(X, ||\cdot||_X)$ est un espace de Banach sur $\mathbb{K}$*

Démonstration. Montrons que 1. entraîne 2. Puisque T^{-1} est continue, on a

$$\forall\, x \in E, \qquad ||T^{-1}Tx||_E \leq ||T^{-1}||\, ||Tx||_X.$$

Donc, pour tout $x \in E$, $||Tx||_X \geq ||T^{-1}||^{-1}\,||x||_E$.
Montrons que 2. entraîne 3. Soit $(y_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans X. L'opérateur T étant bijectif, il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans E telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Tx_n = y_n$. Or, d'après 2., pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, on a

$$||x_p - x_q||_E \leq C^{-1}\,||T(x_p - x_q)||_X \leq C^{-1}\,||y_p - y_q||_X.$$

Donc $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach E et, par suite, converge vers un élément x de E. Alors, puisque T est continue, la suite de terme général $y_n = Tx_n$ converge vers $Tx \in X$. On en déduit que X est un espace de Banach.
Enfin, 3. entraîne 1. d'après le Théorème de Banach. □

Corollaire 1.1.4. *Soient $(Y, ||\cdot||_Y)$ un espace de Banach sur $\mathbb{K}$ et $T \in \mathcal{L}(E, Y)$. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe $C > 0$ telle que, pour tout $x \in E$, on a $||Tx||_Y \geq C\,||x||_E$.*
2. *T est injectif et* $\mathrm{Im}(T)$ *est fermé dans Y.*

Démonstration. On pose $X := \mathrm{Im}(T)$.

Supposons qu'il existe $C > 0$ telle que, pour tout $x \in E$, on a $||Tx||_Y \geq C\,||x||_E$. Alors, T est injectif donc est une bijection de E sur X. D'après la Proposition 1.1.3, on en déduit que $X = \mathrm{Im}(T)$ est un espace de Banach et donc est fermé dans Y.

Supposons T injectif et X fermé dans Y. Alors, T est une bijection de E sur X et X est un espace de Banach. D'après la Proposition 1.1.3, on en déduit qu'il existe $C > 0$ telle que, pour tout $x \in E$, on a $||Tx||_Y \geq C||x||_E$. □

Corollaire 1.1.5. *Soient $(Y, ||\cdot||_Y)$ un espace de Banach sur $\mathbb{K}$ et $T \in \mathcal{L}(E, Y)$. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $\overline{\mathrm{Im}(T)} = Y$ *et il existe $C > 0$ telle que, pour tout $x \in E$, $||Tx||_Y \geq C\,||x||_E$.*

2. T est inversible.

Démonstration. Si 1. a lieu, d'après le Corollaire 1.1.4, T est injectif et $\mathrm{Im}(T)$ est fermé dans Y. Alors, $\mathrm{Im}(T) = \overline{\mathrm{Im}(T)} = Y$ donc T est surjectif et, par suite, inversible. Réciproquement, si 2. a lieu, on a $Y = \mathrm{Im}(T) \subset \overline{\mathrm{Im}(T)} \subset Y$. Donc $\overline{\mathrm{Im}(T)} = \mathrm{Im}(T) = Y$, ce qui donne le résultat d'après le Corollaire 1.1.4. $\square$

Proposition 1.1.6. *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$. Si $||T|| < 1$ alors $I - T \in \mathcal{GL}(E)$ et on a*

$$(I-T)^{-1} = \sum_{n\geq 0} T^n.$$

De plus, $\mathcal{GL}(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$ et l'application $T \mapsto T^{-1}$ est continue sur $\mathcal{GL}(E)$.

Démonstration. Comme $||T|| < 1$, la série $S := \sum_{n\geq 0} T^n$ est normalement convergente donc convergente puisque $\mathcal{L}(E)$ est complet. De plus, on a

$$(I-T)S = S - TS = \sum_{n\geq 0} T^n - \sum_{n\geq 0} T^{n+1} = T^0 = I.$$

De même, $S(I-T) = I$. On en déduit $S = (I-T)^{-1}$. Montrons que $\mathcal{GL}(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$. Soit $T_0 \in \mathcal{GL}(E)$. Si $T \in \mathcal{L}(E)$, on a

$$T = T_0 + T - T_0 = T_0\left(I - (I - T_0^{-1}T)\right).$$

De plus,

$$||I - T_0^{-1}T|| = ||T_0^{-1}(T_0 - T)|| \leq ||T_0^{-1}||\,||T_0 - T||.$$

Alors, si $||T_0 - T|| < ||T_0^{-1}||^{-1}$, on obtient $||I - T_0^{-1}T|| < 1$ et donc $I - (I - T_0^{-1}T)$ est inversible. Par suite, T est inversible. Finalement, on obtient $B(T_0, ||T_0^{-1}||^{-1}) \subset \mathcal{GL}(E)$ donc $\mathcal{GL}(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$. De plus, si $T \in B(T_0, ||T_0^{-1}||^{-1})$ son inverse est donné par

$$T^{-1} = \left(\sum_{n\geq 0}(I - T_0^{-1}T)^n\right) T_0^{-1} = \sum_{n\geq 0}(I - T_0^{-1}T)^n T_0^{-1}.$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}
||T^{-1} - T_0^{-1}|| &= \left\|\sum_{n\geq 0}(I - T_0^{-1}T)^n T_0^{-1} - T_0^{-1}\right\| = \left\|\sum_{n\geq 1}(I - T_0^{-1}T)^n T_0^{-1}\right\| \\
&\leq \sum_{n\geq 1} ||I - T_0^{-1}T||^n\,||T_0^{-1}|| \\
&= \frac{||I - T_0^{-1}T||}{1 - ||I - T_0^{-1}T||}\,||T_0^{-1}|| \\
&= ||T_0^{-1}||^2\,\frac{||T_0 - T||}{1 - ||I - T_0^{-1}T||},
\end{aligned}$$

qui tend vers 0 lorsque T tend vers T_0. Ce qui montre la continuité de l'application $T \mapsto T^{-1}$ sur $\mathcal{GL}(E)$. $\square$

1.2 Définitions et propriétés

Dans cette section, on donne les définitions des notions élémentaires du cours ainsi que les propriétés immédiates de celles-ci.

Définition 1.2.1. Soit $T \in \mathcal{L}(E)$.

1. On appelle **ensemble résolvante** de T l'ensemble
$$\rho(T) \ := \ \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda\, I - T \text{ est inversible}\}\,.$$
Un élément de $\rho(T)$ est appelé **valeur résolvante** de T.
2. Si $\lambda \in \rho(T)$, on définit la **résolvante** $R_\lambda(T)$ de T au point λ par
$$R_\lambda(T) \ := \ (\lambda\, I - T)^{-1}\,.$$
La résolvante $R_\lambda(T)$ est simplement notée R_λ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur T.
3. Le **spectre** $\sigma(T)$ de T est l'ensemble
$$\sigma(T) \ := \ \mathbb{K} \setminus \rho(T).$$
Un élément de $\sigma(T)$ est une **valeur spectrale** de T.
4. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre** de T si $\lambda\, I - T$ n'est pas injectif. Autrement dit, l'ensemble des valeurs propres $\mathrm{Vp}(T)$ de T est donné par
$$\mathrm{Vp}(T) \ := \ \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \mathrm{Ker}\,(\lambda\, I - T) \neq \{0\}\}\,.$$

Remarque 1.2.2.

1. Les définitions ci-dessus restent valables même si E n'est pas un Banach.
2. On a toujours $\mathrm{Vp}(T) \subset \sigma(T)$.
3. Si E est de dimension finie, $\lambda\, I - T$ est inversible si et seulement si $\mathrm{Ker}(\lambda\, I - T) = \{0\}$. En particulier, on en déduit $\mathrm{Vp}(T) = \sigma(T)$. La situation est plus délicate en dimension infinie comme le montre l'exemple ci-dessous.

Exemple 1.2.3. Soient $E := C([0,1];\mathbb{K})$ et T l'opérateur défini dans l'Exemple 1.0.1. Alors, on a $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$ et $\mathrm{Im}(T) = \{g \in C^1([0,1];\mathbb{K}) \mid g(0) = 0\}$. En particulier, T est injectif donc $0 \notin \mathrm{Vp}(T)$ mais non surjectif donc $0 \in \sigma(T)$.

Proposition 1.2.4. *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$.*

1. *Si $|\lambda| > ||T||$ alors $\lambda \in \rho(T)$. En particulier, on a $\sigma(T) \subset \overline{D(0, ||T||)}$.*
2. *$\rho(T)$ est un ouvert non vide de $\mathbb{K}$.*
3. *$\sigma(T)$ est un compact de $\mathbb{K}$.*
4. *$\overline{\mathrm{Vp}(T)} \subset \sigma(T)$.*

Démonstration.
1. Si $|\lambda| > ||T||$ alors $\lambda \neq 0$ et $||\lambda^{-1} T|| < 1$ donc, d'après la Proposition 1.1.6, $I - \lambda^{-1} T$ est inversible, *i.e.* $\lambda \in \rho(T)$.
2. D'après le 1., $\rho(T)$ est non vide. Soit φ l'application définie de $\mathbb{K}$ dans $\mathcal{L}(E)$ par

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \qquad \varphi(\lambda) \;:=\; \lambda\, I - T.$$

Alors, $\rho(T) = \varphi^{-1}\left(\mathcal{GL}(E)\right)$. De plus, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a

$$||\varphi(\lambda) - \varphi(\mu)|| = ||\,(\lambda - \mu)\, I|| \leq |\lambda - \mu|,$$

donc φ est continue. Or, d'après la Proposition 1.1.6, $\mathcal{GL}(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$. Ainsi $\rho(T) = \varphi^{-1}\left(\mathcal{GL}(E)\right)$ est un ouvert de $\mathbb{K}$.
3. D'après le 2., $\sigma(T) = \mathbb{K} \setminus \rho(T)$ est fermé, or il est borné d'après le 1., donc compact.
4. D'après la Remarque 1.2.2, $\mathrm{Vp}(T) \subset \sigma(T)$. De plus, $\sigma(T)$ est fermé donc $\overline{\mathrm{Vp}(T)} \subset \sigma(T)$.
□

Proposition 1.2.5 (Identité de la résolvante)**.** *Soient $T \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda, \mu \in \rho(T)$. Alors, on a*

$$R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda)\, R_\lambda R_\mu = (\mu - \lambda)\, R_\mu R_\lambda. \tag{1.2.1}$$

De plus, l'application $\lambda \mapsto R_\lambda$ est dérivable sur $\rho(T)$ et sa dérivée est donnée par

$$\frac{dR_\lambda}{d\lambda} = -R_\lambda^2. \tag{1.2.2}$$

Démonstration. On a $R_\lambda = R_\lambda(T) = (\lambda\, I - T)^{-1}$ donc

$$\begin{aligned} R_\lambda &= R_\lambda\,(\mu I - T)\, R_\mu = \left[R_\lambda\,(\lambda\, I - T + (\mu - \lambda)\, I)\right] R_\mu \\ &= \left[I + (\mu - \lambda)\, R_\lambda\right] R_\mu = R_\mu + (\mu - \lambda)\, R_\lambda R_\mu, \end{aligned}$$

ce qui donne (1.2.1). D'après la Proposition 1.1.6, l'application $T \mapsto T^{-1}$ est continue sur $\mathcal{GL}(E)$, on en déduit que $\lambda \mapsto R_\lambda$ est continue. De plus, pour tout $h > 0$, on a

$$\frac{1}{h}(R_{\lambda+h} - R_\lambda) = -R_\lambda R_{\lambda+h}.$$

Alors, la continuité de $\lambda \mapsto R_\lambda$ entraîne sa dérivabilité et l'égalité (1.2.2). □

En fait, l'application $\lambda \mapsto R_\lambda$ n'est pas seulement dérivable sur $\rho(T)$ mais analytique comme le montre le résultat ci-dessous.

Proposition 1.2.6. *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$. L'application $\lambda \mapsto R_\lambda := R_\lambda(T)$ est analytique sur $\rho(T)$. Plus précisément, si $\lambda_0 \in \rho(T)$, alors $D(\lambda_0, \|R_{\lambda_0}\|^{-1}) \subset \rho(T)$, et, pour tout $\lambda \in D(\lambda_0, \|R_{\lambda_0}\|^{-1})$, on a*

$$R_\lambda = \sum_{n \geq 0} (-1)^n R_{\lambda_0}^{n+1}\,(\lambda - \lambda_0)^n.$$

Démonstration. Soit $\lambda_0 \in \rho(T)$. Si $\lambda \in D(\lambda_0, \|R_{\lambda_0}\|^{-1})$, alors $||\,(\lambda-\lambda_0)\,R_{\lambda_0}|| < 1$ et la série
$$\sum_{n\geq 0} \left(-R_{\lambda_0}\,(\lambda-\lambda_0)\right)^n,$$
est normalement convergente dans $\mathcal{L}(E)$, ce qui permet de définir l'opérateur $S_\lambda \in \mathcal{L}(E)$ par
$$S_\lambda \;:=\; R_{\lambda_0}\sum_{n\geq 0}\left(-R_{\lambda_0}\,(\lambda-\lambda_0)\right)^n = \sum_{n\geq 0}(-1)^n R_{\lambda_0}^{n+1}\,(\lambda-\lambda_0)^n. \tag{1.2.3}$$
En particulier, on a
$$(\lambda_0\, I - T)S_\lambda = R_{\lambda_0}^{-1}S_\lambda = \sum_{n\geq 0}(-1)^n R_{\lambda_0}^{n}\,(\lambda-\lambda_0)^n. \tag{1.2.4}$$
Alors, pour tout $\lambda \in D(\lambda_0, \|R_{\lambda_0}\|^{-1})$, d'après (1.2.3) et (1.2.4), on a
$$\begin{aligned}(\lambda\, I - T)\,S_\lambda &= (\lambda_0\, I - T + (\lambda-\lambda_0)I)S_\lambda\\ &= (\lambda_0\, I - T)S_\lambda + (\lambda-\lambda_0)S_\lambda\\ &= \sum_{n\geq 0}(-1)^n R_{\lambda_0}^{n}\,(\lambda-\lambda_0)^n - \sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1} R_{\lambda_0}^{n+1}\,(\lambda-\lambda_0)^{n+1}\\ &= I.\end{aligned}$$
De même, on obtient $S_\lambda\,(\lambda\, I - T) = I$. En conclusion $D(\lambda_0, \|R_{\lambda_0}\|^{-1}) \subset \rho(T)$ et $R_\lambda = S_\lambda$ pour tout $\lambda \in D(\lambda_0, \|R_{\lambda_0}\|^{-1})$. □

1.3 Rayon spectral

Définition 1.3.1. Soit $T \in \mathcal{L}(E)$. On définit le **rayon spectral** $r(T)$ de T par
$$r(T) \;:=\; \sup_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda|.$$
Si $\sigma(T) = \emptyset$, par convention, on pose $r(T) \;:=\; 0$.

Remarque 1.3.2. Soit $T \in \mathcal{L}(E)$.

1. On a $r(T) \in [\,0, ||T||\,]$ car, d'après la Proposition 1.2.4, $\sigma(T) \subset \overline{D\,(0, ||T||)}$. La définition est plus précise : $\overline{D(0, r(T))}$ est le plus petit disque fermé, centré en 0, contenant $\sigma(T)$.
2. En particulier, $\rho(T)$ contient la couronne ouverte $\mathbb{K}\backslash\overline{D(0, r(T))}$ et l'application $\lambda \mapsto R_\lambda = R_\lambda(T)$ est définie et dérivable sur cette couronne.

On va définir maintenant un nouvelle quantité $\tilde{r}(T)$ et on montrera ultérieurement le lien entre $\tilde{r}(T)$ et le rayon spectral $r(T)$.

Proposition 1.3.3. *Pour $T \in \mathcal{L}(E)$, la suite $\left(||T^n||^{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathbb{R}_+$ et on a*
$$\lim_{n\to+\infty} ||T^n||^{\frac{1}{n}} = \inf_{n\geq 1} ||T^n||^{\frac{1}{n}} \leq ||T||.$$

Notation 1.3.4. On pose $\tilde{r}(T) := \lim\limits_{n\to+\infty} ||T^n||^{\frac{1}{n}}$.

Remarque 1.3.5. D'après le critère de Cauchy, le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} T^n z^n$ est $1/\tilde{r}(T)$.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$0 \leq ||T^n||^{\frac{1}{n}} \leq ||T||,$$

donc les trois limites

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} ||T^n||^{\frac{1}{n}}, \quad \overline{\lim}_{n\to+\infty} ||T^n||^{\frac{1}{n}} \quad \text{et} \quad l = \inf_{k\geq 1} ||T^k||^{\frac{1}{k}},$$

sont des réels positifs. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$||T^q||^{\frac{1}{q}} \leq l + \varepsilon.$$

Or, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la division euclidienne de n par q assure qu'il existe $(b_n, r_n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n = b_n\, q + r_n$ avec $0 \leq r_n < q$. Supposons que $||T|| \neq 0$, alors on obtient

$$||T^n||^{\frac{1}{n}} = ||T^{b_n\, q + r_n}||^{\frac{1}{n}} \leq ||T^q||^{\frac{b_n}{n}}\, ||T||^{\frac{r_n}{n}} \leq (l+\varepsilon)^{\frac{q\, b_n}{n}}\, ||T||^{\frac{r_n}{n}}.$$

Or on a

$$\lim_{n\to+\infty} (l+\varepsilon)^{\frac{q\, b_n}{n}}\, ||T||^{\frac{r_n}{n}} = l + \varepsilon,$$

puisque $0 \leq r_n < q$ entraîne

$$\frac{r_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \frac{q\, b_n}{n} = 1 - \frac{r_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$

d'où

$$\overline{\lim}_{n\to+\infty} ||T^n||^{\frac{1}{n}} \leq l + \varepsilon, \tag{1.3.1}$$

(qui reste vraie pour $||T|| = 0$). De l'estimation (1.3.1), valable pour tout $\varepsilon > 0$, on déduit

$$\overline{\lim}_{n\to+\infty} ||T^n||^{\frac{1}{n}} \leq l.$$

D'autre part, on a

$$\overline{\lim}_{n\to+\infty} ||T^n||^{\frac{1}{n}} \geq \underline{\lim}_{n\to+\infty} ||T^n||^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geq n} ||T^k||^{\frac{1}{k}} \geq l,$$

car $\inf_{k\geq n} ||T^k||^{\frac{1}{k}} \geq \inf_{k\geq 1} ||T^k||^{\frac{1}{k}} = l$. Finalement, on obtient

$$l = \overline{\lim}_{n\to+\infty} ||T^n||^{\frac{1}{n}} = \underline{\lim}_{n\to+\infty} ||T^n||^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} ||T^n||^{\frac{1}{n}},$$

d'où le résultat. □

Proposition 1.3.6. *Soient $T \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Si $|\lambda| > \tilde{r}(T)$, alors $\lambda \in \rho(T)$ et on a*

$$R_\lambda(T) = \sum_{n\geq 1} T^{n-1}\,\lambda^{-n}.$$

De plus, la série converge absolument.

Démonstration. Si $|\lambda| > \tilde{r}(T)$, alors $|\lambda^{-1}| < \tilde{r}(T)^{-1}$. On en déduit, d'après la Remarque 1.3.5, que $\sum_{n\geq 1} T^{n-1}\,\lambda^{-n}$ converge absolument dans $\mathcal{L}(E)$. Notons $S_\lambda \in \mathcal{L}(E)$ la somme de cette série. On a

$$(\lambda\, I - T)S_\lambda = \sum_{n\geq 1} T^{n-1}\,\lambda^{-(n-1)} - \sum_{n\geq 1} T^{n}\,\lambda^{-n} = I,$$

et, de même, $S_\lambda(\lambda\, I - T) = I$. En conclusion, $\lambda\, I - T$ est inversible dans $\mathcal{L}(E)$ et $S_\lambda = (\lambda\, I - T)^{-1} = R_\lambda(T)$. $\square$

Corollaire 1.3.7. *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$, alors on a $r(T) \leq \tilde{r}(T)$.*

Démonstration. D'après la Proposition 1.3.6, $\sigma(T) \subset \overline{D(0,\tilde{r}(T))}$, or $\overline{D(0, r(T))}$ est le plus petit disque fermé, centré en 0, contenant $\sigma(T)$, d'où le résultat. $\square$

Rappels 1.3.8. *Considérons la couronne*

$$\mathcal{C} \;:=\; \mathcal{C}(\lambda_0, r, R) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid r < |\lambda - \lambda_0| < R\}\,,$$

où $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ et $0 \leq r < R \leq +\infty$. Soient X un espace de Banach sur $\mathbb{C}$ et f une fonction de $\mathcal{C}$ dans X, holomorphe sur $\mathcal{C}$. Alors, il existe une et une seule famille $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'éléments de X telle que

$$\forall\ \lambda \in \mathcal{C}, \quad f(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\,(\lambda - \lambda_0)^n. \tag{1.3.2}$$

La formule (1.3.2) *est appelée le développement en* **série de Laurent** *de la fonction f dans la couronne $\mathcal{C}$.*

Corollaire 1.3.9. *Si $\mathbb{K} := \mathbb{C}$, pour tout $T \in \mathcal{L}(E)$, on a $r(T) = \tilde{r}(T)$.*

Démonstration. Par définition de $r(T)$, on a $\mathcal{C} := \mathcal{C}\,(0, r(T), +\infty) \subset \rho(T)$, donc, d'après la Proposition 1.2.6, l'application $\lambda \mapsto R_\lambda = R_\lambda(T)$ est holomorphe sur la couronne $\mathcal{C}$. Alors, il existe une et une seule famille $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $\mathcal{L}(E)$ telle que

$$\forall\ \lambda \in \mathcal{C}, \qquad R_\lambda = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\,\lambda^n. \tag{1.3.3}$$

Or, d'après la Proposition 1.3.6, si $|\lambda| > \tilde{r}(T)$, alors $R_\lambda = \sum_{n\geq 1} T^{n-1}\,\lambda^{-n}$. Par unicité du développement en série de Laurent, on obtient

$$a_n = 0 \text{ si } n \geq 0 \quad \text{et} \quad a_{-n} = T^{n-1} \text{ si } n \geq 1. \tag{1.3.4}$$

Alors, (1.3.3) et (1.3.4) entraînent

$$\forall\ \lambda \in \mathcal{C}, \qquad R_\lambda = \sum_{n\geq 1} T^{n-1}\,\lambda^{-n}.$$

En particulier, si $|z| < \frac{1}{r(T)}$ alors la série $\sum_{n\geq 1} T^{n-1}\,z^n$ converge. Donc, d'après la Remarque 1.3.5, $\tilde{r}(T) \leq r(T)$, d'où le résultat. $\square$

1.4 Théorème de l'image spectrale

Soient $T \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors, on peut définir l'opérateur $P(T) \in \mathcal{L}(E)$ de la manière suivante :

$$P(T) \;:=\; \sum_{k=0}^{n} a_k\, T^k, \quad \text{où} \quad P(X) \;:=\; \sum_{k=0}^{n} a_k\, X^k,$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $P, S \in \mathbb{K}[X]$, on a

$$(\lambda P + \mu Q)(T) = \lambda P(T) + \mu Q(T) \quad \text{et} \quad PQ(T) = P(T)Q(T) = Q(T)P(T).$$

Ci-dessous on compare le spectre de T et celui de $P(T)$.

Théorème 1.4.1 (Image spectrale)**.** *Soient $T \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors, on a*

$$P(\sigma(T)) \subset \sigma(P(T)),$$

et l'égalité a lieu si $\mathbb{K} := \mathbb{C}$.

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors, λ est racine de $P(\lambda) - P$ donc il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(\lambda) - P(X) = (\lambda - X)Q(X)$, d'où

$$P(\lambda)\, I - P(T) = (\lambda\, I - T)Q(T) = Q(T)(\lambda\, I - T).$$

On suppose $P(\lambda) \notin \sigma(P(T))$ et on pose $S \;:=\; (P(\lambda)I - P(T))^{-1}$. On obtient

$$(\lambda\, I - T)Q(T)S = I = SQ(T)(\lambda\, I - T),$$

d'où $\lambda\, I - T$ est inversible d'inverse $SQ(T) = Q(T)S$. On en déduit $\lambda \notin \sigma(T)$. Autrement dit, si $\lambda \in \sigma(T)$ alors $P(\lambda) \in \sigma(P(T))$, ce qui donne le résultat.

Pour l'égalité, on suppose $\mathbb{K} := \mathbb{C}$ et P de degré supérieur ou égal à 1 (résultat évident sinon). Soient $\mu \in \sigma(P(T))$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les n racines complexes du polynôme $P - \mu$. On a

$$P(X) - \mu = c(X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n),$$

où $c \neq 0$. Alors on obtient

$$P(T) - \mu\, I = c(T - \lambda_1\, I) \dots (T - \lambda_n\, I).$$

Puisque $\mu \in \sigma(P(T))$, $P(T) - \mu\, I$ n'est pas inversible et donc il existe $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $(T - \lambda_{i_0}\, I)$ n'est pas inversible, d'où $\lambda_{i_0} \in \sigma(T)$. De plus, on a $P(\lambda_{i_0}) = \mu$ donc $\mu \in P(\sigma(T))$. □

Remarque 1.4.2. Soit $E := \mathbb{R}^2$ et $T \in \mathcal{L}(E)$ la rotation d'angle $\pi/2$. Alors, T est l'endomorphisme dont la matrice associée dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est donnée par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a $J^2 = -I$ donc
$$\sigma(T^2) = \mathrm{Vp}(T^2) = \mathrm{Vp}(J^2) = \{-1\}.$$
D'autre part, le polynôme caractéristique de J est $X^2 + 1$, d'où
$$\sigma(T) = \mathrm{Vp}(T) = \mathrm{Vp}(J) = \emptyset,$$
car $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On note $P(X) = X^2 \in \mathbb{R}[X]$. Alors, on obtient
$$P(\sigma(T)) = P(\emptyset) = \emptyset \subsetneq \sigma(P(T)) = \{-1\}.$$
Autrement dit, si $\mathbb{K} \neq \mathbb{C}$ l'égalité du Théorème de l'image spectrale peut ne pas avoir lieu.

Chapitre 2

Adjoint d'un opérateur

Dans ce chapitre, on définit la notion d'adjoint associé à un opérateur borné puis on en étudie les propriétés spectrales et les propriétés d'inversibilité. Le cadre est celui des espaces de Hilbert, ainsi on désigne par $(H, (\cdot,\cdot))$, $(H_1, (\cdot,\cdot)_1)$ et $(H_2, (\cdot,\cdot)_2)$ des espaces de Hilbert sur $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.1 Rappels sur les formes sesquilinéaires

Dans cette première section, on donne quelques rappels sur les formes sesquilinéaires qui seront utiles pour la suite. Une large partie de ces résultats est donnée dans le cadre général des espaces vectoriels.

Définition 2.1.1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que B est une **forme sesquilinéaire** sur E si c'est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{K}$ vérifiant, pour tout $x, y, z \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$B(\lambda x + y, z) = \lambda\, B(x,z) + B(y,z) \quad \text{et} \quad B(x, \lambda y + z) = \overline{\lambda}\, B(x,y) + B(x,z).$$

Si $\mathbb{K} := \mathbb{R}$, on dit aussi que B est une **forme bilinéaire** sur E.

Définition 2.1.2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une forme sesquilinéaire B sur E est dite **hermitienne** si

$$\forall\ x, y \in E, \quad B(x,y) = \overline{B(y,x)}.$$

Si $\mathbb{K} := \mathbb{R}$, on dit aussi que B est une forme bilinéaire **symétrique**.

Définition 2.1.3. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et B une forme sesquilinéaire sur E.

1. B est dite **positive** si, pour tout $x \in E$, $B(x,x) \geq 0$.
2. B est dite **définie positive** si, pour tout $x \in E \backslash \{0\}$, $B(x,x) > 0$.
3. Une forme sesquilinéaire hermitienne définie positive sur E est appelée un **produit scalaire** sur E si $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ et un **produit hermitien** si $\mathbb{K} := \mathbb{C}$.

Proposition 2.1.4. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et B une forme sesquilinéaire sur E.*

1. *Si B est hermitienne alors, pour tout $x \in E$, $B(x,x) \in \mathbb{R}$.*

2. *Si* $\mathbb{K} := \mathbb{C}$, *alors* B *est hermitienne si et seulement si, pour tout* $x \in E$, $B(x,x) \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Voir Td, fiche n° 2. □

Proposition 2.1.5 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *Soient* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* B *une forme sesquilinéaire hermitienne positive sur* E*. Alors, on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$\forall\, x, y \in E, \quad |B(x,y)| \leq \sqrt{B(x,x)}\,\sqrt{B(y,y)}.$$

Démonstration. Soient x, y fixés dans E. Alors, $B(x,y) \in \mathbb{C}$ donc il existe $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que $B(x,y) = r\,e^{i\theta}$. Soient $t \in \mathbb{R}$ et $\lambda_t := t\,e^{-i\theta}$. On a

$$B(\lambda_t\, x + y, \lambda_t\, x + y) = |\lambda_t|^2\, B(x,x) + \lambda_t\, B(x,y) + \overline{\lambda_t}\, B(y,x) + B(y,y).$$

Or $\lambda_t\, B(x,y) + \overline{\lambda_t}\, B(y,x) = \lambda_t\, B(x,y) + \overline{\lambda_t}\, \overline{B(x,y)} = 2rt$. Si on pose $a := B(x,x) \geq 0$ et $b := B(y,y) \geq 0$, on obtient

$$0 \leq B(\lambda_t\, x + y, \lambda_t\, x + y) = a\, |\lambda_t|^2 + 2rt + b = at^2 + 2rt + b.$$

Donc $B(\lambda_t\, x + y, \lambda_t\, x + y)$ est un polynôme (en t) du second degré toujours positif ou nul, alors son discriminant est négatif ou nul. Ainsi, on a $r^2 - a\,b \leq 0$, ce qui donne le résultat. □

Proposition 2.1.6. *Soient* $(X, \|\cdot\|)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel normé et* B *une forme sesquilinéaire sur* X*. Alors, les propositions suivantes sont équivalentes*

1. B *est continue.*
2. B *est continue en* $(0,0)$.
3. *Il existe* $k \geq 0$ *telle que, pour tout* $x, y \in X$*, on a* $|B(x,y)| \leq k\,||x||\,||y||$.

Démonstration. Il suffit de montrer que 2. entraîne 3. et 3. entraîne 1.

Supposons B continue en $(0,0)$. On pose $D := \{z \in \mathbb{K} \mid |z| < 1\}$. Comme B est continue en $(0,0)$ et $B(0,0) = 0$, $B^{-1}(D)$ est un voisinage de $(0,0)$ dans $X \times X$. Donc, il existe $r > 0$ tel que

$$\{(x,y) \in X \times X \mid ||x|| \leq r, ||y|| \leq r\} \subset B^{-1}(D).$$

Alors, pour tout $x, y \in X \setminus \{0\}$, on a

$$B\left(\frac{rx}{||x||}, \frac{ry}{||y||}\right) \in D,$$

autrement dit

$$\left|B\left(\frac{rx}{||x||}, \frac{ry}{||y||}\right)\right| \leq 1,$$

d'où

$$|B(x,y)| \leq \frac{1}{r^2}\,||x||\,||y||,$$

qui est encore vrai si x ou y est nul.

Supposons maintenant qu'il existe $k \geq 0$ telle que, pour tout $x, y \in X$, on a

$$|B(x,y)| \leq k\,||x||\,||y||.$$

Soit $(a,b) \in X \times X$. Alors, pour tout $(x,y) \in X \times X$, on obtient

$$\begin{aligned} |B(x,y) - B(a,b)| &= |B(x-a,y) + B(a,b-y)| \\ &\leq k\,||x-a||\,||y|| + k\,||a||\,||b-y|| \underset{(x,y)\to(a,b)}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

ce qui montre la continuité de B en (a,b). □

Notation 2.1.7. Pour $(X, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, on note $\mathcal{S}_2(X)$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ des formes sesquilinéaires continues sur X. Si $B \in \mathcal{S}_2(X)$, on pose

$$||B|| \;:=\; \sup\left\{|B(x,y)| \mid x,y \in X,\ ||x|| \leq 1,\ ||y|| \leq 1\right\},$$

ce qui définit une norme sur $\mathcal{S}_2(X)$. En particulier, on a

$$\forall\, x,y \in X, \quad |B(x,y)| \leq ||B||\,||x||\,||y||.$$

Lemme 2.1.8. *Si $T \in \mathcal{L}(H)$, alors on a*

$$||T|| = \sup\left\{|(Tx,y)| \mid x,y \in H,\ ||x|| \leq 1,\ ||y|| \leq 1\right\}.$$

Démonstration. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\sup_{||x||\leq 1, ||y||\leq 1} |(Tx,y)| \leq \sup_{||x||\leq 1, ||y||\leq 1} ||Tx||\,\|y\| \leq \sup_{||x||\leq 1} ||Tx|| = ||T||.$$

De plus, en posant par convention $\dfrac{Tx}{||Tx||} = 0$ si $||Tx|| = 0$, on a

$$\sup_{||x||\leq 1, ||y||\leq 1} |(Tx,y)| \geq \sup_{||x||\leq 1} \left|\left(Tx, \frac{Tx}{||Tx||}\right)\right| = \sup_{||x||\leq 1} ||Tx|| = ||T||,$$

d'où le résultat. □

Proposition 2.1.9. *Pour $T \in \mathcal{L}(H)$, on note $B_T \in \mathcal{S}_2(H)$ l'application définie par*

$$\forall\, x,y \in H, \quad B_T(x,y) \;:=\; (Tx,y)\,. \tag{2.1.1}$$

Alors, l'application $\Phi : T \longmapsto B_T$ est un isomorphisme isométrique, i.e. une application linéaire bijective telle que, pour tout $T \in \mathcal{L}(H)$, $||\Phi(T)|| = ||T||$.

Démonstration. L'application Φ est clairement linéaire et, d'après la Lemme 2.1.8, pour tout $T \in \mathcal{L}(H)$, on a

$$||\Phi(T)|| = ||B_T|| = \sup_{||x||\leq 1, ||y||\leq 1} |B_T(x,y)| = \sup_{||x||\leq 1, ||y||\leq 1} |(Tx,y)| = ||T||.$$

Donc Φ est une application linéaire isométrique et, en particulier, injective. Il reste à montrer que Φ est surjective. Soient $B \in \mathcal{S}_2(H)$ et $x \in H$. On note φ_x l'application définie sur H par $\varphi_x(y) := \overline{B(x,y)}$. Alors, φ_x est une forme linéaire et, de plus, continue car

$$\forall\ y \in H, \quad |\varphi_x(y)| = |B(x,y)| \leq ||B||\,||x||\,||y||.$$

Ainsi $\varphi_x \in H'$ et donc, d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique $T(x) \in H$ tel que $\varphi_x(y) = (y, T(x))$, pour tout $y \in H$. Ainsi, on a construit une application T de H dans H, telle que

$$\forall\ x, y \in H, \quad \overline{B(x,y)} = (y, T(x))\,,$$

d'où

$$\forall\ x, y \in H, \quad B(x,y) = (T(x), y)\,. \tag{2.1.2}$$

Pour $x, x', y \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\begin{aligned}(T(x+\lambda x'), y) &= B(x+\lambda x', y) = B(x,y) + \lambda\, B(x', y)\\ &= (T(x), y) + \lambda\,(T(x'), y)\\ &= (T(x) + \lambda\, T(x'), y)\,,\end{aligned}$$

donc T est linéaire. De plus, pour tout $x \in H$, on a

$$||Tx||^2 = (Tx, Tx) = B(x, Tx) \leq \|B\|\,||x||\,||Tx||,$$

d'où

$$||Tx|| \leq ||B||\,||x||, \quad \forall\ x \in H.$$

Finalement, $T \in \mathcal{L}(H)$ et, d'après (2.1.2), $B = B_T = \Phi(T)$. Donc l'application Φ est surjective. $\square$

Définition 2.1.10. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. On dit que T est **positif** (resp. **défini positif**) si l'application B_T définie par (2.1.1) est une forme sesquilinéaire positive (resp. définie positive). Autrement dit,

$$\begin{cases} T \text{ est positif si, pour tout } x \in H,\ (Tx, x) \geq 0, \\ T \text{ est défini positif si, pour tout } x \in H\setminus\{0\}\,,\ (Tx, x) > 0. \end{cases}$$

2.2 Adjoint d'un opérateur

Proposition 2.2.1. *Soit $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Alors, pour tout $y \in H_2$, il existe un unique $z \in H_1$ tel que*

$$\forall\ x \in H_1, \quad (Tx, y)_2 = (x, z)_1\,. \tag{2.2.1}$$

On note $z = T^*y$.

Définition 2.2.2. L'application T^* définie de H_2 dans H_1 par

$$\forall\ x \in H_1,\ \forall\ y \in H_2, \quad (Tx, y)_2 = (x, T^*y)_1\,.$$

est appelée l'**adjoint** de T.

Démonstration. Soit $y \in H_2$. L'application $\varphi_y : x \longmapsto (Tx, y)_2$ est linéaire et, pour tout $x \in H_1$, on a

$$|\varphi_y(x)| \leq |\,(Tx, y)_2\,| \leq ||T||\,||y||\,||x||.$$

Donc $\varphi_y \in H_1'$. On en déduit, d'après le Théorème de représentation de Riesz, qu'il existe un unique $z \in H_1$ tel que $\varphi_y(x) = (x, z)_1$, pour tout $x \in H_1$. Ce qui donne (2.2.1). $\square$

Proposition 2.2.3. *Soit $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Alors, $T^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ et $||T^*|| = ||T||$.*

Démonstration. Soient $y, y' \in H_2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors, pour tout $x \in H_1$, on a

$$\begin{aligned}(x, T^*(y + \lambda\, y'))_1 &= (Tx, y + \lambda\, y')_2 = (Tx, y)_2 + \overline{\lambda}\ (Tx, y')_2 \\ &= (x, T^*(y))_1 + \overline{\lambda}\ (x, T^*(y'))_1 = (x, T^*(y) + \lambda\, T^*(y'))_1\,,\end{aligned}$$

d'où $T^*(y + \lambda\, y') = T^*(y) + \lambda\, T^*(y')$, c'est à dire $T^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$. De plus, pour tout $y \in H_2$, on a

$$||T^*y||_1^2 = (T^*y, T^*y)_1 = (y, TT^*y)_2 \leq ||y||_2\,||T||\,||T^*y||_1,$$

d'où $||T^*y||_1 \leq ||T||\,||y||_2$. Donc $T^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ et $||T^*|| \leq ||T||$. Enfin, pour $x \in H_1$, on a

$$||Tx||_2^2 = (Tx, Tx)_2 = (x, T^*Tx)_1 \leq ||x||_1\,||T^*||\,||Tx||_2.$$

Donc $||Tx||_2 \leq ||T^*||\,||x||_1$. Alors, $||T|| \leq ||T^*||$, d'où l'égalité des normes. $\square$

Proposition 2.2.4. *Soient $S, T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, $U \in \mathcal{L}(H_2, H)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On a*

1. $(I_{H_1})^* = I_{H_1}$, *où $I_{H_1} \in \mathcal{L}(H_1)$ est l'opérateur identité.*
2. $T^{**} = T$.
3. $(\lambda\, S + \mu\, T)^* = \overline{\lambda}\, S^* + \overline{\mu}\, T^*$.
4. $UT \in \mathcal{L}(H_1, H)$ *et* $(UT)^* = T^*U^*$.

Démonstration. Voir Td, fiche n° 2. $\square$

Théorème 2.2.5. *Une application $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est inversible si et seulement si T^* est inversible, et alors on a $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*

Démonstration. Si $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est inversible alors, d'après la Proposition 2.2.4, on a

$$(T^{-1})^*T^* = (T\,T^{-1})^* = (I_{H_2})^* = I_{H_2},$$

et

$$T^*(T^{-1})^* = (T^{-1}\,T)^* = (I_{H_1})^* = I_{H_1}.$$

Donc $T^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ est inversible et $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Réciproquement, si $T^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ est inversible alors l'étape précédente montre que $(T^*)^* = T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est inversible. $\square$

2.3 Spectre de l'opérateur adjoint

Proposition 2.3.1. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. Alors, on a*

1. $\mathrm{Ker}(T) = (\mathrm{Im}(T^*))^{\perp}$.
2. $\overline{\mathrm{Im}(T)} = \mathrm{Ker}(T^*)^{\perp}$.

Démonstration.
1. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(T) &= \{x \in H \mid Tx = 0\} = \{x \in H \mid \forall\, y \in H,\ (Tx, y) = 0\} \\ &= \{x \in H \mid \forall\, y \in H,\ (x, T^* y) = 0\} \\ &= (\mathrm{Im}(T^*))^{\perp}. \end{aligned}$$

2. D'après le 1., on a

$$(\mathrm{Ker}(T^*))^{\perp} = \left(\mathrm{Im}(T)^{\perp}\right)^{\perp} = \overline{\mathrm{Im}(T)},$$

d'où le résultat. □

Proposition 2.3.2. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. Alors*

1. $\rho(T^*) = \left\{\lambda \in \mathbb{K} \mid \overline{\lambda} \in \rho(T)\right\}$ *et* $\sigma(T^*) = \left\{\lambda \in \mathbb{K} \mid \overline{\lambda} \in \sigma(T)\right\}$.
2. *Pour tout $\lambda \in \rho(T^*)$, $R_{\lambda}(T^*) = (R_{\overline{\lambda}}(T))^*$.*

Démonstration.
1. On a l'équivalence $\lambda\, I - T^*$ est inversible si et seulement si $(\lambda\, I - T^*)^*$ est inversible. Or $(\lambda\, I - T^*)^* = \overline{\lambda}\, I - T$ donc

$$\begin{aligned} \rho(T^*) &= \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda\, I - T^* \text{ est inversible}\} = \left\{\lambda \in \mathbb{K} \mid \overline{\lambda}\, I - T \text{ est inversible}\right\} \\ &= \left\{\lambda \in \mathbb{K} \mid \overline{\lambda} \in \rho(T)\right\}. \end{aligned}$$

De plus, $\sigma(T^*) = \mathbb{K} \setminus \rho(T^*)$, ce qui donne le résultat.
2. Si $\lambda \in \rho(T^*)$ alors :

$$\begin{aligned} R_{\lambda}(T^*) &= (\lambda I - T^*)^{-1} = \left(\left(\overline{\lambda} I - T\right)^*\right)^{-1} \\ &= \left(\left(\overline{\lambda} I - T\right)^{-1}\right)^* = (R_{\overline{\lambda}}(T))^*, \end{aligned}$$

qui est l'égalité attendue. □

Remarque 2.3.3. La notion d'opérateur adjoint se généralise au cas d'espaces de Banach E. Pour cela, on introduit le dual topologique E' de E, *i.e.* l'espace des formes linéaires continues sur E et, pour $f \in E'$ et $x \in E$, on note $\langle f, x\rangle_{E',E}$ au lieu de $f(x)$. On appelle $\langle \cdot, \cdot\rangle_{E',E}$ le **crochet de dualité** de E', E. Alors, le crochet $\langle \cdot, \cdot\rangle_{E',E}$ a de nombreuses similarités avec le produit scalaire d'espace de Hilbert. En particulier, si $T \in \mathcal{L}(E, F)$ on peut montrer qu'il existe $T' \in \mathcal{L}(F', E')$ tel que

$$\forall\, x \in E,\ \forall\, f \in F', \quad \langle T' f, x\rangle_{E',E} = \langle f, Tx\rangle_{F',F}.$$

Il s'agit bien d'une généralisation puisque si E est un espace de Hilbert alors E' peut être identifié avec E d'après le théorème de représentation de Riesz. Le crochet de dualité $\langle \cdot, \cdot\rangle_{E',E}$ est alors simplement le produit scalaire de E. Pour plus détails, on renvoie à [2].

2.4 Opérateurs coercifs et théorème de Lax-Milgram

Définition 2.4.1. Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est dit **coercif** (ou **elliptique**) s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall\, x \in H, \quad |\,(Tx, x)\,| \geq C\,||x||^2.$$

De même, une forme sesquilinéaire continue $B \in \mathcal{S}_2(H)$ est dite **coercive** (ou **elliptique**) s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall\, x \in H, \quad |B(x, x)| \geq C\,||x||^2.$$

Remarque 2.4.2. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. Alors, d'après la Proposition 2.1.9, il est clair que l'application $B_T \in \mathcal{S}_2(H)$ définie par (2.1.1) est coercive si et seulement si $T \in \mathcal{L}(H)$ est coercif.

Proposition 2.4.3. *Si $T \in \mathcal{L}(H)$ est coercif, alors T est inversible dans $\mathcal{L}(H)$.*

Démonstration. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\forall\, x \in H, \quad ||Tx||\,||x|| \geq |\,(Tx, x)\,| \geq C\,||x||^2,$$

d'où, pour tout $x \in H$, $||Tx|| \geq C\,||x||$. D'après le Corollaire 1.1.5, il suffit de vérifier que $\overline{\mathrm{Im}(T)} = H$. Or, pour tout $x \in H$, on a

$$|\,(T^* x, x)\,| = |\,(x, Tx)\,| \geq C\,||x||^2.$$

Donc T^* est aussi coercif, ce qui entraîne, comme pour T, l'injectivité de T^*. Alors, d'après la Proposition 2.3.1, on obtient

$$\overline{\mathrm{Im}(T)} = (\mathrm{Ker}(T^*))^\perp = \{0\}^\perp = H,$$

ce qui donne le résultat. □

Théorème 2.4.4 (Théorème de Lax-Milgram)**.** *Soient $B \in \mathcal{S}_2(H)$ coercive et $L \in H'$. Alors, il existe un unique $u \in H$ tel que*

$$\forall\, v \in H, \quad B(u, v) = Lv. \tag{2.4.1}$$

Remarque 2.4.5. Le théorème de Lax-Milgram permet de montrer l'existence et l'unicité de solutions d'équations aux dérivées partielles dites elliptiques. En effet, on peut montrer (voir [1], [2] et [6]) que la solution au sens faible d'une e.d.p. elliptique s'obtient comme solution d'un problème du type (2.4.1).

Démonstration. D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe $f \in H$ tel que $Lv = (f, v)$, pour tout $v \in H$. D'après la Proposition 2.1.9, la Remarque 2.4.2 et la Proposition 2.4.3, il existe $T \in \mathcal{L}(H)$ inversible tel que $B(u, v) = (Tu, v)$, pour tous $u, v \in H$. Alors, (2.4.1) est équivalent à

$$\forall\, v \in H, \quad (Tu, v) = (f, v)\,,$$

soit $Tu = f$ qui admet bien une unique solution puisque T est inversible. □

Chapitre 3

Opérateurs auto-adjoints

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux opérateurs dits auto-adjoints dont on étudie les propriétés spectrales et pour lesquels on définit un calcul fonctionnel continu. Le cadre est celui des espaces de Hilbert. Ainsi, dans tout le chapitre, $(H, (\cdot, \cdot))$ désigne un espace de Hilbert sur $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\|\cdot\|$ la norme associée.

3.1 Propriétés spectrales des opérateurs auto-adjoints

Définition 3.1.1. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$.

1. On dit que T est un opérateur **normal** s'il commute avec son adjoint, *i.e.* $TT^* = T^*T$.
2. On dit que T est un opérateur **auto-adjoint** si $T = T^*$ (on dit aussi **symétrique** lorsque $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ et **hermitien** lorsque $\mathbb{K} := \mathbb{C}$).

Exemple 3.1.2. Soient $a := (a_n)_{n\geq 0} \in l^\infty(\mathbb{K})$ et T_a l'opérateur défini sur $H := l^2(\mathbb{K})$ par

$$\forall\ x := (x_n)_{n\geq 0} \in H, \quad T_a x \ := \ (a_n x_n)_{n\geq 0}.$$

On a vu (Td, fiche n° 1) que $T_a \in \mathcal{L}(H)$. De plus, on montre (voir Td, fiche n° 2) que T_a^* est défini par

$$\forall\ x := (x_n)_{n\geq 0} \in H, \quad T_a^* x \ := \ (\overline{a_n} x_n)_{n\geq 0}.$$

En particulier, T_a est auto-adjoint si et seulement si $a \in l^\infty(\mathbb{R})$. De plus, on vérifie aisément que T_a est normal.

Remarque 3.1.3. (voir Td, fiche n° 2) Soit $T \in \mathcal{L}(H)$.

1. Si T est auto-adjoint alors, pour tout $x \in H$, $(Tx, x) \in \mathbb{R}$.
2. Si $\mathbb{K} := \mathbb{C}$, T est auto-adjoint si et seulement si, pour tout $x \in H$, $(Tx, x) \in \mathbb{R}$.

Proposition 3.1.4 (Valeurs propres des opérateurs auto-adjoints)**.** *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint. Alors,*

1. $\mathrm{Vp}(T) \subset \mathbb{R}$.
2. $\lambda \in \mathrm{Vp}(T)$ *si et seulement si* $\overline{\mathrm{Im}\,(\lambda I - T)} \neq H$.

3. *Si* $\lambda, \mu \in \mathrm{Vp}(T)$, $\lambda \neq \mu$, *alors* $\mathrm{Ker}(\lambda I - T) \perp \mathrm{Ker}(\mu I - T)$, *i.e. les sous-espaces propres de* T *sont orthogonaux deux à deux.*

Démonstration.
1. Si $\lambda \in \mathrm{Vp}(T)$, alors il existe $x \in H \setminus \{0\}$ tel que $Tx = \lambda x$. Donc

$$\lambda = \frac{(\lambda x, x)}{||x||^2} = \frac{(Tx, x)}{||x||^2} \in \mathbb{R}.$$

2. D'après la Proposition 2.3.1, on a

$$\overline{\mathrm{Im}\,(\lambda I - T)} = (\mathrm{Ker}\,(\lambda I - T)^*)^\perp = \left(\mathrm{Ker}\left(\overline{\lambda}\, I - T\right)\right)^\perp.$$

Puisque $\mathrm{Vp}(T) \subset \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathrm{Vp}(T)$ si et seulement si $\overline{\lambda} \in \mathrm{Vp}(T)$, ce qui est équivalent à $\mathrm{Ker}\left(\overline{\lambda}\, I - T\right) \neq \{0\}$, soit encore $\left(\mathrm{Ker}\left(\overline{\lambda}\, I - T\right)\right)^\perp \neq H$. Donc $\lambda \in \mathrm{Vp}(T)$ si et seulement si $\overline{\mathrm{Im}\,(\lambda I - T)} \neq H$.
3. Si $x \in \mathrm{Ker}\,(\lambda I - T)$ et $y \in \mathrm{Ker}\,(\mu I - T)$, alors

$$Tx = \lambda x \quad \text{et} \quad Ty = \mu y.$$

Comme $T = T^*$ et $\mu \in \mathbb{R}$, on obtient

$$(\lambda - \mu)\,(x, y) = (\lambda x, y) - (x, \mu y) = (Tx, y) - (x, Ty) = 0,$$

d'où $(x, y) = 0$ car $\lambda \neq \mu$. Autrement dit, $\mathrm{Ker}\,(\lambda I - T) \perp \mathrm{Ker}\,(\mu I - T)$. □

Théorème 3.1.5 (Propriétés spectrales des opérateurs auto-adjoints)**.** *On suppose* $H \neq \{0\}$. *Soit* $T \in \mathcal{L}(H)$ *un opérateur auto-adjoint. On pose*

$$m := \inf_{||x||=1} (Tx, x) \qquad \textit{et} \qquad M := \sup_{||x||=1} (Tx, x)\,.$$

Alors,
1. $m, M \in [-||T||, ||T||\,] \subset \mathbb{R}$.
2. $m, M \in \sigma(T)$.
3. $\sigma(T) \subset [m, M]$.
4. $||T|| = \sup\{|\,(Tx, x)\,|,\ x \in H \text{ et } \|x\| = 1\}$. *En particulier,* $||T|| = \max\,(|m|, |M|)$.

Les points 2.,3. et 4. entraînent immédiatement

Corollaire 3.1.6. *Si* $T \in \mathcal{L}(H)$ *est un opérateur auto-adjoint, alors* $\|T\| = \max_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$.

Démonstration.
1. Soit $x \in H$ tel que $||x|| = 1$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|\,(Tx, x)\,| \leq ||T||\,||x||^2 \leq ||T||.$$

Or, T étant auto-adjoint, $(Tx, x) \in \mathbb{R}$ et donc

$$(Tx, x) \in [-||T||, ||T||\,] \subset \mathbb{R}.$$

On en déduit $m, M \in [-||T||, ||T||] \subset \mathbb{R}$.
2. On pose $S := T - m\,I$ et on note, pour tous $x, y \in H$, $B_S(x, y) := (Sx, y)$. Alors, $B_S \in \mathcal{S}_2$. De plus, m étant réel, on obtient pour tout $x, y \in H$

$$\begin{aligned} B_S(x,y) &= (Tx - m\,x, y) = (Tx, y) - (m\,x, y) \\ &= (x, Ty) - (x, m\,y) = (x, Sy) \\ &= \overline{B_S(y,x)}. \end{aligned}$$

Donc B_S est hermitienne. Enfin, par définition de m, pour tout $x \in H \backslash \{0\}$, on a

$$m \leq \left(T \left(\frac{x}{||x||} \right), \frac{x}{||x||} \right),$$

d'où $m\,||x||^2 \leq (Tx, x)$. Ainsi, on obtient

$$B_S(x, x) = (Tx - m\,x, x) = (Tx, x) - m\,||x||^2 \geq 0,$$

et donc B_S est une forme sesquilinéaire hermitienne positive sur H. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tous $x, y \in H$, on a

$$|B_S(x,y)|^2 \leq B_S(x,x)\, B_S(y,y),$$

soit encore

$$|\,(Sx, y)\,|^2 \leq (Sx, x)\;(Sy, y)\,. \tag{3.1.1}$$

D'une part, par définition de m, il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de H avec $\|x_n\| = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, telle que

$$(Tx_n, x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} m,$$

autrement dit

$$(Sx_n, x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.1.2}$$

D'autre part, en appliquant (3.1.1) avec $x = x_n$ et $y = Sx_n$, où $n \in \mathbb{N}$, on obtient

$$|\,(Sx_n, Sx_n)\,|^2 \leq (Sx_n, x_n)\;(S(Sx_n), Sx_n)\,.$$

On en déduit

$$||Sx_n||^4 \leq (Sx_n, x_n)\;||S||\,||Sx_n||\,||Sx_n||,$$

et donc

$$||Sx_n||^2 \leq (Sx_n, x_n)\,||S||. \tag{3.1.3}$$

Alors, d'après (3.1.2) et (3.1.3), on obtient

$$Sx_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Finalement, supposons que $m \notin \sigma(T)$, alors $S = T - m\,I$ est inversible et on a

$$x_n = S^{-1} S x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui est absurde puisque $\|x_n\| = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $m \in \sigma(T)$. De plus, en considérant l'opérateur $-T$, on obtient

$$\inf_{\|x\|=1} (-Tx, x) \in \sigma(-T),$$

d'où

$$M = \sup_{\|x\|=1} (Tx, x) = - \inf_{\|x\|=1} (-Tx, x) \in \sigma(T).$$

3. Si $\lambda \in \mathbb{K} \backslash [m, M]$, alors $d \ := \ \mathrm{dist}\,(\lambda, [m, M]) > 0$. Or, pour tout $x \in H \setminus \{0\}$, on a

$$\left(T \left(\frac{x}{||x||} \right), \frac{x}{||x||} \right) \in [m, M],$$

donc

$$|\,(\lambda\, x - Tx, x)\,| = \left| \lambda - \left(T \left(\frac{x}{||x||} \right), \frac{x}{||x||} \right) \right| \, ||x||^2 \geq d\, ||x||^2.$$

On en déduit que $\lambda\, I - T$ est coercif donc inversible, *i.e.* $\lambda \in \rho(T)$.
4. Voir Td, fiche n° 2. □

Si T est auto-adjoint positif alors $m \geq 0$. On en déduit le résultat suivant :

Corollaire 3.1.7. *Un opérateur auto-adjoint T sur H est positif si et seulement si son spectre $\sigma(T)$ est contenu dans $\mathbb{R}^+$.*

3.2 Calcul fonctionnel pour les opérateurs auto-adjoint

Théorème 3.2.1 (Théorème de l'image spectrale des opérateurs auto-adjoint)**.** *Soient $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint et $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors, l'égalité*

$$P(\sigma(T)) = \sigma(P(T)),$$

a lieu même si $\mathbb{K} := \mathbb{R}$.

Démonstration. Voir Td, fiche n° 2. □

Notation 3.2.2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ donné par

$$P(X) \ := \ \sum_{n=0}^{k} a_n\, X^n, \tag{3.2.1}$$

où $k \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$. Alors, on note $\widetilde{P} \in \mathbb{K}[X]$ le polynôme défini par

$$\widetilde{P}(X) \ := \ \sum_{n=0}^{k} \overline{a_n}\, X^n.$$

Lorsque $\mathbb{K} := \mathbb{R}$, on a $P = \widetilde{P}$ et, si $\mathbb{K} := \mathbb{C}$, on a

$$\widetilde{P}(z) = \overline{P(\overline{z})}, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Remarque 3.2.3. Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $T \in \mathcal{L}(H)$. Alors, on a

$$(P(T))^* = \widetilde{P}(T^*).$$

De plus, si T auto-adjoint, on obtient

$$(P(T))^* = \widetilde{P}(T).$$

Proposition 3.2.4. *Soient $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint et $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors, on a*

$$\|P(T)\| = \max_{\lambda\in\sigma(T)} |P(\lambda)|. \tag{3.2.2}$$

Démonstration.
1ère étape. On pose $Q(T) := P(T)\widetilde{P}(T)$. On va montrer que Q est un opérateur auto-adjoint positif de norme

$$\|Q(T)\| = \max_{\lambda\in\sigma(T)} |P(\lambda)|^2. \tag{3.2.3}$$

Pour tous $x, y \in H$, on a

$$\begin{aligned} (Q(T)x, y) &= \Big(P(T)\widetilde{P}(T)x, y\Big) = \Big(\widetilde{P}(T)x, \widetilde{P}(T)y\Big) \\ &= \Big(x, P(T)\widetilde{P}(T)y\Big) = (x, Q(T)y)\,, \end{aligned}$$

et

$$(Q(T)x, x) = \Big(\widetilde{P}(T)x, \widetilde{P}(T)x\Big) = \|\widetilde{P}(T)x\|^2 \geq 0.$$

Donc $Q(T)$ est auto-adjoint positif. Alors, d'après le Corollaire 3.1.6 et le Corollaire 3.1.7, on a

$$\|Q(T)\| = \max_{\lambda\in\sigma(Q(T))} \lambda.$$

D'après le Théorème 3.2.1, on obtient

$$\|Q(T)\| = \max_{\lambda\in\sigma(Q(T))} \lambda = \max_{\lambda\in\sigma(T)} Q(\lambda).$$

Comme $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \max_{\lambda\in\sigma(T)} Q(\lambda) &= \max_{\lambda\in\sigma(T)} P(\lambda)\widetilde{P}(\lambda) \\ &= \max_{\lambda\in\sigma(T)} \left(\sum_{n=0}^{k} a_n\, \lambda^n\right) \left(\sum_{n=0}^{k} \overline{a_n}\, \lambda^n\right) \\ &= \max_{\lambda\in\sigma(T)} \left(\sum_{n=0}^{k} a_n\, \lambda^n\right) \overline{\left(\sum_{n=0}^{k} a_n\, \lambda^n\right)} \\ &= \max_{\lambda\in\sigma(T)} |P(\lambda)|^2\,, \end{aligned}$$

ce qui donne (3.2.3).
2ème étape. Si $w \in \mathcal{L}(H)$ alors

$$\|w\, w^*\| = \|w^*\, w\| = \|w\|^2.$$

D'après la Remarque 3.2.3, on en déduit

$$\|P(T)\|^2 = \|P(T)\,(P(T))^*\| = \|P(T)\widetilde{P}(T)\|.$$

D'après l'égalité (3.2.3), on obtient alors

$$\|P(T)\|^2 = \max_{\lambda \in \sigma(T)} |P(\lambda)|^2,$$

dont on déduit (3.2.2). □

Notation 3.2.5. Soit K un compact de $\mathbb{R}$.

1. On désigne par $C(K;\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions continues de K dans $\mathbb{K}$. On muni cet espace de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$.
2. $\mathcal{P}(K)$ désigne le sous-espace vectoriel de $C(K;\mathbb{K})$ constitué des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ restreints à K.

Lemme 3.2.6. *Soient $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint et $P \in \mathcal{P}(\sigma(T))$. Soient $Q, R \in \mathbb{K}[X]$ deux prolongements de P à $\mathbb{K}$. Alors, on a*

$$Q(T) = R(T).$$

On peut donc définir l'opérateur $P(T) \in \mathcal{L}(H)$ en posant $P(T) := Q(T)$, où $Q \in \mathbb{K}[X]$ est n'importe quel prolongement de P à $\mathbb{K}$.

Démonstration. D'après le Proposition 3.2.4, on a

$$\begin{aligned}\|Q(T) - R(T)\| &= \|(Q-R)(T)\| \\ &= \max_{\lambda \in \sigma(T)} |(Q-R)(\lambda)| = \max_{\lambda \in \sigma(T)} |(P-P)(\lambda)| = 0,\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Théorème 3.2.7. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint. Alors, l'application Φ définie de $\mathcal{P}(\sigma(T))$ dans $\mathcal{L}(H)$ par*

$$\Phi(P) \;:=\; P(T),$$

se prolonge de manière unique à $C(\sigma(T);\mathbb{K})$ en une application linéaire isométrique $\widetilde{\Phi}$. Ainsi, pour toute $f \in C(\sigma(T);\mathbb{K})$, on peut définir $f(T) \in \mathcal{L}(H)$ en posant

$$f(T) \;:=\; \widetilde{\Phi}(f).$$

Démonstration. On montre en premier lieu que Φ est une application linéaire. Soient $P_j \in \mathcal{P}(\sigma(T))$ et $\lambda_j \in \mathbb{K}$, avec $j = 1, 2$. On a

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) &= (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(T) \\ &= \lambda_1 P_1(T) + \lambda_2 P_2(T) \\ &= \lambda_1 \Phi(P_1) + \lambda_2 \Phi(P_2).\end{aligned}$$

De plus, Φ est isométrique. En effet, si $P \in \mathcal{P}(\sigma(T))$, on a

$$\|\Phi(P)\|_{\mathcal{L}(H)} = \|P(T)\| = \max_{\lambda \in \sigma(T)} |P(\lambda)| = \|P\|_\infty. \tag{3.2.4}$$

Soit $f \in C(\sigma(T); \mathbb{K})$. D'après le théorème de Stone-Weierstrass, il existe une suite $(P_n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{P}(\sigma(T))$ telle que

$$P_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f \quad \text{dans } C(\sigma(T); \mathbb{K}).$$

Comme $\mathcal{L}(H)$ est un espace de Banach, il existe un unique prolongement $\widetilde{\Phi}$ de Φ qui soit linéaire continu de $\mathcal{C}(\sigma(T); \mathbb{K})$ dans $\mathcal{L}(H)$ défini par

$$\widetilde{\Phi}(f) = \lim_{n\to+\infty} \Phi(P_n).$$

De plus, on a

$$\|P_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|f\|_\infty,$$

et

$$\|\Phi(P_n)\|_{\mathcal{L}(H)} = \|P_n\|_\infty,$$

car Φ est une isométrie. On en déduit

$$\|\widetilde{\Phi}(f)\|_{\mathcal{L}(H)} = \lim_{n\to+\infty} \|\Phi(P_n)\|_{\mathcal{L}(H)} = \lim_{n\to+\infty} \|P_n\|_\infty = \|f\|_\infty.$$

Donc $\widetilde{\Phi}$ est une application linéaire isométrique. □

Remarque 3.2.8. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint. Par construction, pour $f \in C(\sigma(T); \mathbb{K})$, on a

$$f(T) = \lim_{n\to+\infty} P_n(T) \quad \text{dans } \mathcal{L}(H), \tag{3.2.5}$$

pour toute suite $(P_n)_{n\geq 1}$ de $\mathbb{K}[X]$ qui approche f uniformément sur $\sigma(T)$.

Proposition 3.2.9. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint. Pour $f, g \in C(\sigma(T); \mathbb{K})$, on a*

1. $(\lambda f + \mu g)(T) = \lambda f(T) + \mu g(T), \quad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$
2. $(fg)(T) = f(T)\, g(T).$
3. $(f(T))^* = \overline{f}(T)$, *où* $\overline{f}(z) := \overline{f(z)}$ *pour tout* $z \in \sigma(T)$.

Démonstration. Laissée en exercice. □

Théorème 3.2.10 (Image Spectrale)**.** *Soient $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint et $f \in C(\sigma(T);\mathbb{K})$. On a*

$$f\left(\sigma(T)\right) = \sigma\left(f(T)\right).$$

Démonstration. Montrons l'inclusion $\sigma(f(T)) \subset f(\sigma(T))$. On fixe $\lambda \notin f(\sigma(T))$. On pose

$$g \ := \ (\lambda - f)^{-1} \in C(\sigma(T);\mathbb{K}),$$

et on note $\mathbf{1}$ la fonction constante égale à 1. Alors, on a

$$\begin{cases} (\lambda\, I - f(T))\, g(T) & = ((\lambda - f)\, g)\,(T) = \mathbf{1}(T) = I \\ g(T)\,(\lambda\, I - f(T)) & = (g\,(\lambda - f))\,(T) = \mathbf{1}(T) = I, \end{cases}$$

donc $\lambda\, I - f(T)$ est inversible, d'où $\lambda \notin \sigma(f(T))$ et on a

$$R_\lambda\left(f(T)\right) = (\lambda - f)^{-1}(T). \tag{3.2.6}$$

On en déduit

$$\sigma\left(f(T)\right) \subset f\left(\sigma(T)\right).$$

Pour montrer l'inclusion inverse, on utilise le résultat suivant qui sera démontré plus bas.

Lemme 3.2.11. *Soient $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint et $f \in C(\sigma(T);\mathbb{K})$ à valeurs réelles positives. Si $f(T)$ est inversible, alors $0 \notin f\left(\sigma(T)\right)$*

Soit $\lambda \notin \sigma(f(T))$. Alors, $\lambda\, I - f(T)$ est inversible, son adjoint $\overline{\lambda}\, I - f(T)^* = \overline{\lambda}\, I - \overline{f}(T)$ aussi et donc le produit $(\lambda\, I - f(T))\left(\overline{\lambda}\, I - \overline{f}(T)\right)$ l'est également. Or on a

$$(\lambda\, I - f(T))\left(\overline{\lambda}\, I - \overline{f}(T)\right) = (\lambda - f)(T)\overline{(\lambda - f)}(T) = |\lambda - f|^2(T).$$

La fonction $g := |\lambda - f|^2 \in C(\sigma(T);\mathbb{K})$ est à valeurs réelles positives et $g(T)$ est inversible donc, d'après le Lemme 3.2.11, $0 \notin g\left(\sigma(T)\right)$. Ainsi, il n'existe pas $x \in \sigma(T)$ tel que $|\lambda - f|^2(x) = 0$ et, *a fortiori*, tel que $(\lambda - f)(x) = 0$. Autrement dit, $0 \notin (\lambda - f)\left(\sigma(T)\right)$. Donc $\lambda \notin f\left(\sigma(T)\right)$ et, finalement, $f\left(\sigma(T)\right) \subset \sigma(f(T))$. $\square$

Démonstration du Lemme 3.2.11. Soit $f \in C(\sigma(T);\mathbb{K})$ à valeurs réelles positives telle que $f(T)$ est inversible, *i.e.* $0 \notin \sigma(f(T))$. On a $\sigma\left(f(T)\right) \subset f\left(\sigma(T)\right) \subset \mathbb{R}^+$, donc $-\frac{1}{n} \notin \sigma\left(f(T)\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. D'après (3.2.6), on obtient

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad R_{-\frac{1}{n}}\left(f(T)\right) = \left(-\frac{1}{n} - f\right)^{-1}(T).$$

Puisque l'application $\lambda \mapsto R_\lambda(f(T))$ est continue sur $\rho(f(T))$, on obtient par passage à la limite

$$R_0\left(f(T)\right) = -f^{-1}(T).$$

De plus, l'application $f \mapsto f(T)$ étant isométrique, on a

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \left\|R_{-\frac{1}{n}}\left(f(T)\right)\right\| = \left\|\left(-\frac{1}{n} - f\right)^{-1}\right\|_\infty = \sup_{x\in\sigma(T)}\left|\frac{1}{n} + f(x)\right|^{-1}.$$

Si $0 \in f(\sigma(T))$ alors, $\sup_{x\in\sigma(T)} \left|\frac{1}{n} + f(x)\right|^{-1} \geq n$. Alors, on aurait par passage à la limite $\|f^{-1}\|_\infty = \|R_0(f(T))\| = +\infty$, ce qui est absurde. Donc $0 \notin f(\sigma(T))$. □

Corollaire 3.2.12. *Soient $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint et $f \in C(\sigma(T); \mathbb{K})$.*

1. *L'opérateur $f(T)$ est auto-adjoint si et seulement si f est à valeurs réelles.*
2. *L'opérateur $f(T)$ est auto-adjoint positif si et seulement si $f \geq 0$.*

Démonstration. Soit $P \in \mathcal{P}(\sigma(T))$, alors $P^* = \tilde{P}$ et donc $P(T)$ est auto-adjoint si et seulement si $P = \tilde{P}$ ce qui équivaut, par définition de $\tilde{P}$, à $P \in \mathbb{R}[X]$. On en déduit 1. par application du Théorème 3.2.7. Pour la seconde équivalence, d'après le Corollaire 3.1.7, si $f(T)$ est auto-adjoint alors $f(T)$ est positif si et seulement si $\sigma(f(T)) \subset \mathbb{R}^+$. Le 2. se déduit alors du théorème de l'image spectral. □

Exemple 3.2.13. Soient T un opérateur auto-adjoint positif, $\alpha > 0$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) := x^\alpha$. Alors, $f \in C(\sigma(T); \mathbb{K})$ et on peut définir T^α qui, d'après le Corollaire 3.2.12, est auto-adjoint positif. De plus, d'après la Proposition 3.2.9, on a $T^{\alpha+\beta} = T^\alpha T^\beta$, pour tous $\alpha, \beta > 0$.

Chapitre 4

Opérateurs compacts

Dans ce chapitre, on donne la définition et les propriétés élémentaires des opérateurs compacts. Ensuite on étudie les propriétés spectrales des opérateurs compacts. Le cadre est celui des espaces de Banach.

Ainsi, on désigne par $(E, ||\cdot||_E)$, $(F, ||\cdot||_F)$ et $(G, ||\cdot||_G)$ des espaces de Banach sur $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. De plus, pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé $(X, ||\cdot||_X)$, on désigne par B_X la boule unité fermée de X, *i.e.*

$$B_X \ := \ \{x \in X \mid ||x||_X \leq 1\}\,.$$

4.1 Définition et propriétés

On rappelle que $L(E, F)$ désigne l'espace de Banach sur $\mathbb{K}$ des opérateurs de E dans F, tandis que $\mathcal{L}(E, F)$ désigne l'espace de Banach sur $\mathbb{K}$ des opérateurs bornés de E dans F.

Définition 4.1.1. On dit que T est un **opérateur compact** de E dans F si $T \in L(E, F)$ et $\overline{T(B_E)}$ est un compact de F. L'ensemble des opérateurs compacts de E dans F est noté $\mathcal{K}(E, F)$. Lorsque $E = F$, on note simplement $\mathcal{K}(E, E) = \mathcal{K}(E)$.

On rappelle que si (X, d) est un espace métrique, un sous-ensemble Y de X est dit **relativement compact** si son adhérence dans X est compacte. Alors, la Définition 4.1.1 est équivalente à $T \in \mathcal{K}(E, F)$ si et seulement si $T(B_E)$ est relativement compact.

En particulier, il est alors immédiat que $T \in \mathcal{K}(E, F)$ si et seulement $T(B)$ est relativement compact pour toute partie bornée B de F. On en déduit le résultat suivant :

Proposition 4.1.2 (Caractérisation des opérateurs compacts)**.** *Si $T \in L(E, F)$, alors les propositions suivantes sont équivalentes*

1. *$T \in \mathcal{K}(E, F)$.*
2. *Pour toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, la suite $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite qui converge dans F.*

Ci-dessous on rappelle le théorème d'Ascoli qui est un outil classique et puissant pour montrer qu'un opérateur est compact.

Théorème 4.1.3 (Théorème d'Ascoli)**.** *Soient K un espace compact et (X,d) un espace métrique. Alors, une partie $\mathcal{H}$ de $C(K;X)$ est relativement compacte pour la topologie de la convergence uniforme si et seulement si les deux conditions suivantes sont respectées :*

1. *$\mathcal{H}$ est équicontinue, i.e. pour tout $x \in K$, on a*
$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ V \in \mathcal{V}(x),\ \forall\ g \in \mathcal{H},\ \forall\ y \in V, \quad d(g(x), g(y)) < \varepsilon,$$
où $\mathcal{V}(x)$ désigne l'ensemble des voisinages de x pour la distance $d(\cdot,\cdot)$.
2. *Pour tout $x \in K$, l'ensemble $\mathcal{H}(x) := \{g(x) \mid g \in \mathcal{H}\}$ est relativement compact.*

Exemple 4.1.4. L'opérateur T de Volterra (primitive s'annulant en 0) défini sur $E := C([0,1];\mathbb{K})$, muni de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$, est compact.

En effet, on va utiliser le théorème d'Ascoli avec $K := [0,1]$, $X := \mathbb{K}$ et $\mathcal{H} := T(B_E)$. Soit $f \in B_E$, pour $x, y \in [0,1]$, on a
$$|Tf(x) - Tf(y)| = \left|\int_x^y f(t)\ dt\right| \leq |x-y|\,\|f\|_\infty \leq |x-y|.$$
Soit $x \in K$ fixé. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $V := \{y \in K \mid |x-y| < \varepsilon\} \in \mathcal{V}(x)$ tel que, pour tout $g \in \mathcal{H}$ et tout $y \in V$, on a $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$. Autrement dit, $\mathcal{H}$ est bien équicontinue. De plus, pour tout $x \in [0,1]$, $\mathcal{H}(x)$ est une partie de $\mathbb{K}$ donc si $\mathcal{H}(x)$ est bornée alors $\mathcal{H}(x)$ est relativement compacte. Or, pour tout $x \in [0,1]$, on a
$$\forall\ f \in B_E, \quad |Tf(x)| \leq \int_0^x |f(t)|\ dt \leq x \leq 1,$$
ce qui donne le résultat.

Exemple 4.1.5. Soient $E := C([a,b];\mathbb{K})$ muni de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$ et $K \in C([a,b]^2;\mathbb{K})$. Alors, l'**opérateur intégral** T_K défini par
$$\forall\ f \in E, \quad T_K f(x)\ :=\ \int_a^b K(x,y)\, f(y)\ dy, \quad \forall\ x \in [a,b],$$
est compact (voir Td, fiche n° 3).

On fera appel à plusieurs reprises au théorème de Riesz (voir par exemple [4], page 43, pour la démonstration) que l'on rappelle ci-dessous sous forme de lemme.

Lemme 4.1.6 (Théorème de Riesz)**.** *Soit X un espace vectoriel normé. Alors, la boule unité fermée de X est compacte si et seulement si X est de dimension finie.*

Remarque 4.1.7.

1. Une application directe du théorème de Riesz est que l'application identité sur X est compacte si et seulement si X est de dimension finie.
2. Si E et F sont de dimensions infinies, le théorème de Riesz entraîne (voir Td, fiche n° 3) que si $T \in \mathcal{L}(E,F)$ est inversible alors T n'est pas compact.

Théorème 4.1.8. *$\mathcal{K}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(E,F)$, en particulier $\mathcal{K}(E,F)$ est un espace de Banach sur $\mathbb{K}$.*

Remarque 4.1.9. Si F n'est pas complet, le résultat peut être faux (voir [4], p. 194).

Démonstration. Pour tout $T \in \mathcal{K}(E,F)$, on a

$$\sup_{x\in B_E} ||Tx||_F = \sup_{y\in T(B_E)} ||y||_F \leq \sup_{y\in \overline{T(B_E)}} ||y||_F < +\infty,$$

donc $\mathcal{K}(E,F) \subset \mathcal{L}(E,F)$. De plus, $0 \in \mathcal{K}(E,F)$. Montrons que $\mathcal{K}(E,F)$ est stable par combinaisons linéaires. Soient $S,T \in \mathcal{K}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. D'après la Proposition 4.1.2, pour toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, il existe une sous-suite $(Sx_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(Sx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un point y de F. De même, il existe une sous-suite $(Tx_{\psi(\varphi(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(Tx_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un point z de F. Finalement, on obtient

$$(S+\lambda T)x_{\psi(\varphi(n))} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y + \lambda z.$$

En conclusion, pour toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, la suite $((S+\lambda T)x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite $((S+\lambda T)x_{\psi(\varphi(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans F. On en déduit, d'après la Proposition 4.1.2, que $S+\lambda T \in \mathcal{K}(E,F)$ donc $\mathcal{K}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$.

Il reste à montrer que l'espace vectoriel $\mathcal{K}(E,F)$ muni de la norme induite par celle de $\mathcal{L}(E,F)$ est fermé. Soit $T \in \overline{\mathcal{K}(E,F)}$. Alors, il existe une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{K}(E,F)$ qui converge dans $\mathcal{L}(E,F)$ vers T. On veut montrer que $T \in \mathcal{K}(E,F)$ donc que $\overline{T(B_E)}$ est un compact de F.

On rappelle un résultat classique de topologie (voir par exemple [4], page 13, pour la démonstration) qui sera utile pour la suite.

Lemme 4.1.10. *Si K est un fermé d'un espace métrique complet (X,d), alors K est compact si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $y_1,\ldots,y_n \in X$ tels que*

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(y_i,\varepsilon),$$

où $B(y_i,\varepsilon) := \{x \in X \mid d(x,y_i) < \varepsilon\}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $||T_{n_0} - T|| < \varepsilon/4$. Or $T_{n_0} \in \mathcal{K}(E,F)$ donc $\overline{T_{n_0}(B_E)}$ est un compact de F. En particulier, d'après le Lemme 4.1.10, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $y_1,\ldots,y_n \in F$ tels que

$$T_{n_0}(B_E) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B\left(y_i, \frac{\varepsilon}{4}\right).$$

où $B(x,r) := \{y \in E \mid \|x-y\| < r\}$. Alors, si $x \in B_E$, il existe $i_0 \in \{1,\ldots,n\}$ tel que

$$T_{n_0}x \in B\left(y_{i_0}, \frac{\varepsilon}{4}\right).$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} ||Tx - y_{i_0}|| &\leq ||Tx - T_{n_0}x|| + ||T_{n_0}x - y_{i_0}|| \leq ||T - T_{n_0}|| + \frac{\varepsilon}{4} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

d'où

$$Tx \in B\left(y_{i_0}, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B\left(y_i, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

On en déduit

$$T(B_E) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B\left(y_i, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

On obtient donc

$$\overline{T(B_E)} \subset \overline{\bigcup_{i=1}^{n} B\left(y_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \overline{B\left(y_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B\left(y_i, \varepsilon\right),$$

ce qui donne le résultat d'après le Lemme 4.1.10. $\square$

On termine cette section avec une propriété sur la composition des opérateurs compacts.

Proposition 4.1.11. *Soient $T \in \mathcal{L}(E, F)$ et $S \in \mathcal{L}(F, G)$. Si S ou T est compact alors ST est compact.*

Démonstration. Si $T \in \mathcal{K}(E, F)$. Alors, pour toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, la suite $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite $(Tx_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un point $y \in F$. Puisque S est continu, $(S(Tx_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $Sy \in G$. Donc $ST \in \mathcal{K}(E, G)$.

Si $S \in \mathcal{K}(F, G)$. Alors, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E bornée par une constante M, la suite $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée dans F. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$||Tx_n||_F \leq ||T||\, ||x_n||_E \leq M\, ||T||.$$

Comme $S \in \mathcal{K}(F, G)$, la suite $(S(Tx_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite $\left(S(Tx_{\varphi(n)})\right)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un point $z \in G$. Donc $ST \in \mathcal{K}(E, G)$. $\square$

4.2 Opérateurs de rang fini

Dans cette section, on s'intéresse à des opérateurs compacts particuliers.

Définition 4.2.1. Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$. On dit que T est un **opérateur de rang fini** si $\mathrm{Im}(T)$ est de dimension finie.

Exemple 4.2.2. Soient $E := L^p(]0, 1[; \mathbb{R})$ et T l'opérateur défini sur E par

$$\forall\, f \in E, \quad Tf(x) \;:=\; \int_0^1 xy(1 - xy)f(y)\; dy, \qquad \forall\, x \in]0, 1[.$$

Alors, T est à valeurs dans $F := \mathbb{R}_2[X]$ (espace des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2). Comme F est de dimension finie, l'opérateur T est de rang fini.

Proposition 4.2.3. *Tout opérateur borné de rang fini est compact.*

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$ un opérateur de rang fini. L'opérateur T est continu donc, pour tout $x \in B_E$, $||Tx|| \leq ||T||$. Alors, $T(B_E)$ est borné dans F et, par conséquent, $\overline{T(B_E)}$ aussi. De plus, $\mathrm{Im}(T)$ est fermé car c'est un espace vectoriel de dimension finie, d'où $\overline{T(B_E)} \subset \overline{\mathrm{Im}(T)} = \mathrm{Im}(T)$. Finalement, $\overline{T(B_E)}$ est un fermé borné de l'espace vectoriel de dimension finie $\mathrm{Im}(T)$, c'est donc un compact de $\mathrm{Im}(T)$, d'où $T \in \mathcal{K}(E,F)$. $\square$

L'espace $\mathcal{K}(E,F)$ est fermé et tout opérateur borné de rang fini est compact. On en déduit le résultat suivant :

Corollaire 4.2.4. *Toute limite dans $\mathcal{L}(E,F)$ d'opérateurs de rang fini est un opérateur compact.*

La réciproque est fausse en général mais si F est un espace de Hilbert, on a le résultat suivant :

Théorème 4.2.5. *Soient $(H,(\cdot,\cdot))$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{K}$ et $T \in \mathcal{K}(E,H)$. Alors, il existe une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{L}(E,H)$, d'opérateurs de rang fini, qui converge vers T dans $\mathcal{L}(E,H)$.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. D'après le Lemme 4.1.10, puisque $\overline{T(B_E)}$ est un compact de H, il existe $k_n \in \mathbb{N}^*$ et $y_1, \ldots, y_{k_n} \in H$ tels que

$$\overline{T(B_E)} \subset \bigcup_{i=1}^{k_n} B\left(y_i, \frac{1}{n+1}\right), \tag{4.2.1}$$

où $B(y,r) := \{x \in H \mid \|x-y\| < r\}$. Or $L_n := \mathrm{Vect}\,\{y_1, \ldots, y_{k_n}\}$ est un espace vectoriel de dimension finie, donc un fermé de l'espace de Hilbert H, d'où $H = L_n \oplus L_n^{\perp}$. Soit $P_n \in \mathcal{L}(H)$ la projection orthogonale de H sur L_n. Alors, $T_n := P_nT \in \mathcal{L}(E,H)$ est un opérateur de rang fini puisque

$$\dim(\mathrm{Im}(T_n)) = \dim\left(\mathrm{Im}(P_nT)\right) \leq \dim(L_n) \leq k_n.$$

Enfin, pour $x \in B_E$, d'après (4.2.1), il existe $i_0 \in \{1, \ldots, k_n\}$ tel que

$$||Tx - y_{i_0}|| < \frac{1}{n+1}.$$

Mais $y_{i_0} \in L_n$ et P_nTx est la projection orthogonale de Tx sur L_n donc

$$\|Tx - P_nTx\| = \mathrm{dist}(Tx, L_n) \leq ||Tx - y_{i_0}|| < \frac{1}{n+1}.$$

Finalement , on obtient

$$\forall\, x \in B_E, \qquad ||Tx - T_nx|| < \frac{1}{n+1},$$

d'où $||T - T_n|| \leq \dfrac{1}{n+1}$. $\square$

On termine cette section avec une dernière propriété sur les opérateurs de rang fini.

Proposition 4.2.6. *Soit $T \in \mathcal{K}(E,F)$. Alors,* $\mathrm{Im}(T)$ *est fermé si et seulement si T est de rang fini.*

Démonstration. Si $\mathrm{Im}(T)$ est fermé dans l'espace de Banach F, c'est aussi un espace de Banach. Alors, T est un opérateur continu et surjectif de l'espace de Banach E sur l'espace de Banach $\mathrm{Im}(T)$. D'après le théorème de l'application ouverte, T est ouverte, *i.e.* T transforme tout ouvert de E en un ouvert de F. La boule fermée B_E est un voisinage de 0 dans E et T est ouverte, donc $T(B_E)$ est un voisinage de $T(0) = 0$ dans $\mathrm{Im}(T)$. Alors, il existe $r > 0$ tel que

$$B_{\mathrm{Im}\,(T)}(0,r) \;:=\; \{y \in \mathrm{Im}(T) \mid \|y\| < r\} \subset T(B_E).$$

Alors, l'adhérence $\overline{B_{\mathrm{Im}(T)}(0,r)}^F$ de $B_{\mathrm{Im}\,(T)}(0,r)$ dans F est un fermé dans le compact $\overline{T(B_E)}$, c'est donc un compact de F. De plus, on a

$$\overline{B_{\mathrm{Im}(T)}(0,r)}^F \subset \overline{T(B_E)}^F \subset \overline{\mathrm{Im}(T)}^F = \mathrm{Im}(T),$$

d'où $\overline{B_{\mathrm{Im}(T)}(0,r)}^F$ est un compact de $\mathrm{Im}(T)$. On en déduit que la boule unité de $\mathrm{Im}(T)$ est un compact de $\mathrm{Im}(T)$, ce qui prouve que $\mathrm{Im}(T)$ est de dimension finie d'après le Lemme 4.1.6.

La réciproque est évidente : si T est un opérateur de rang fini, alors $\mathrm{Im}(T)$ est un espace vectoriel de dimension finie et donc est un fermé. □

4.3 Propriétés spectrales des opérateurs compacts

Rappels 4.3.1. *Soit F un sous-espace vectoriel de E. On dit que F admet un* ***supplémentaire topologique*** *dans E s'il existe un sous-espace vectoriel G de E tel que*

i) $E = F \oplus G$, i.e. pour tout $z \in E$, il existe un unique couple $(p(z), q(z)) \in F \times G$ tel que $z = p(z) + q(z)$,

ii) l'application p de E dans E ainsi définie est linéaire et continue.

Remarque 4.3.2. Si F admet un supplémentaire topologique G dans E alors F et G sont fermés dans E. De plus, si F est de dimension finie, alors F admet un supplémentaire topologique.

Lemme 4.3.3. *Si $T \in \mathcal{K}(E)$, alors $F := \mathrm{Ker}(I - T)$ est de dimension finie. En particulier, d'après la Remarque 4.3.2, F admet donc un supplémentaire topologique G.*

Démonstration. Tout d'abord, remarquons que $T(B_F) = B_F$. En effet, par définition de F, tout élément y de F vérifie $y = Ty$. Comme $F = (I - T)^{-1}(\{0\})$ est un fermé de E, $B_F = B_E \cap F$ est aussi un fermé de E. De plus, puisque $B_F \subset B_E$, on a

$$B_F = T(B_F) \subset \overline{T(B_E)},$$

d'où B_F est un fermé de E, inclus dans $\overline{T(B_E)}$, qui est un compact de E car $T \in \mathcal{K}(E)$. Donc B_F est un compact de F. On en déduit, d'après le Lemme 4.1.6, que F est de dimension finie. □

Lemme 4.3.4. *Soient $T \in \mathcal{K}(E)$, $F := \operatorname{Ker}(I-T)$ et G le supplémentaire topologique de F. Alors, l'opérateur $S := (I-T)_{|G}$ est linéaire, continu et injectif. De plus, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $x \in G$, on a $||Sx||_E \geq C\,||x||_E$.*

Remarque 4.3.5. D'après le Corollaire 1.1.4, on en déduit $\overline{\operatorname{Im}(S)} = \operatorname{Im}(S)$.

Démonstration. L'application $I-T$ est linéaire continue donc S aussi. De plus, si $x \in \operatorname{Ker}(S)$, alors $x \in G$ et $(I-T)x = 0$. Autrement dit, $x \in F \cap G = \{0\}$, d'où $x = 0$. Ce qui montre que S est injectif. Supposons que l'inégalité soit fausse, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in G$ tel que

$$||Sx_n||_E < \frac{1}{n}\,||x_n||_E. \tag{4.3.1}$$

En particulier, $||x_n||_E \neq 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $y_n := x_n/||x_n||_E \in B_E \cap G$. Puisque $T \in \mathcal{K}(E)$, il existe une sous-suite $(Ty_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(Ty_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $z \in E$ tels que

$$Ty_{n_k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} z.$$

Or, d'après (4.3.1), on a

$$||Sy_{n_k}||_E < \frac{1}{n_k}, \quad \forall\, n_k \in \mathbb{N}^*, \tag{4.3.2}$$

d'où

$$y_{n_k} = Sy_{n_k} + Ty_{n_k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} z.$$

De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $y_{n_k} \in G$ donc $z \in \overline{G} = G$. Puisque S est continue sur G, on obtient

$$Sy_{n_k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} Sz.$$

D'après (4.3.2), on en déduit $Sz = 0$. Or S est injectif, d'où $z = 0$. Ce qui est absurde car

$$||z||_E = \lim_{k\to+\infty} ||y_{n_k}||_E = 1,$$

d'où le résultat. □

Proposition 4.3.6. *Si $T \in \mathcal{K}(E)$ alors $\operatorname{Im}(I-T)$ est fermé dans E.*

Démonstration. On note $F := \operatorname{Ker}(I-T)$ et G le supplémentaire topologique de F. Soit $z \in \overline{\operatorname{Im}(I-T)}$. Alors, il existe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E telle que

$$z_n - Tz_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} z.$$

Puisque $E = F \oplus G$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(x_n, y_n) \in F \times G$ tel que $z_n = x_n + y_n$. Soit $S := (I-T)_{|G}$. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in F = \operatorname{Ker}(I-T)$, *i.e.* $x_n - Tx_n = 0$, on a

$$Sy_n = y_n - Ty_n = z_n - Tz_n - (x_n - Tx_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} z,$$

D'après la Remarque 4.3.5, on en déduit

$$z \in \overline{\operatorname{Im}(S)} = \operatorname{Im}(S) \subset \operatorname{Im}(I-T),$$

d'où le résultat. □

Dans la suite, on fera appel au résultat général de topologie suivant :

Lemme 4.3.7. *Soit $(X, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$. Si Y est un sous-espace vectoriel fermé de X, distinct de X, alors il existe $x \in X$ tel que $||x|| = 1$ et $d(x, Y) \geq 1/2$.*

Démonstration. Puisque $X\backslash\overline{Y} = X\backslash Y \neq \emptyset$, on peut choisir $y \in X\backslash\overline{Y}$. On pose

$$\delta \ := \ d(y, Y) > 0.$$

Alors, il existe $z \in Y$ tel que $0 < ||y-z|| \leq 2\delta$. On pose $x := (y-z)/||y-z||$, alors $\|x\| = 1$ et, pour tout $t \in Y$, on a

$$\begin{aligned} ||x-t|| \ &= \frac{1}{||y-z||}\, ||y-z-||y-z||\, t|| \\ &= \frac{1}{||y-z||}\, ||y-u|| \quad \text{où} \quad u := z + ||y-z||\, t \in Y \\ &\geq \frac{1}{2\delta}\, d(y, Y) = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

donc $d(x, Y) \geq 1/2$. □

Théorème 4.3.8. *Soit $T \in \mathcal{K}(E)$. Alors, $I - T$ est injectif si et seulement si $I - T$ est inversible.*

Démonstration. Il suffit de montrer que si $I - T$ est injectif, alors $I - T$ est surjectif. On raisonne par l'absurde en supposant que $I - T$ n'est pas surjectif.
1ère étape. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $E_n := \mathrm{Im}((I-T)^n)$. Comme $I - T$ n'est pas surjectif on a $E_1 \subsetneq E = E_0$. Montrons par récurrence la propriété

$$E_n \text{ est fermé dans } E \quad \text{et} \quad E_{n+1} \subsetneq E_n. \tag{$\mathcal{P}_n$}$$

La propriété $(\mathcal{P}_0)$ est vérifiée d'après la Proposition 4.3.6 et car $E_1 \subsetneq E_0$. Supposons maintenant que $(\mathcal{P}_n)$ est vérifiée et montrons que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie. Comme $E_{n+1} \subset E_n$, on a $(I - T)(E_n) \subset E_n$, d'où $T(E_n) \subset E_n$. Ainsi, on peut définir $T_n := T_{|E_n} \in \mathcal{L}(E_n)$. On a

$$\overline{T_n(B_{E_n})}^{E_n} = \overline{T(B_{E_n})} \cap E_n \subset \overline{T(B_E)} \cap E_n.$$

Or $\overline{T(B_E)}$ est un compact de E et, comme $(\mathcal{P}_n)$ est vérifiée, E_n est fermé dans E, donc $\overline{T(B_E)} \cap E_n$ est un compact de E_n et $\overline{T_n(B_{E_n})}^{E_n}$ aussi, d'où $T_n \in \mathcal{K}(E_n)$. D'après la Proposition 4.3.6 appliquée à T_n, $\mathrm{Im}\,(I_{E_n} - T_n)$ est fermé dans E_n donc dans E. Or on a

$$E_{n+1} = (I-T)\,(E_n) = (I_{E_n} - T_n)\,(E_n) = \mathrm{Im}(I_{E_n} - T_n).$$

On en déduit que

$$E_{n+1} \text{ est fermé dans } E. \tag{4.3.3}$$

De plus, en utilisant $E_{n+1} \subsetneq E_n$, et l'injectivité de $I - T$ on obtient

$$E_{n+2} = (I-T)(E_{n+1}) \subsetneq (I-T)(E_n) = E_{n+1}. \tag{4.3.4}$$

Finalement (4.3.3) et (4.3.4) montrent que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vérifiée.
2ème étape. D'après la 1ère étape, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $(\mathcal{P}_n)$ est vérifiée. D'après le Lemme 4.3.7 appliqué à $X = E_n$ et $Y = E_{n+1}$, il existe $x_n \in E_n$ tel que $||x_n|| = 1$ et $d(x_n, E_{n+1}) \geq 1/2$. Alors, pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ avec $q > p$, on a

$$Tx_q \in E_q \subset E_{p+1} \quad \text{et} \quad (I-T)x_p \in E_{p+1},$$

d'où $Tx_q + (I-T)x_p \in E_{p+1}$. On en déduit

$$\begin{aligned} ||Tx_p - Tx_q|| &= ||x_p - (Tx_q + (I-T)x_p)|| \\ &\geq d(x_p, E_{p+1}) \geq 1/2. \end{aligned}$$

La dernière inégalité montre que $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de sous-suite convergente, ce qui est en contradiction avec le fait que $T \in \mathcal{K}(E)$ et que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans E. Finalement, on en déduit que $I - T$ est surjectif. $\square$

Lemme 4.3.9. *Soient $(X, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille libre de vecteurs de X. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n := \mathrm{Vect}\{e_0, \ldots, e_n\}$. Alors, il existe une famille libre $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$X_n = \mathrm{Vect}\{f_0, \ldots, f_n\}, \quad ||f_n|| = 1 \quad \textit{et} \quad d(f_{n+1}, X_n) \geq \frac{1}{2}.$$

Soit $T \in \mathcal{L}(X)$ tel qu'il existe une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}$ vérifiant

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad Te_n = \lambda_n e_n. \tag{4.3.5}$$

Alors, on a

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad (\lambda_{n+1} I - T) f_{n+1} \in X_n. \tag{4.3.6}$$

Démonstration. On procède par récurrence. On pose $f_0 := e_0/||e_0||$. On a $X_0 \subsetneq X_1$ et X_0 est fermé dans X_1, puisque X_0 est de dimension finie. On peut donc appliquer le Lemme 4.3.7 avec $Y = X_0$ et $X = X_1$, on en déduit qu'il existe $f_1 \in X_1$ tel que

$$||f_1|| = 1 \quad \text{et} \quad d(f_1, X_0) \geq \frac{1}{2}.$$

De l'inégalité $d(f_1, X_0) \geq 1/2$, on déduit $f_1 \notin X_0$, donc la famille $\{f_0, f_1\}$ est libre dans X_1. Or $\dim(X_1) = 2$, d'où $X_1 = \mathrm{Vect}\{f_0, f_1\}$. On construit de même, par récurrence, tous les f_n.

Supposons que (4.3.5) a lieu. Comme $f_{n+1} \in X_{n+1}$, on a

$$f_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \beta_i\, e_i, \quad \text{où} \quad \beta_0, \ldots, \beta_{n+1} \in \mathbb{K}.$$

Alors, on obtient

$$\lambda_{n+1}\, f_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \beta_i\, \lambda_{n+1}\, e_i \quad \text{et} \quad T f_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \beta_i\, \lambda_i\, e_i.$$

Autrement dit, $(\lambda_{n+1} I - T)\, f_{n+1} = \sum\limits_{i=0}^{n} \beta_i\, (\lambda_{n+1} - \lambda_i)\, e_i \in X_n$. $\square$

Lemme 4.3.10. *Soient $T \in \mathcal{K}(E)$ et $\varepsilon > 0$. Alors, l'ensemble*

$$\{\lambda \in \mathrm{Vp}(T) \mid |\lambda| \geq \varepsilon\},$$

est fini.

Démonstration. Supposons le résultat faux. Alors, il existe une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathrm{Vp}(T)$ dont les éléments sont distincts les uns des autres et vérifient, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\lambda_n| \geq \varepsilon$. Par définition de $\mathrm{Vp}(T)$, il existe une suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $E\backslash\{0\}$ telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad Te_n = \lambda_n\, e_n.$$

Comme $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de valeurs propres de T, 2 à 2 distinctes, la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme une famille libre de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$E_n :=\ \mathrm{Vect}\,\{e_0, \ldots, e_n\}\,.$$

D'après le Lemme 4.3.9, il existe une famille libre $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$E_n = \mathrm{Vect}\{f_0, \ldots, f_n\}, \tag{4.3.7}$$

$$||f_n|| = 1 \qquad \text{et} \qquad d(f_{n+1}, E_n) \geq \frac{1}{2}, \tag{4.3.8}$$

et

$$(\lambda_{n+1}\, I - T) f_{n+1} \in E_n. \tag{4.3.9}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $y_n := \lambda_n^{-1}\, f_n \in E_n$. Comme $|\lambda_n| \geq \varepsilon$ et $||f_n|| = 1$, on a $\|y_n\| \leq \varepsilon^{-1}$. Soient $p, q \in \mathbb{N}^*,\ q > p$. D'après (4.3.9), on a

$$\lambda_q^{-1}(\lambda_q\, I - T) f_q \in E_{q-1}.$$

De plus, d'après (4.3.7), on a les inclusions suivantes

$$Ty_p \in T\,(E_p) \subset E_p \subset E_{q-1}.$$

On en déduit $Ty_p + \lambda_q^{-1}(\lambda_q\, I - T) f_q \in E_{q-1}$. Alors, d'après (4.3.8), on obtient

$$\begin{aligned} ||Ty_q - Ty_p|| \ &= ||f_q - (Ty_p + f_q - Ty_q)\,|| = ||f_q - \Big(Ty_p + f_q - \lambda_q^{-1}\, Tf_q\Big)\,|| \\ &= ||f_q - \Big(Ty_p + \lambda_q^{-1}(\lambda_q\, I - T) f_q\Big)\,|| \\ &\geq d(f_q, E_{q-1}) \geq \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{4.3.10}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|y_n\| \leq \varepsilon^{-1}$ d'où la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et donc, comme $T \in \mathcal{K}(E)$, la suite $(Ty_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite qui converge dans E, ce qui est impossible d'après (4.3.10). □

Théorème 4.3.11 (Théorème spectral des opérateurs compacts)**.** *Soit $T \in \mathcal{K}(E)$.*

1. *Si E est de dimension infinie, alors $0 \in \sigma(T)$.*

2. $\mathrm{Vp}(T) \setminus \{0\} = \sigma(T) \setminus \{0\}$ *et, pour tout* $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$, *le sous-espace propre associé* $\mathrm{Ker}(\lambda I - T)$ *est de dimension finie.*

3. Le spectre $\sigma(T)$ *de* T *est dénombrable. De plus, s'il est infini, les éléments de* $\sigma(T) \setminus \{0\}$ *forment une suite* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $\mathbb{K}$ *telle que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |\lambda_{n+1}| \leq |\lambda_n| \qquad \textit{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 0.$$

Démonstration.
1. Si $0 \notin \sigma(T)$ alors T est inversible dans $\mathcal{L}(E)$ et $I = T^{-1}T \in \mathcal{K}(E)$ d'après la Proposition 4.1.11. Or d'après la Remarque 4.1.7, l'opérateur identité de E est compact si et seulement si E est de dimension finie.
2. On a $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ si et seulement si $\lambda \neq 0$ et $\lambda I - T$ est non inversible dans $\mathcal{L}(E)$, ce qui équivaut encore à $\lambda \neq 0$ et $I - \lambda^{-1} T$ est non inversible dans $\mathcal{L}(E)$. Or, d'après la Proposition 4.3.8 appliquée à $\lambda^{-1} T$, $I - \lambda^{-1} T$ n'est pas inversible dans $\mathcal{L}(E)$ si et seulement si $I - \lambda^{-1} T$ n'est pas injectif. Donc $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ si et seulement si $\lambda \neq 0$ et $\lambda \in \mathrm{Vp}(T)$. De plus, d'après le Lemme 4.3.3, $\mathrm{Ker}(I - \lambda^{-1} T)$ est de dimension finie donc $\mathrm{Ker}(\lambda I - T)$ est de dimension finie.
3. D'après le Lemme 4.3.10 et 2., pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble $\{\lambda \in \sigma(T) \mid |\lambda| \geq \varepsilon\}$ est fini. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Alors l'ensemble $\{\lambda \in \sigma(T) \mid |\lambda| \geq 1/n\}$ est fini, soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n_0}$ ses éléments classés de la façon suivante :

$$|\lambda_0| \geq \cdots \geq |\lambda_{n_0}| \geq \frac{1}{n}.$$

De même, l'ensemble

$$\Lambda_n \;:=\; \left\{\lambda \in \sigma(T) \;\middle|\; \frac{1}{n+1} \leq |\lambda| < \frac{1}{n}\right\},$$

est fini. On pose $\Lambda_n = \{\lambda_{n_0+1}, \ldots, \lambda_{n_1}\}$ où les λ_i sont classés de la façon suivante

$$\frac{1}{n+1} \leq |\lambda_{n_1}| \leq \cdots \leq |\lambda_{n_0+1}| < \frac{1}{n} \leq |\lambda_{n_0}| \leq \cdots \leq |\lambda_0|$$

En procédant ainsi par récurrence, on peut ranger les éléments de $\sigma(T) \setminus \{0\}$ en une suite $(\lambda_n)_{\in\mathbb{N}}$ qui décroît, en module, vers 0. $\square$

Chapitre 5

Opérateurs auto-adjoints compacts

Un résultat classique d'algèbre linéaire affirme qu'en dimension finie tout opérateur auto-adjoint est diagonalisable dans une base orthonormée. Le but de ce chapitre est de généraliser ce résultat en dimension infinie mais, pour ce faire, il est nécessaire d'ajouter une hypothèse de compacité et donc de considérer des opérateurs auto-adjoints compacts.

Le cadre est celui des espaces de Hilbert et, dans tout le chapitre, $(H, (\cdot, \cdot))$ désigne un espace de Hilbert sur $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, non réduit à $\{0\}$.

5.1 Décomposition spectrale des opérateurs auto-adjoints de rang fini

Dans cette section, on considère le cas particulier des opérateurs de rang fini. On rappelle ci-dessous le résultat classique qui affirme que, en dimension finie, tout opérateur auto-adjoint est diagonalisable dans une base orthonormée.

Théorème 5.1.1 (Théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints en dimension finie)**.** *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint. Si H est de dimension finie n, alors*

1. *les sous-espaces propres* $\mathrm{Ker}(\lambda I - T)$*, où* $\lambda \in \mathrm{Vp}(T)$*, sont 2 à 2 orthogonaux,*
2. *T est diagonalisable dans une base orthonormale et*

$$H = \underset{\lambda \in \mathrm{Vp}(T)}{\oplus^{\perp}} \mathrm{Ker}(\lambda I - T),$$

3. *T admet la décomposition spectrale suivante :*

$$T = \sum_{\lambda \in \mathrm{Vp}(T)} \lambda P_\lambda = \sum_{\lambda \in \mathrm{Vp}(T) \setminus \{0\}} \lambda P_\lambda,$$

où P_λ est la projection orthogonale de H sur $\mathrm{Ker}(\lambda I - T)$*.*

Pour les opérateurs de rang fini, on a tout d'abord le résultat auxiliaire suivant :

Proposition 5.1.2. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint de rang fini.*

1. $H = \mathrm{Im}(T) \oplus^{\perp} \mathrm{Ker}(T)$.

2. *Si H est de dimension infinie, alors* $0 \in \mathrm{Vp}(T)$ *et* $\mathrm{Ker}(T)$ *est de dimension infinie.*
3. $\mathrm{Vp}(T) = \sigma(T)$.
4. *Pour tout* $\lambda \in \mathrm{Vp}(T) \setminus \{0\}$, $\mathrm{Ker}(\lambda I - T)$ *est de dimension finie.*

Démonstration. D'après la Proposition 2.3.1, on a

$$\mathrm{Ker}(T) = (\mathrm{Im}(T^*))^\perp = (\mathrm{Im}(T))^\perp .$$

Or $\mathrm{Im}(T)$ est fermé, car de dimension finie, donc

$$H = \mathrm{Im}(T) \oplus (\mathrm{Im}(T))^\perp = \mathrm{Im}(T) \oplus \mathrm{Ker}(T),$$

ce qui donne le résultat.

Lorsque H est de dimension infinie, on en déduit 2. puisque $\mathrm{Im}(T)$ de dimension finie. Les propriétés 3. et 4. sont alors simplement des conséquences du théorème spectral des opérateurs compacts (Théorème 4.3.11). □

Lemme 5.1.3. *Soient $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint de rang fini et T_1 sa restriction à* $\mathrm{Im}(T)$, *i.e.* $T_1 := T_{|\mathrm{Im}(T)}$, *alors*

1. $T_1 \in \mathcal{L}(\mathrm{Im}(T))$ *et est auto-adjoint.*
2. T_1 *est inversible et* $0 \notin \mathrm{Vp}(T_1)$.
3. $\mathrm{Vp}(T_1) = \mathrm{Vp}(T) \setminus \{0\}$.
4. *Pour tout* $\lambda \in \mathrm{Vp}(T_1)$, $\mathrm{Ker}(\lambda I - T_1) = \mathrm{Ker}(\lambda I - T)$.

Démonstration. Si $\mathrm{Im}(T) = \{0\}$, alors $H = \mathrm{Ker}(T)$ donc $T = 0$ et le résultat est trivial. Dans la suite, on suppose $\mathrm{Im}(T) \neq \{0\}$.
1. T_1 est un opérateur auto-adjoint continu car T l'est.
2. Si $x \in \mathrm{Im}(T)$ vérifie $T_1 x = 0$, alors $x \in \mathrm{Im}(T) \cap \mathrm{Ker}(T) = \{0\}$ d'après la Proposition 5.1.2. Donc T_1 est injectif et, comme $\mathrm{Im}(T)$ est de dimension finie, T_1 est inversible. Puisque T_1 est injectif, on obtient aussi $0 \notin \mathrm{Vp}(T_1)$.
3. Comme $T_1 = T_{|\mathrm{Im}(T)}$, il est clair que $\mathrm{Vp}(T_1) \subset \mathrm{Vp}(T) \setminus \{0\}$. Réciproquement, si $Tx = \lambda x$ avec $\lambda \neq 0$, alors $x = T(\lambda^{-1} x) \in \mathrm{Im}(T)$, donc $\mathrm{Vp}(T) \setminus \{0\} \subset \mathrm{Vp}(T_1)$.
4. Soit $\lambda \in \mathrm{Vp}(T_1)$. Si $x \in \mathrm{Ker}(\lambda I - T_1)$, alors $\lambda x = T_1 x = Tx$ donc $x \in \mathrm{Ker}(\lambda I - T)$. Réciproquement, si $x \in \mathrm{Ker}(\lambda I - T)$, alors $x = T(\lambda^{-1} x) \in \mathrm{Im}(T)$ d'où $\lambda x = Tx = T_1 x$ et $x \in \mathrm{Ker}(\lambda I - T_1)$. □

Théorème 5.1.4 (Théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints de rang fini)**.** *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint de rang fini. Alors,*

1. $\mathrm{Vp}(T)$ *est fini.*
2. $H = \bigoplus^\perp_{\lambda \in \mathrm{Vp}(T)} \mathrm{Ker}(\lambda I - T)$.
3. *T admet la décomposition spectrale suivante :*

$$T = \sum_{\lambda \in \mathrm{Vp}(T)} \lambda P_\lambda = \sum_{\lambda \in \mathrm{Vp}(T) \setminus \{0\}} \lambda P_\lambda, \tag{5.1.1}$$

où P_λ est la projection orthogonale de H sur $\mathrm{Ker}(\lambda I - T)$.

Démonstration. On note $T_1 := T_{|\mathrm{Im}(T)}$.
1. Comme $\mathrm{Im}(T)$ est de dimension finie, $\mathrm{Vp}(T_1)$ est fini. Or, d'après le Lemme 5.1.3, $\mathrm{Vp}(T)\setminus\{0\} = \mathrm{Vp}(T_1)$, d'où le résultat.
2. Puisque $T_1 \in \mathcal{L}(\mathrm{Im}(T))$ est auto-adjoint et que $\mathrm{Im}(T)$ est de dimension finie, le Théorème 5.1.1 appliqué à T_1 entraîne

$$\mathrm{Im}(T) = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Vp}(T_1)}^{\perp} \mathrm{Ker}(\lambda\, I - T_1) = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Vp}(T)\setminus\{0\}}^{\perp} \mathrm{Ker}(\lambda\, I - T),$$

Si $0 \notin \mathrm{Vp}(T)$, alors $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$ donc

$$H = \mathrm{Im}(T) \oplus \mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Im}(T) = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Vp}(T)\setminus\{0\}}^{\perp} \mathrm{Ker}(\lambda\, I - T) = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Vp}(T)}^{\perp} \mathrm{Ker}(\lambda\, I - T).$$

Si $0 \in \mathrm{Vp}(T)$ alors

$$H = \mathrm{Im}(T) \oplus \mathrm{Ker}(T) = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Vp}(T)\setminus\{0\}}^{\perp} \mathrm{Ker}(\lambda\, I - T) \oplus^{\perp} \mathrm{Ker}(T) = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Vp}(T)}^{\perp} \mathrm{Ker}(\lambda\, I - T).$$

3. Pour $x \in H$, d'après le 2., on a

$$x = \sum_{\lambda\in\mathrm{Vp}(T)} x_\lambda \quad \text{où} \quad x_\lambda \in \mathrm{Ker}(\lambda\, I - T).$$

On en déduit

$$Tx = \sum_{\lambda\in\mathrm{Vp}(T)} Tx_\lambda = \sum_{\lambda\in\mathrm{Vp}(T)} \lambda\, x_\lambda = \sum_{\lambda\in\mathrm{Vp}(T)} \lambda\ P_\lambda x.$$

□

Remarque 5.1.5.

1. On retiendra que si $T \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur auto-adjoint de rang fini, alors, quitte à considérer la somme directe $H = \mathrm{Im}(T) \oplus \mathrm{Ker}(T)$, on peut ramener l'étude spectrale de T, à celle de l'opérateur T_1 induit par T sur $\mathrm{Im}(T)$. On peut alors appliquer à T_1 le Théorème 5.1.1 (Théorème spectral en dimension finie) vu que $\mathrm{Im}(T)$ est de dimension finie.
2. On remarquera que la décomposition spectrale (5.1.1) a un sens car la somme est finie puisque $\mathrm{Vp}(T)$ est fini. Si l'on ne suppose plus T de rang fini, à priori $\mathrm{Vp}(T)$ peut ne plus être fini. Alors, il est nécessaire de pouvoir définir une somme infinie d'opérateurs, c'est l'objet du rappel ci-dessous.

5.2 Rappels sur les familles sommables et bases hilbertiennes

Les résultats de cette section sont donnés sans démonstration pour lesquelles on renvoie au cours d'analyse fonctionnelle du 1er semestre (voir aussi [2] et [4]).

Définition 5.2.1. Une famille $\{x_i\}_{i\in I}$ d'éléments d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est dite **sommable** dans E de somme x si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble fini $J_0 \subset I$ tel que, pour tout ensemble fini $J \supset J_0$, on a

$$\left\| x - \sum_{j\in J} x_j \right\| < \varepsilon.$$

On note alors

$$x = \sum_{i\in I} x_i.$$

Proposition 5.2.2. *Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace vectoriel normé.*

1. *Si* $\{x_i\}_{i\in I}$ *est une famille sommable de* E *de somme* x *et* $T \in \mathcal{L}(E)$*, alors la famille* $\{Tx_i\}_{i\in I}$ *est sommable dans* E *de somme* Tx*.*
2. *Si* $\{T_i\}_{i\in I}$ *est une famille sommable de* $\mathcal{L}(E)$ *de somme* T *et* $x \in E$*, alors la famille* $\{T_i x\}_{i\in I}$ *est sommable dans* E *de somme* Tx*.*

Définition 5.2.3. Soit $\{e_i\}_{i\in I}$ une famille d'éléments de H.

1. La famille $\{e_i\}_{i\in I}$ est dite **orthonormale** si
$$\forall\, i, j \in I, \quad (e_i, e_j) = \delta_{ij}.$$
2. La famille $\{e_i\}_{i\in I}$ est dite **totale** si elle engendre un sous-espace vectoriel dense dans H, *i.e.*
$$H = \overline{\mathrm{Vect}\{e_i \mid i \in I\}}.$$

Remarque 5.2.4. Toute famille orthonormale est libre.

Définition 5.2.5. Une famille orthonormale totale de H est appelée une **base hilbertienne**.

Remarque 5.2.6. Le Théorème de Zorn, permet de montrer que tout espace de Hilbert non réduit à $\{0\}$ admet une base hilbertienne, sous l'axiome du choix. Sans l'axiome du choix, on a existence d'une base hilbertienne pour tout espace de Hilbert séparable.

Proposition 5.2.7. *Soit* $\{e_i\}_{i\in I}$ *une base hilbertienne de* H*. Alors, pour tout* $x \in H$*, on a*

$$x = \sum_{i\in I} (x, e_i)\; e_i,$$

cette somme étant comprise au sens des familles sommables. De plus, pour tout $x \in H$*, on a*

$$\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |(x, e_i)|^2\,.$$

5.3 Décomposition spectrale des opérateurs auto-adjoints compacts

Lemme 5.3.1. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact. Alors,*

$$||T|| = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathrm{Vp}(T)\}.$$

En particulier, si $\mathrm{Vp}(T) \setminus \{0\} = \emptyset$ *alors* $T = 0$.

Remarque 5.3.2. L'hypothèse $H \neq \{0\}$ est nécessaire afin d'assurer l'existence d'une valeur propre. Par contre, 4. reste vrai si $H = \{0\}$.

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathrm{Vp}(T)$, alors il existe $e \in H$ tel que $||e|| = 1$ et $Te = \lambda\, e$. Donc

$$|\lambda| = |(\lambda\, e, e)| = |\,(Te, e)\,| \leq ||Te||\,||e|| \leq ||T||\,||e||^2 = ||T||.$$

De plus, puisque l'opérateur T est auto-adjoint, d'après le Théorème 3.1.5, il existe $\lambda_0 \in \sigma(T)$ tel que $|\lambda_0| = ||T||$. Si $\lambda_0 = 0$ alors $T = 0$, d'où $0 = \lambda_0 \in \mathrm{Vp}(T)$ (car H est non réduit à $\{0\}$). Si $\lambda_0 \neq 0$, comme T est compact, on a

$$\lambda_0 \in \sigma(T) \setminus \{0\} = \mathrm{Vp}(T) \setminus \{0\}.$$

Donc $\lambda_0 \in \mathrm{Vp}(T)$. On en déduit

$$\|T\| = |\lambda_0| \leq \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathrm{Vp}(T)\} \leq ||T||.$$

□

Lemme 5.3.3. *Soient $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact et $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ des valeurs propres non nulles, 2 à 2 distinctes, de T. Alors*

1. $H = G \oplus^{\perp} F$, *où* $G := \overset{k}{\underset{j=1}{\oplus}} \mathrm{Ker}(\lambda_j\, I - T)$ *et* $F := G^{\perp}$.
2. $T(G) \subset G$, $T(F) \subset F$ *et l'opérateur T_F induit par T sur F est un opérateur auto-adjoint compact.*
3. $\mathrm{Vp}(T_F) = \mathrm{Vp}(T) \setminus \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$.
4. *Si* $\mathrm{Vp}(T) \setminus \{0\} = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$, *alors T est de rang fini.*

Démonstration.
1. Soit $j \in \{1, \ldots, k\}$. Comme $\lambda_j \neq 0$ et T est compact, $\mathrm{Ker}(\lambda_j\, I - T)$ est de dimension finie. On en déduit que $G = \overset{k}{\underset{j=1}{\oplus}} \mathrm{Ker}(\lambda_j\, I - T)$ est un sous-espace de dimension finie de H, donc un fermé, d'où $H = G \oplus G^{\perp}$.
2. Si $x \in G$, alors $x = \sum\limits_{j=1}^{k} e_j$, où $e_j \in \mathrm{Ker}(\lambda_j\, I - T)$, $j = 1, \ldots, k$, donc

$$Tx = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j\, e_j \in G.$$

Donc $T(G) \subset G$. Soit $x \in F$. Alors, pour tout $y \in G$, $Ty \in G$ donc $(x, Ty) = 0$ puisque $F = G^\perp$. Puisque T est auto-adjoint, on obtient

$$\forall\, y \in G, \quad (Tx, y) = (x, Ty) = 0,$$

i.e. $Tx \in G^\perp = F$, d'où $T(F) \subset F$. De plus, $T_F(B_F) = T(B_E \cap F) \subset T(B_E) \cap F$. Comme T est compact et F fermé, on en déduit que T_F est compact.
3. Il est clair que l'on a l'inclusion $\mathrm{Vp}(T_F) \subset \mathrm{Vp}(T)$. Supposons $\lambda_i \in \mathrm{Vp}(T_F)$, où $i \in \{1, \ldots, k\}$, alors il existe $e \in F \setminus \{0\}$ tel que $T_F\, e = \lambda_i\, e$, d'où

$$e \in \mathrm{Ker}(\lambda_i\, I - T) \subset G = \bigoplus_{j=1}^{k} \mathrm{Ker}(\lambda_j\, I - T).$$

Donc $e \in (F \setminus \{0\}) \cap G = \emptyset$, d'où une contradiction. On en déduit

$$\mathrm{Vp}(T_F) \subset \mathrm{Vp}(T) \setminus \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}\,,$$

Réciproquement, si $\lambda \in \mathrm{Vp}(T) \setminus \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ alors il existe $e \in \mathrm{Ker}(\lambda\, I - T) \setminus \{0\}$ tel que $Te = \lambda\, e$. Comme $\lambda \notin \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$, $\mathrm{Ker}(\lambda\, I - T)$ est orthogonal à G . Donc

$$\mathrm{Ker}(\lambda\, I - T) \subset G^\perp = F,$$

d'où $T_F e = \lambda\, e$ avec $e \in F \setminus \{0\}$, *i.e.* $\lambda \in \mathrm{Vp}(T_F)$.
4. Si $\mathrm{Vp}(T) \setminus \{0\} = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$, alors $\mathrm{Vp}(T_F) \setminus \{0\} = \emptyset$. Donc, d'après le Lemme 5.3.1, $T_F = 0$. Or si $y \in \mathrm{Im}(T)$ alors il existe $x \in H$ tel que $Tx = y$. Ainsi, il existe $(x_G, x_F) \in G \times F$ tel que

$$y = T(x_G + x_F) = Tx_G + T_F x_F.$$

Or $T_F x_F = 0$, d'où $y \in T(G) \subset G$. On en déduit $\mathrm{Im}(T) \subset G$ et le résultat puisque G est de dimension finie. □

Proposition 5.3.4. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact. Alors,* $\mathrm{Vp}(T)$ *est fini si et seulement si T est de rang fini.*

Remarque 5.3.5. D'après le théorème spectral des opérateurs compacts (Théorème 4.3.11), si T est un opérateur compact alors $\mathrm{Vp}(T) \setminus \{0\} = \sigma(T) \setminus \{0\}$ et $\sigma(T)$ est dénombrable. En particulier, on obtient que $\mathrm{Vp}(T)$ est dénombrable. La Proposition 5.3.4 permet de préciser ce résultat.

Démonstration. Si T est de rang fini alors $\mathrm{Vp}(T)$ est fini d'après le théorème spectral des opérateurs de rang fini (Théorème 5.1.4). Réciproquement, supposons que $\mathrm{Vp}(T)$ est fini. Si $T = 0$ le résultat est immédiat. Sinon, d'après le Lemme 5.3.1, $\mathrm{Vp}(T) \setminus \{0\} \neq \emptyset$. Alors, on obtient

$$\mathrm{Vp}(T) \setminus \{0\} = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\},$$

ce qui donne le résultat d'après le Lemme 5.3.3. □

Théorème 5.3.6 (Décomposition spectrale)**.** *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact. Alors, on a*

$$T = \sum_{\lambda \in \mathrm{Vp}(T)} \lambda\, P_\lambda = \sum_{\lambda \in \mathrm{Vp}(T)\setminus\{0\}} \lambda\, P_\lambda, \tag{5.3.1}$$

au sens des familles sommables, où P_λ est la projection orthogonale de H sur $\mathrm{Ker}(\lambda\, I - T)$.

Démonstration. Si $\mathrm{Vp}(T)$ est fini alors, d'après la Proposition 5.3.4, T est de rang fini et le résultat est connu (Théorème 5.1.4). Donc on suppose $\mathrm{Vp}(T)$ infini dénombrable. D'après le théorème spectral des opérateurs compacts (Théorème 4.3.11), on a

$$\mathrm{Vp}(T) \setminus \{0\} = \{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}^*\},$$

où

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |\lambda_{n+1}| \leq |\lambda_n| \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 0. \tag{5.3.2}$$

Pour montrer que (5.3.1) a lieu au sens des familles sommables, on fixe $\varepsilon > 0$ et on considère une partie finie J de $\mathrm{Vp}(T) \setminus \{0\}$. On pose

$$G_J \ := \ \bigoplus_{\lambda \in J} \mathrm{Ker}(\lambda\, I - T) \quad \text{et} \quad F_J \ := \ G_J^{\perp}.$$

D'après le Lemme 5.3.3, $T(F_J) \subset F_J$ et l'opérateur T_{F_J} induit par T sur F_J est un opérateur auto-adjoint compact vérifiant

$$\mathrm{Vp}(T_{F_J}) \setminus \{0\} = (\mathrm{Vp}(T) \setminus \{0\}) \setminus J.$$

Alors, d'après le Lemme 5.3.1, on obtient

$$||T_{F_J}|| = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathrm{Vp}(T) \setminus J\}.$$

Soit $x \in H$. On vérifie aisément que $\sum_{\lambda\in J} P_\lambda$ est le projecteur orthogonal sur G, alors on a

$$x = x_J + y_J, \quad \text{où} \quad x_J = \sum_{\lambda \in J} P_\lambda x \in G_J \quad \text{et} \quad y_J \in F_J.$$

D'après le théorème de Pythagore, on obtient

$$\|x\|^2 = ||x_J||^2 + ||y_J||^2,$$

ce qui entraîne

$$||x - x_J|| = \sqrt{||y_J||^2} \leq \sqrt{||x_J||^2 + ||y_J||^2} = ||x||.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
\Big\|\Big(T - \sum_{\lambda\in J} \lambda\, P_\lambda\Big)x\Big\| &= \Big\|Tx - \sum_{\lambda\in J} \lambda\, P_\lambda x\Big\| = \Big\|Tx - \sum_{\lambda\in J} T P_\lambda x\Big\| \\
&= \Big\|T\Big(x - \sum_{\lambda\in J} P_\lambda x\Big)\Big\| = \|T(x - x_J)\| \\
&= \|T_{F_J}(x - x_J)\| \leq \|T_{F_J}\|\, \|x - x_J\| \\
&\leq \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathrm{Vp}(T) \setminus J\}\ \|x\|.
\end{aligned}$$

D'après le Lemme 4.3.10, l'ensemble

$$K_\varepsilon \ := \ \left\{\lambda \in \mathrm{Vp}(T) \mid |\lambda| \geq \frac{\varepsilon}{\|x\|}\right\},$$

est fini. Ainsi, pour toute partie finie $J \supset K_\varepsilon$, on a

$$\left\|\left(T - \sum_{\lambda \in J} \lambda\, P_\lambda\right)x\right\| \leq \max\left\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathrm{Vp}(T) \setminus K_\varepsilon\right\} \|x\| < \varepsilon,$$

d'où le résultat. □

On termine ce chapitre par trois conséquences du théorème de décomposition spectrale.

Corollaire 5.3.7. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact.*

1. *L'espace $\overline{\mathrm{Im}(T)}$ admet une base hilbertienne dénombrable $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ formée des vecteurs propres de T associés aux valeurs propres non nulles.*
2. *La suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des valeurs propres correspondants aux vecteurs propres $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 et on a*
$$\forall\ x \in H, \quad Tx = \sum_{n\geq 0} \lambda_n\ (x, f_n)\ f_n.$$

Remarque 5.3.8. Si T est de rang fini, alors $\mathrm{Vp}(T) \setminus \{0\}$ est fini. D'après le Corollaire 5.3.7, on en déduit que $\mathrm{Im}(T)$ admet une base orthonormale formée de vecteurs propres de T.

Démonstration.
1. Pour tout $x \in H$, on a

$$Tx = \sum_{\lambda\in\mathrm{Vp}(T)\setminus\{0\}} \lambda P_\lambda x,$$

d'où $\mathrm{Im}(T) \subset \overline{\bigoplus^\perp_{\lambda\in\mathrm{Vp}(T)\setminus\{0\}} \mathrm{Ker}(\lambda\, I - T)}$. De plus, si $\lambda \in \mathrm{Vp}(T)\setminus\{0\}$ alors $\mathrm{Ker}(\lambda\, I - T) \subset \mathrm{Im}(T)$, on en déduit

$$\overline{\mathrm{Im}(T)} = \overline{\bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Vp}(T)\setminus\{0\}} \mathrm{Ker}(\lambda\, I - T)}. \tag{5.3.3}$$

On construit alors la base $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en prenant la réunion des bases finies de chaque espace propre $\mathrm{Ker}(\lambda\, I - T)$ associés aux valeurs propres non nulles.
2. Si $\lambda \in \mathrm{Vp}(T) \setminus \{0\}$ et $x \in H$, alors $P_\lambda x \in \mathrm{Ker}(\lambda\, I - T)$. Soit $\{e_1, \ldots, e_k\}$ une base orthonormale de $\mathrm{Ker}(\lambda\, I - T)$, alors on obtient

$$x = \sum_{i=1}^{k} (x, e_i)\ e_i,$$

d'où

$$Tx = \sum_{i=1}^{k} \lambda\ (x, e_i)\ e_i.$$

De par la construction de la base $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans 1., on en déduit le résultat. □

Corollaire 5.3.9. *Soient $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact et P_λ la projection orthogonale de H sur* $\mathrm{Ker}(\lambda I - T)$, *où* $\lambda \in \mathrm{Vp}(T)$. *Alors, on a*

$$H = \overline{\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Vp}(T)} \mathrm{Ker}(\lambda I - T)}.$$

En particulier, on a la décomposition

$$\forall\, x \in H, \quad x = \sum_{\lambda \in \mathrm{Vp}(T)} P_\lambda x.$$

Démonstration. Comme T est auto-adjoint, $\mathrm{Ker}(T) = \overline{\mathrm{Im}(T)}^{\perp}$. On en déduit $H = \mathrm{Ker}(T) \oplus \overline{\mathrm{Im}(T)}$, ce qui donne le résultat d'après (5.3.3). $\square$

Corollaire 5.3.10. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact. Si H est séparable, alors il existe une base hilbertienne de H formée de vecteurs propres de T.*

Démonstration. Si H est séparable alors $\mathrm{Ker}(T)$ aussi. D'après la Remarque 5.2.6, il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n \geq 0}$ de $\mathrm{Ker}(T)$. Puisque $H = \mathrm{Ker}(T) \oplus^{\perp} \overline{\mathrm{Im}(T)}$ et que, d'après le Corollaire 5.3.7, il existe une base hilbertienne $(f_n)_{n \geq 0}$ de $\overline{\mathrm{Im}(T)}$, on obtient une base hilbertienne de H formée de vecteurs propres de T en regroupant les famille $(e_n)_{n \geq 0}$ et $(f_n)_{n \geq 0}$. $\square$

Chapitre 6

Application : valeurs propres d'un problème elliptique

Dans ce dernier chapitre, on donne une application du théorème spectral des opérateurs auto-adjoints compacts pour les équations aux dérivées partielles elliptiques. On commence par le cas d'une formulation abstraite que l'on appliquera ensuite au cas de l'opérateur Laplacien.

6.1 Problème variationnel abstrait

Soient $(V, (\cdot,\cdot))$ et $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ deux espaces de Hilbert réel tels que

$$\begin{cases} V \subset H \text{ avec injection compacte,} \\ V \text{ est dense dans } H. \end{cases} \tag{6.1.1}$$

Soit $a(\cdot,\cdot)$ une forme bilinéaire symétrique, continue et coercive sur V. On considère le problème suivant (problème spectral variationnel) :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } u \in V \setminus \{0\} \text{ tels que} \\ a(u,v) = \lambda\,(u,v)_H\,, \quad \forall\, v \in V. \end{cases} \tag{6.1.2}$$

Définition 6.1.1. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in V \setminus \{0\}$ vérifient (6.1.2), on dit que λ est une **valeur propre de la formulation variationnelle** (6.1.2) et que u est un **vecteur propre** associé.

Théorème 6.1.2. *Les valeurs propres de* (6.1.2) *forment une suite croissante* $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ *de réels positifs qui tend vers l'infini et il existe une base hilbertienne de* H *formée de vecteurs propres* $(u_k)_{k\geq 1}$*, i.e. qui vérifient*

$$u_k \in V \setminus \{0\}, \quad \textit{et} \quad a(u_k, v) = \lambda_k\,(u_k, v)_H\,, \quad \forall\, v \in V.$$

De plus, $(u_k/\sqrt{\lambda_k})_{k\geq 1}$ *est une base hilbertienne de* V *pour le produit scalaire* $a(\cdot,\cdot)$*.*

Démonstration. On va construire un opérateur auto-adjoint compact T associé à la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$. Pour $f \in H$, on considère le problème :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u,v) = (f,v)_H\,, \quad \forall\, v \in V. \end{cases} \tag{6.1.3}$$

D'après le théorème de Lax-Milgram, le problème (6.1.3) admet une solution unique $u \in V$. On définit l'opérateur $\mathcal{A}$ de H dans V par $u = \mathcal{A}f$, autrement dit $\mathcal{A}$ est l'opérateur qui à $f \in H$ associe la solution $u \in V$ de (6.1.3). L'injection $\mathcal{I}$ de V dans H est continue donc $||v||_H \le c\,||v||_V$ pour tout $v \in V$. En prenant $v = \mathcal{A}f$ comme fonction test dans (6.1.3), on obtient

$$m\,||\mathcal{A}f||_V^2 \le a(\mathcal{A}f,\mathcal{A}f) = (f,\mathcal{A}f)_H \le ||f||_H\,||\mathcal{A}f||_H \le c\,||f||_H\,||\mathcal{A}f||_V,$$

où m est la constante de coercivité de $a(\cdot,\cdot)$. On en déduit $\mathcal{A} \in L(H,V)$. On pose alors $T := \mathcal{I}\mathcal{A} \in \mathcal{L}(H)$. D'après la Proposition 4.1.11, l'injection $\mathcal{I}$ de V dans H étant compacte, $T \in \mathcal{K}(H)$. Soient $f,g \in H$, en prenant $v = \mathcal{A}g$ comme fonction test dans (6.1.3), on obtient

$$(f,Tg)_H = (f,\mathcal{A}g)_H = a(\mathcal{A}f,\mathcal{A}g) = a(\mathcal{A}g,\mathcal{A}f) = (g,\mathcal{A}f)_H = (g,Tf)_H\,,$$

donc T est auto-adjoint et défini positif dans H. Le Corollaire 5.3.10 appliqué à T entraîne qu'il existe une suite décroissante $(\mu_k)_{k\ge1}$ de réels positifs qui tend vers 0 et une base hilbertienne $(u_k)_{k\ge1}$ de H formée de vecteurs propres de T, *i.e.*

$$Tu_k = \mu_k\,u_k, \quad \forall\, k \ge 1.$$

De plus, $u_k \in V$ puisque $u_k = \mu_k^{-1}Tu_k = \mu_k^{-1}\mathcal{A}u_k \in V$. Le problème (6.1.2) s'écrit encore

$$a(u,v) = \lambda\,(u,v)_H = \lambda\,a(\mathcal{A}u,v), \quad \forall\, v \in V.$$

Ce qui équivaut à $a(u - \lambda\,\mathcal{A}u, v) = 0$ pour tout $v \in V$, donc $u = \lambda\,\mathcal{A}u = \lambda\,Tu$. Ainsi les valeurs propres de (6.1.2) sont les inverses des valeurs propres de T et les vecteurs propres sont les mêmes. Pour $k \ge 1$, on pose

$$\lambda_k := \frac{1}{\mu_k} \quad \text{et} \quad v_k := \frac{u_k}{\sqrt{\lambda_k}}.$$

Il reste à vérifier que $(v_k)_{k\ge1}$ est une base hilbertienne de V pour le produit scalaire $a(\cdot,\cdot)$. Pour $k,j \ge 1$, on a

$$a(v_k,v_j) = \frac{a(u_k,u_j)}{\sqrt{\lambda_k\,\lambda_j}} = \lambda_k\,\frac{(u_k,u_j)_H}{\sqrt{\lambda_k\,\lambda_j}} = \delta_{kj},$$

car $(u_k)_{k\ge1}$ est une base hilbertienne de H. Enfin on a le résultat en remarquant que l'orthogonal de $(v_k)_{k\ge1}$ dans V est contenu dans l'orthogonal de $(u_k)_{k\ge1}$ dans H qui est réduit à $\{0\}$. $\square$

6.2 Valeurs propres du Laplacien

On va appliquer le résultat précédent pour l'opérateur laplacien. Afin dénoncer la formulation faible du problème $-\Delta u = \lambda\, u$ dans Ω avec $u = 0$ sur $\partial\Omega$ ont rappelle quelques notions sur les espaces de Sobolev (voir, par exemple, [1] et [6]).

Définition 6.2.1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

1. L'**espace de Sobolev** $H^1(\Omega)$ est défini par
$$H^1(\Omega) \ := \ \{u \in L^2(\Omega) \mid \nabla u \in L^2(\Omega)^d\}. \tag{6.2.1}$$
L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(\cdot,\cdot)$ défini par
$$(u, v) = \int_\Omega u\, v\ dx + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\ dx. \tag{6.2.2}$$
2. L'espace $H_0^1(\Omega)$ est défini comme étant l'adhérence de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

Théorème 6.2.2. *Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1. Alors $H_0^1(\Omega)$ est donné par*
$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \mid v_{|\partial\Omega} = 0 \ \textit{sur}\ \partial\Omega\}. \tag{6.2.3}$$

Remarque 6.2.3. L'écriture $v_{|\partial\Omega} = 0$ est simplement une notation. Elle signifie que la trace de v su $\partial\Omega$ est nulle (voir [1] et [6]).

Proposition 6.2.4 (Inégalité de Poincaré)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ borné dans une direction d'espace (ou plus). Alors, il existe une constante $c > 0$ telle que*
$$\forall\ v \in H_0^1(\Omega), \qquad \int_\Omega |v|^2\ dx \le c \int_\Omega |\nabla v|^2\ dx. \tag{6.2.4}$$

Théorème 6.2.5 (Rellich)**.** *Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1. L'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte.*

La formulation faible du problème $-\Delta u = \lambda\, u$ dans Ω avec $u = 0$ sur $\partial\Omega$ est la suivante :
$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ telle que} \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\ dx = \lambda \int_\Omega u\, v\ dx, \quad \forall\ v \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$
On obtient bien un problème du type (6.1.2) avec $H := L^2(\Omega)$, $V := H_0^1(\Omega)$ et $a(\cdot,\cdot)$ est la forme bilinéaire symétrique définie sur V par
$$a(u, v) \ := \ \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\ dx$$
L'injection de V dans H est compacte d'après le Théorème 6.2.5. De plus, l'espace $C_c^\infty(\Omega)$ étant dense dans $L^2(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$. On est donc bien dans les conditions du Théorème 6.1.2 et on en déduit le résultat suivant :

Corollaire 6.2.6. *Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1 de $\mathbb{R}^d$. Alors, il existe une suite croissante $(\lambda_k)_{k\ge1}$ de réels positifs qui tend vers l'infini et une base hilbertienne $(u_k)_{k\ge1}$ de $L^2(\Omega)$ telle que*
$$u_k \in H_0^1(\Omega) \quad \textit{et} \quad -\Delta u_k = \lambda_k\, u_k \quad \textit{p.p. dans}\ \Omega. \tag{6.2.5}$$

Bibliographie

[1] G. Allaire, *Analyse numérique et optimisation*. Éditions Ellipses, Paris (2006). Version sans images et avec bandeau pour usage personnel et non reproductible disponible à l'adresse
http ://www.cmap.polytechnique.fr/ allaire/livre2.html

[2] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle : Théorie et Applications*. Masson, Paris (1983).

[3] J. Charles, M. Mbekhta & H. Queffélec, *Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs : Rappels de cours et exercices corrigés*. Dunod, 2010.

[4] F. Hirsch & G. Lacombe, *Éléments d'analyse fonctionnelle*. Dunod, 1997.

[5] G. Lacombe & P. Massat, *Analyse fonctionnelle. Exercices corrigés*. Dunod, 1999.

[6] D. Manceau, *Résolution pratique des équations aux dérivées partielles*. Cours de Master 2 Matis de l'université du Havre. Polycopié disponible à l'adresse
http ://d.p.manceau.free.fr/RPEDP/RPEDP.pdf

Index